BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

MÉMOIRES COURONNÉS

ET MÉMOIRES

des

SAVANTS ÉTRANGERS,

publiés par

l'Académie royale

des sciences,

des lettres et des beaux-arts

de Belgique.

TOME LVI

1898.

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

S. 401 F. 61.

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

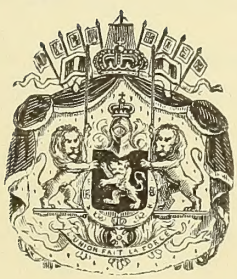
MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE

TOME LVI



BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES
ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE
rue de Louvain, 112

DÉCEMBRE 1897 — JUILLET 1898

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME LVI

CLASSE DES SCIENCES

1. — Sur l'intervention de la phagocytose dans le développement des invertébrés (*Mémoire couronné* en 1896, 114 pages et 5 planches); par le Dr C. De Bruyne.

2. — Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (52 pages); par J. Beaupain.

3. — Sur le système nerveux périphérique de l'Amphioxus et en particulier sur la constitution et la genèse des racines sensibles (*Mémoire couronné* en 1896, 74 pages 13 planches et 4 figures); par J.-F. Heymans et O. Van der Stricht.

4. — Sur les relations lithologiques entre les roches considérées comme cambriennes des massifs de Rocroi, du Brabant et de Stavelot (96 pages et 3 planches); par J. De Windt.

5. — Détermination du poids atomique du molybdène (*Mémoire couronné* en 1897, 44 pages et 4 planches); par le Dr A. Vandenberghe.

6. — Sur les déformations permanentes et l'hysteresis : Étude de divers systèmes dépendant d'une seule variable [quatrième mémoire]. — Étude de divers systèmes dépendant de deux variables [cinquième mémoire] (199 pages et 55 figures); par P. Duhem.

SUR

L'INTERVENTION DE LA PHAGOCYTOSE

DANS LE

DÉVELOPPEMENT DES INVERTÉBRÉS

PAR

le Dr C. DE BRUYNE

CHEF DES TRAVAUX HISTOLOGIQUES ET EMBRYOLOGIQUES A L'UNIVERSITÉ
PROFESSEUR A L'ÉCOLE NORMALE DE GAND

Ab ovo usque ad mala.

(Couronné par la Classe des sciences dans la séance du 15 décembre 1896.)

Mémoire en réponse à la question posée par l'Académie royale de Belgique
(concours pour 1896 : sciences naturelles) :

« *On demande des recherches nouvelles au sujet de l'intervention de la phagocytose dans le développement des Invertébrés.* »

SUR

L'INTERVENTION DE LA PHAGOCYTOSE

DANS LE

DÉVELOPPEMENT DES INVERTÉBRÉS

Metchnikoff, dans son travail magistral de 1883 (*Insectes,* 47), a défini le *phagocyte* et créé la théorie de la *phagocytose.* Celle-ci fut d'abord attaquée de toutes parts, mais, après que des naturalistes eussent répété les expériences ingénieuses du jeune savant russe, elle fut admise d'une façon générale : discutée avec une égale conviction par ses adversaires et par ses adeptes, elle fit naître ainsi des travaux nombreux et d'une importance considérable. Chez les Invertébrés, elle a fait l'objet de recherches actives, mais le sujet n'est point épuisé. En réponse à une question posée par la Classe des sciences de l'Académie, nous l'avons étudiée à notre tour chez tous les Métazoaires invertébrés (sauf chez les Cœlentérés) et tout particulièrement chez les Insectes et chez les Mollusques. Nous consignerons nos résultats principaux dans les chapitres qui vont suivre.

INSECTES.

MÉTHODES ET MATÉRIAUX DE RECHERCHE.

Nous avons capturé les insectes à différents stades de leur développement et avons procédé à l'examen des tissus vivants et frais, ou bien après fixation.

1. *Examen à l'état vivant.* — Les insectes ou parties d'insectes furent ou disséqués ou dilacérés sous le microscope et les tissus soumis à un examen

immédiat. Dans ces conditions, nous avons pu surprendre le caractère intime des phénomènes sans devoir craindre les altérations auxquelles, dans certains cas, peut donner lieu l'emploi de réactifs.

2. *Fixations.* — Après dilacération, des organes furent exposés pendant un temps variable à des vapeurs d'acide osmique et examinés dans cet état ou bien après coloration subséquente par le vert de méthyle. Les liqueurs de Flemming et de Hermann, ainsi que le sublimé corrosif, nous ont rendu de grands services et se sont complétés mutuellement, de même qu'ils ont fourni des résultats concordants et confirmatifs. Avec les matériaux fixés dans leur totalité, nous avons surtout eu recours aux coupes en série après inclusion à la paraffine. Pour éviter les inconvénients auxquels donne lieu la chitine, nous avons souvent dépouillé l'insecte de ses téguments avant de procéder à la fixation ou mieux encore après. Dans ce dernier cas, afin que les fixateurs pussent pénétrer les objets dans leur totalité, des incisions, des déchirures ou des ablations ont été pratiquées dans les téguments. Il a été également fait usage de la méthode de van Rees (**66**, p. 10), qui consiste à faire agir des réactifs chauds (à la température de coagulation des substances albuminoïdes); toutefois, craignant l'action peut-être désavantageuse de l'eau ou de l'alcool trop faible (30 %), nous avons employé exclusivement les liqueurs citées plus haut. Les coupes très minces, collées en séries ininterrompues sur porte-objet, ont été colorées à la safranine seule ou à la safranine et au violet de gentiane, ou bien à l'hématoxyline, selon que la fixation s'était faite par les liqueurs osmiques ou par le bichlorure.

I. — Insectes a métamorphoses complètes (Holométaboles).

A. — *Historique.*

Les métamorphoses des Insectes ont fait l'objet d'un grand nombre de recherches scientifiques et la question de la phagocytose a été agitée à ce sujet pour la première fois par le créateur de la théorie (**46**). Weismann, déjà en 1864 (**70**), étudiant le développement postembryonnaire de *Musca*

vomitoria et de *Sarcophaga carnaria,* avait attiré l'attention sur les phénomènes de dégénérescence qui se passent dans le corps de la chrysalide et introduisit dans le langage scientifique le terme « histolyse », qui a conservé sa signification depuis lors. D'après le professeur de Fribourg-en-Brisgau, les tissus de la larve se dissolvent par dégénérescence graisseuse et le contenu des cellules se transforme en petits fragments. La masse résultant de cette destruction se mêle au sang dont les corpuscules aussi ont dégénéré et il se forme ainsi une bouillie (*Brei*); des fragments de ce « Brei » s'isolent, s'entourent d'une membrane, deviennent granuleux, perdent leurs granulations graisseuses et acquièrent un noyau. Ces sortes de conglomérats de détritus, auxquels Weismann attribue la valeur de cellules nées par une espèce de formation cellulaire libre, reçurent le nom de *globes granuleux,* « Körnchenkugeln »; à son avis, ils fournissent, en s'accumulant, les matériaux pour l'édification des tissus et organes nouveaux, c'est-à-dire qu'ils se *transforment* en muscles, trachées, etc.

L'étude du développement embryonnaire des *Muscides,* ainsi introduite par Weismann, fut reprise en 1877 par Ganin (**20**) chez *Anthomyia, Formica, Myrmica, Chrysomela, Lithocolletis, Tenebrio* et *Musca vomitoria.* Ainsi que le dit van Rees, les méthodes, considérablement perfectionnées depuis Weismann, ont permis à Ganin de rectifier quelques-unes des erreurs commises par son prédécesseur et de compléter partiellement ses recherches. C'est ainsi que son travail a contribué, dans une large mesure, à faire connaître l'existence et la composition des disques imaginaux ainsi que l'origine mésodermique des muscles thoraciques. D'après ce travail, très remarquable, les produits de dégénérescence de la larve n'interviennent dans la formation des organes nouveaux qu'à titre de substance nutritive. Presque à la même époque, Künckel d'Herculais fit ses intéressantes recherches sur l'organisation et le développement des *Volucelles :* ses résultats concernant les organes imaginaux (**36**, p. 142) sont quasi les mêmes que ceux du précédent.

Viallannes (**67**) revient quelque peu, en 1882, vers les idées de Weismann, qui fait descendre les muscles thoraciques des globes granuleux. Son opinion au sujet de la destruction du corps adipeux est toute person-

nelle : nous essaierons de résumer ici les conclusions de son travail très étendu. Il attribue cette destruction au fait que dans le protoplasme des cellules adipeuses se forment des granules qui grossissent et sont mis en liberté après la rupture de la membrane d'enveloppe. Les granules apparaissent d'une manière simultanée et sans que le noyau de la cellule adipeuse semble y prendre aucune part. Les granules produits par les cellules adipeuses sont constitués chacun par une sphère colorable au carmin, ressemblant à un noyau environné d'une aire de substance non colorable, limitée en dehors par un contour net et ressemblant à un protoplasme. Il paraît probable que chaque granule est un organite, une cellule, fille de la cellule adipeuse au sein de laquelle elle est née. On ne peut guère, en effet, ajoute l'auteur français, distinguer nettement les granules d'avec les cellules embryonnaires qui constituent les premières ébauches des muscles du vol de l'insecte parfait. Il lui paraît moins probable que ce soient des corps inanimés, simples produits élaborés par le travail nutritif de la cellule adipeuse. Contrairement aux idées de Weismann et de Ganin, il admet que les cellules épithéliales des trachées et des glandes salivaires, au lieu de mourir et de disparaître comme telles au moment de la transformation, acquièrent, par contre, un surcroît d'activité et prolifèrent dès le début de la vie nymphale : elles augmentent de volume, leur noyau, qui s'est également accru, est rejeté à la périphérie. En des points du protoplasme éloignés du noyau apparaissent des cellules-filles, nées par formation libre, qui augmentent en nombre et l'envahissent tout entier : celles-ci sont en tous points semblables aux granules des cellules adipeuses et constituent des cellules embryonnaires qui seront mises en liberté dans la cavité générale après la sortie du noyau de la cellule mère. Les « Körnchenkugeln » de Weismann sont, d'après Viallannes, de deux espèces : *a*) les petites, renfermant peu de noyaux, et *b*) les grandes, en possédant beaucoup. Les premières seraient dues à la formation d'une purée graisseuse provenant d'une dissolution des éléments morts et se prenant en boulettes à l'intérieur desquelles des noyaux auraient pris naissance par génération spontanée. Les grandes seraient des cellules adipeuses hypertrophiées renfermant des granules spéciaux (des cellules embryonnaires).

Nous aurons à revenir plus loin sur le travail très important du naturaliste français, car nous ne pouvons en rien partager la manière de voir résumée ci-dessus ; il en sera de même pour ce qui regarde son *évolution régressive* et son *évolution par dégénérescence* du tissu musculaire. Il est vraiment étonnant qu'après avoir produit des dessins comme ceux qui accompagnent son travail, VIALLANNES en soit arrivé à des déductions aussi erronées et qui, certes, ne sont pas toujours concordantes entre elles, ainsi qu'il résulte de ce qui précède.

A peu près à la même époque parurent les travaux très importants et très complets de KOWALEWSKY (**31** et **32**) et de VAN REES (**63-66**) sur les développements de la mouche ; nous les résumerons rapidement.

Le premier auteur se propose d'étudier :

1° Le mode de transformation des organes et des tissus de la chrysalide en globes granuleux ;

2° La destinée de ceux-ci ;

3° La formation et l'évolution des organes et tissus nouveaux.

Dès les premières heures déjà après le début du stade nouveau, les leucocytes pénètrent dans la substance musculaire, y émettent des pseudopodes, déchirent le muscle en tous sens, frayant ainsi la voie à d'autres : ils incorporent des fragments musculaires de tout volume et de toute forme. Ainsi chargés, ils rentrent dans la circulation et méritent maintenant le nom de « Körnchenkugeln » (WEISMANN). Les noyaux musculaires résistent plus longtemps : on peut les rencontrer isolés dans les amas de fragments musculaires et de globes granuleux, mais ils finissent par être avalés à leur tour par les leucocytes. Les fragments musculaires ainsi enlevés et emportés sont digérés par le protoplasme leucocytaire et subissent la transformation graisseuse. Après deux jours déjà, presque tous les leucocytes sont transformés en globes granuleux, mais n'en continuent pas moins à incorporer des débris musculaires comme quand ils étaient vides. Après les muscles des quatre premiers segments, c'est le tour du corps adipeux d'être entamé par les leucocytes. L'auteur russe a constaté *de visu* ce phénomène sur des chrysalides du troisième ou quatrième jour enlevées de leur cocon : la vésicule céphalique (*Kopfblase*) est transparente et il a vu les « Körn-

chenkugeln » rampant à la surface des cellules adipeuses, d'autres venant encore s'y associer; le tout prit l'aspect d'une *morula*. Pendant l'observation, qui dura vingt-quatre heures dans de bonnes conditions physiologiques (blanc d'œuf), KOWALEWSKY vit diminuer la proéminence des « Körnchenkugeln », fixés à la surface, et il attribue ce fait à leur pénétration dans la cellule adipeuse; celle-ci disparaît alors à la vue et on trouve à sa place des globes granuleux qui se dispersent bientôt après. Nous aurons également à revenir dans le cours de notre travail sur les conclusions de KOWALEWSKY. Ses critiques du travail de VIALLANNES au sujet de la dégénérescence des glandes salivaires nous paraissent absolument fondées : il attribue le phénomène à une intervention *active* des phagocytes. Comme nous ne nous sommes guère occupé des transformations dont les trachées, le tube digestif, les tubes de Malpighi, etc., sont le siège, nous ne rapporterons pas les opinions émises à ce sujet par KOWALEWSKY. Quant à la destinée des leucocytes chargés de détritus musculaires, rappelons que, d'après cet auteur, ils se portent aux points de néoformation; lentement leurs inclusions diminuent de volume et finissent par disparaître complètement : ils passent après digestion et par diffusion dans le plasma sanguin environnant et de là dans les tissus en accroissement. De cette façon, les « Körnchenkugeln » retournent à leur état primitif, ils redeviennent des leucocytes : KOWALEWSKY rejette absolument l'idée de WEISMANN et de VIALLANNES d'après laquelle ils donneraient naissance aux éléments musculaires.

Les conclusions de VAN REES sont en grande partie semblables à celles de KOWALEWSKY : ainsi, il attribue un rôle *actif* aux leucocytes dans la destruction des muscles larvaires, mais il n'admet toutefois le début du phénomène qu'à partir du troisième jour. Contrairement à l'opinion émise dans son premier travail, l'auteur considère la pénétration des leucocytes dans les muscles et la destruction subséquente de ceux-ci comme dues au fait qu'il s'agit d'éléments à activité physiologique terminée.

VAN REES est également d'avis que le noyau musculaire finit par tomber victime des leucocytes, mais quoiqu'il ne puisse en fournir la preuve, il persiste à croire que quelques-uns peuvent dégénérer spontanément. Ses opinions concernant la destruction du corps adipeux s'éloignent quelque

peu de celles de Kowalewsky. Tout en admettant que des leucocytes y pénètrent, il ne croit pas que tel soit le rôle dévolu à ceux déjà chargés de détritus tissulaires : les leucocytes y pénétrés augmenteraient de volume, se diviseraient et les cellules filles en sortiraient pour entrer dans la circulation générale, c'est-à-dire que, de l'avis du professeur d'Amsterdam, les cellules graisseuses joueraient, en partie du moins, le rôle d'organes lymphoïdes. Les résultats de van Rees ne concordent pas avec ceux de Kowalewsky, en ce qui concerne la destruction des glandes salivaires (**66**, pp. 74 et 75) : jamais, en effet, il n'a pu voir que des leucocytes y pénètrent. Nous n'insisterons pas plus longuement ici sur ce point, car nous serons obligé d'y revenir à propos de nos propres conclusions.

Dans un travail publié en 1892 (**26**), Korotneff traite également de la dégénérescence musculaire des Insectes. Ses recherches ont porté sur les stades de développement de la teigne. Il n'admet pas l'intervention des leucocytes : les organes affaiblis disparaîtraient par une sorte de dissolution lente; il croit, au contraire, à un rôle dévolu aux leucocytes chez *Musca vomitoria,* car ici le phénomène, de beaucoup plus énergique, nécessite un transport très rapide des détritus tissulaires vers les organes qui les utiliseront. Il compare plus ou moins ces deux modes à ce qui se passe dans les processus pathologiques aigus et chroniques : dans le premier cas, les leucocytes empêchent la formation ou le développement ultérieur d'un processus nécrotique; dans le second, la résorption peut se faire par voie chimique.

B. — *Dégénérescence et destruction musculaires.*

Cette question a été étudiée d'une façon spéciale par un très grand nombre d'anatomistes. Van Rees et Kowalewsky l'ont travaillée tout particulièrement chez *Musca vomitoria.* Nous avons vu que Weismann avait admis que les muscles comme les autres tissus périssent par dégénérescence graisseuse donnant lieu à des « Körnchenkugeln ». Viallannes parle d'une *évolution régressive* et d'une *évolution par dégénérescence.* Dans la première, les noyaux musculaires deviennent sphériques et, s'enveloppant de protoplasma, donnent lieu à des cellules musculaires; celles-ci prolifèrent et produisent des

granules roses qui, à leur tour, se multiplient activement. La masse contractile disparaît comme si elle servait de nourriture aux nouveaux éléments; enfin, quand elle est épuisée, le faisceau consiste en un amas de granules qui se répandent dans la cavité générale. Il combat les conclusions de Ganin (19 et 20) d'après lesquelles ces *granules* seraient des fragments inanimés de substances contractiles. Quant à l'*évolution par dégénérescence,* elle débuterait par la disparition des nucléoles, suivie bientôt de la dissolution de la substance contractile se propageant de la périphérie vers le centre.

Van Rees et Kowalewsky reconnaissent un rôle destructeur *actif* aux phagocytes et combattent toute idée qui admet un début de dégénérescence avant l'arrivée de ceux-ci. S. Mayer, de Prague, dans son travail de 1886 (44), a créé le terme *sarcolyte,* qu'il oppose à *sarcoplaste,* nom donné au même objet par Margo (40, 41 et 42) et Paneth (54 et 55); il désigne par là les fragments des faisceaux musculaires désagrégés indépendamment d'une action phagocytaire : le sarcoplasma, d'après cet auteur, se segmente en tronçons nucléés et en tronçons dépourvus de noyaux; les phagocytes surviennent alors et les incorporent; il les regarde donc, non comme des stades initiaux de néoformation musculaire (Margo et Paneth), mais comme les produits d'une régression déjà très avancée. Il revient encore longuement sur ces considérations qu'il défend dans un second mémoire publié quelques mois plus tard (45). Quelque temps après parurent les travaux de Looss (38 et 39). Ici, même conclusion : le muscle dégénère par lui-même, les leucocytes n'y interviennent pour rien. Ceux-ci sont « *eine Art Reserve-* » *macht die erst dann überwiegend in Thätigkeit tritt, wenn der Organis-* » *mus, sei es zur Erreichung gewisser aussergewöhnlichen Leistungen, sei* » *es zur Bekämpfung besonders schwieriger Verhältnisse mit seinen gewöhn-* » *lichen Hülfsmitteln nicht mehr auskommt* ». Les recherches de Barfurth (4) ont porté sur la résorption de la queue des têtards de grenouille. Il arrive au même résultat que les deux auteurs précédents quant au rôle *secondaire* des leucocytes (phagocytes) et interprète les sarcolytes comme des produits de coagulation qui se liquéfient plus tard, tout le phénomène constituant une dégénérescence physiologique (niée par Bremer [15]).

Les métamorphoses de la mouche, dit Kowalewsky, sont un sujet

très approprié pour la démonstration de l'intervention *active* des phagocytes. Déjà cinq ou six heures après le début de la phase nymphale, les leucocytes entament les muscles du premier segment du corps, alors que ceux-ci ne présentent aucun indice de dégénérescence : noyau, sarcoplasma, striation, tout est encore absolument normal au point de vue morphologique; il en est autrement au point de vue physiologique, car les éléments contractiles sont entrés dans une période d'inactivité, d'affaiblissement par suite, et offrent un terrain propice à l'activité résorbante des leucocytes vigoureux. Le phénomène marche avec une rapidité telle, selon l'auteur, que de la septième à la huitième heure, tous les muscles du premier segment sont déjà détruits. D'après VAN REES, l'intervention des phagocytes ne se produit pas chez *Musca vomitoria* avant le commencement du troisième jour : les deux premiers jours, les muscles restent normaux, possédant deux à quatre noyaux logés dans une mince couche de protoplasma entre le sarcolemme et la substance contractile; le troisième jour, les noyaux, tout en conservant leur situation normale, sont devenus plus ovalaires. Ce jour-là déjà, des leucocytes se trouvent dans la couche musculaire externe et, aux quatrième et cinquième jours, des muscles entiers sont gorgés de leucocytes; leur substance, sillonnée par eux dans tous les sens, est réduite en fragments irréguliers, encore striés, qui se dispersent ensuite dans la cavité du corps; d'autres sont renfermés en partie ou en totalité dans les leucocytes qui peuvent en incorporer plusieurs et qui, à cet effet, émettent des prolongements amiboïdes allant embrasser les sarcolytes. Cette manière de voir est donc conforme aux résultats obtenus en 1883 par METCHNIKOFF (48) chez le *Bombinator :* destruction initiale des muscles par les phagocytes. Elle est néanmoins contraire aux idées reçues : il est admis généralement que les phagocytes ne s'attaquent pas aux cellules saines et vigoureuses et METCHNIKOFF (52) lui-même, pour expliquer le phénomène, a émis l'hypothèse que les cellules saines sécrètent peut-être une substance qui éloigne les phagocytes.

A notre tour, nous nous sommes occupé de la destruction des muscles larvaires de la mouche; des chrysalides fixées de diverses manières ont été

utilisées dans cette intention pendant les mois de juin et de juillet des deux dernières années. Nous sommes d'avis, avec les deux précédents auteurs, que les leucocytes peuvent jouer un rôle *actif* dans l'englobement des fragments musculaires : nous avons observé les stades de ce phénomène dans la partie céphalique de quelques-unes de nos chrysalides et, quant à l'époque d'apparition de la phagocytose, nous partageons la manière de voir de KOWALEWSKY. Dans nos préparations, provenant de nymphes d'un à deux jours, des muscles entiers sont réduits en une purée de fragments anguleux, de dimensions variables et ayant conservé plus ou moins leur striation; presque tous sont renfermés, isolés ou associés, dans des leucocytes, tandis que de nombreux exemples de ces derniers encore à vide se rencontrent entre les débris musculaires. La désorganisation des éléments contractiles se manifeste également par le fait que les muscles, à certains niveaux, ont perdu leur continuité et se trouvent transformés en groupes de faisceaux fibrillaires largement écartés les uns des autres. Les noyaux de bâtonoïdes sont devenus ovalaires (VAN REES), ayant perdu leur structure réticulée caractéristique et ne formant plus qu'un amas informe chromatolytique, le plus souvent entouré d'une membrane. Sous ce rapport, nous sommes donc de l'avis de KOWALEWSKY et les images observées par nous sont absolument conformes à celles reproduites dans la planche 26 (fig. 8 et 9) de cet auteur. Les leucocytes encore à vide se présentent sous la forme de petits protoblastes se mouvant de façon amiboïde, enfonçant leurs fins pseudopodes à travers le sarcolemme jusque dans la substance musculaire. Dans ces mouvements de reptation, ils rencontrent des amas sarcolytiques auxquels ils s'arrêtent, puis finissent par les incorporer dans leur protoplasma et s'éloignent plus tard pour rentrer dans la cavité générale du corps.

Nous doutons fort que l'ensemble de ce phénomène de destruction musculaire soit exclusivement l'œuvre des phagocytes, et les auteurs qui admettent pour les muscles dont il s'agit un arrêt dans l'activité et, par suite, un affaiblissement, reconnaissent implicitement que ce tissu est, par le fait même, le siège d'une altération morphologique préalable à toute intervention de phagocytes. Depuis les travaux de VAN REES et de KOWALEWSKY ont paru deux autres mémoires (**6** et **7**) sur le même sujet.

E. Bataillon, dans une des séances de la Société de biologie, a soutenu d'une façon générale le bien fondé de l'opinion de S. Mayer, défendue, ainsi que nous venons de le voir tantôt, par Barfurth et Looss; il admet donc que les muscles destinés à disparaître par phagocytose dans la queue du têtard, présentent des indices indéniables de destruction, avant l'apparition des phagocytes. Ceux-ci semblent attirés vers ce lieu de dégénérescence et, de plus, beaucoup de sarcolytes se détruisant sans être incorporés dans les phagocytes, la phagocytose ne jouerait ici qu'un rôle *accessoire*. Looss surtout est catégorique et considère l'intervention des phagocytes comme exceptionnelle : d'après ses calculs, il y aurait 90 à 96 % de sarcolytes libres, 4 à 6 % seraient englobés dans un rebord plasmatique, 3 % enfin pourraient se rencontrer dans un amas plasmatique muni d'un noyau. Dans son deuxième travail, il reconnaît que des leucocytes parfois nombreux peuvent avoir absorbé des fragments musculaires, mais leur nombre serait toujours de beaucoup inférieur à celui des sarcolytes libres. Metchnikoff (51) a repris la thèse et, avec toute l'autorité qu'on doit lui reconnaître dans la matière, a soutenu dans la séance suivante, en réponse à Bataillon, que dans le muscle il ne se produit ni disparition de noyaux, ni désintégration spontanée de faisceaux musculaires, ni infiltration des muscles par les leucocytes. L'atrophie des muscles de la queue du têtard est produite par des phagocytes musculaires dérivés des noyaux musculaires et du sarcoplasma granuleux. Les noyaux musculaires persistent entourés de sarcoplasma qui désagrège et englobe les fibrilles ou leurs débris, les sarcolytes. Le faisceau musculaire est donc dissocié et absorbé par un des éléments qui le constituent, sans un concours quelconque de la part des leucocytes. « Ni la dislocation des fibrilles, ni la formation des » tronçons myoplasmatiques ou sarcolytes ne se produisent jamais spon- » tanément sans le concours actif des phagocytes musculaires. » La querelle n'était point vidée et les deux naturalistes ont encore publié plusieurs notes de polémique. On pourrait dire que l'opinion de Schaffer (58 et 59), dont les recherches ont porté tout particulièrement sur la destruction de fibres musculaires de l'homme, est en quelque sorte moyenne entre celle de Looss et celle de Bataillon. L'auteur viennois admet que les sarcolytes

provenant des fibres musculaires creuses (embryonnaires) sont dissous ou digérés exclusivement par la « Leibesflüssigkeit », sans que les phagocytes y interviennent en quoi que ce soit (Looss). Dans le cas, au contraire, de fragments sarcolytiques provenant de fibres adultes (« fertig entwickelter Fasern »), un rôle important est dévolu aux leucocytes dans l'enlèvement (Bataillon).

Les recherches de Metchnikoff et de Bataillon ont porté sur la dégénérescence des muscles de la queue larvaire des Anoures; néanmoins nos résultats recueillis chez *Musca vomitoria* concordent en certains points avec les leurs.

Dans nos coupes de chrysalides fixées le cinquième jour au sublimé, nous avons pu étudier le phénomène de la dégénérescence musculaire dans tous ses détails et nous croyons être arrivé à des résultats nouveaux. Ainsi que le montre la figure n° 1 de la planche I, le muscle d'un segment abdominal se trouve réduit en faisceaux isolés dans lesquels la striation est encore parfaitement reconnaissable. Les trois noyaux sont hypertrophiés : deux d'entre eux ont encore conservé leur situation normale, l'autre se trouve au contraire quelque peu écarté, mais tous sont logés dans un protoplasma finement granuleux, formant ainsi dans son ensemble le *sarcoplasma*. A l'extrémité supérieure, on reconnaît très nettement des fragments colorés en rosé et situés dans les excavations du muscle. Des éléments identiques se rencontrent à la gauche du muscle en nombre assez considérable et parmi eux s'en trouvent de beaucoup plus petits et faiblement colorés en violet pâle. On distingue manifestement une transition des uns et des autres aux sarcolytes encore striés, groupés en haut à gauche et flanqués de quatre noyaux musculaires hypertrophiés; le petit élément nucléé de gauche en impose pour avoir une même origine. Nulle part ici n'apparaît un phagocyte (leucocyte); la destruction musculaire est manifeste; *elle se fait donc sans l'intervention de ceux-ci et avant leur arrivée,* contrairement au texte de Kowalewsky : « Spaltung der Muskelsubstanz in solche Stücke, die » man mit Sarkoplasten oder Sarkolyten vergleichen konnte, habe ich ohne » Phagocyteneinwirkung nicht gesehen. »

Dans le but de ne pas trop multiplier les figures, il n'a été reproduit par

le dessin qu'un seul cas, mais le nombre de ceux que nous avons rencontrés est incalculable. Aussi, sans crainte de nous tromper, pouvons-nous avancer que la destruction musculaire chez *Musca vomitoria* n'est point l'œuvre exclusive des phagocytes, mais peut trouver sa *cause initiale* dans le muscle lui-même. Celui-ci, entré dans une phase d'inactivité, se nourrit beaucoup moins et s'affaiblit, il tombe en fragments qui sont le siège d'une altération chimique : celle-ci se manifeste par des modifications dans la coloration par les réactifs et par des changements de structure intime. Ainsi, dans les préparations traitées au sublimé, le muscle sain se colore en bleu par l'hématoxyline, son noyau en bleu foncé, tandis que le nucléole prend la teinte rosée de l'éosine. Dès que le muscle devient en proie à la dégénérescence, la teinte de l'hématoxyline faiblit en même temps que la striation tend à disparaître; le bleu fait insensiblement place à une coloration rosée sale et, avec les progrès de la dégénérescence, les fragments se colorent de plus en plus en rose franc. Il suffit de jeter un coup d'œil sur la figure n° 1, planche I, pour se convaincre de la marche du phénomène.

Le début de la dégénérescence musculaire serait caractérisé, d'après S. Mayer (45), par un écartement de colonnettes musculaires : ces colonnettes se rompent après (sarcolytes) et, perdant leur striation, se transforment en éléments homogènes. On dirait que cet anatomiste doit avoir eu sous les yeux des images identiques à celles que nous venons de décrire. Schaffer (59) aussi a vu l'écartement des colonnettes musculaires, mais il n'a plus reconnu leur structure striée : elles montraient, au contraire, dans ses préparations, des nœuds de condensation, « Verdichtungsknoten », produits par une contraction physiologique, entre lesquels se faisait la cassure. Il nous paraît probable qu'il s'agit, dans les deux cas rappelés ici et dans le nôtre, d'un même phénomène présentant des degrés différents : écartement de colonnettes musculaires déjà en régression et disparition plus ou moins rapide de la structure normale conduisant à la formation de sarcolytes typiques. On pourrait en dire tout autant des résultats obtenus par Looss (39) : cet auteur a d'abord vu les fibrilles se dissocier, par suite probablement, dit-il, de la dissolution du ciment unissant; plus tard, elles s'accolent et subissent des modifications chimiques qui se manifestent par une augmentation de colorabilité.

Nous disions tantôt que dans le cas représenté par la figure n° 1, planche I, aucun leucocyte ne se rencontre sur le territoire nécrotique; nous répétons qu'il ne peut dès lors être question d'attribuer la cause *primordiale* aux leucocytes et qu'il faut naturellement admettre que celle-ci réside dans le muscle même. Il n'en est cependant pas toujours ainsi; il arrive bien des fois qu'entre les fragments résultant de la désagrégation, on rencontre des leucocytes à vide et d'autres déjà gorgés de débris musculaires. Ceci n'ébranle en rien l'opinion que nous venons d'émettre, car il ne pourrait être question d'arguer de ce fait que les phagocytes déterminent dans le muscle les phénomènes initiaux de sa destruction. Les deux idées étant exclusives l'une de l'autre, nous nous prononçons franchement en faveur de la première.

Il nous paraît donc nécessaire d'admettre que le muscle destiné à dégénérer porte en lui-même la cause de sa destruction, et celle-ci débute par une sorte de désagrégation suivie d'une condensation et d'une fragmentation subséquentes. Les débris ou *sarcolytes* doivent être regardés comme des détritus organiques qui sont naturellement en proie à une altération chimique, laquelle exerce à distance une action chimiotaxique sur les leucocytes dont la sensibilité est extrême. Ceux-ci accourent sur le théâtre de la désorganisation et y exercent leur propriété principale : ils attaquent les fragments sarcolytiques, s'en emparent et les englobent pour les emporter et les digérer, et détruire, par le fait même, leur nocivité. A la place du muscle se retrouve alors une accumulation de conglomérats informes, de leucocytes et de phagocytes, ces derniers constituant les « Körnchenkugeln » de Weismann.

Les idées exposées dans l'alinéa qui précède cadrent donc assez bien avec les conclusions de Bataillon au sujet de la dégénérescence musculaire. Mais nous ne croyons pas toutefois que dans le cas de *Musca vomitoria* l'intervention de la phagocytose soit toujours secondaire, ainsi que l'admet l'auteur français pour les phénomènes de résorption de la queue des têtards. Comme nous venons de le voir, en effet, les leucocytes peuvent, d'une manière très active et très importante, enlever les détritus musculaires de leur lieu d'origine, les digérer et véhiculer le produit de cette digestion

aux endroits où ils pourront être utilisés à nouveau par l'économie animale. Mais il arrive très souvent aussi que l'enlèvement et la « mise en réserve » des débris musculaires se passent d'une tout autre manière et ici nous nous rencontrons avec l'opinion de METCHNIKOFF exposée ci-dessus. Dans le cas que nous venons d'examiner, nous n'avons pas décrit une dégénérescence du noyau suivie de son incorporation dans un phagocyte avec ou sans autres débris musculaires : nous l'avons vu, au contraire, s'hypertrophier avant même qu'une trace de dégénérescence ne se montre et conserver une structure absolument normale. Le sarcoplasma qu'il forme avec le cytoplasma semble s'isoler du reste de la fibre musculaire et former une cellule complète; nous avons eu l'occasion d'étudier cette cellule et de constater qu'elle se conduit, partiellement du moins, comme un phagocyte musculaire décrit par METCHNIKOFF dans la queue larvaire des grenouilles, c'est-à-dire qu'à l'instar d'une cellule amiboïde, elle englobe et incorpore les débris musculaires et se conduit ainsi en véritable phagocyte [1]. Dans le cours de l'examen d'une coupe, on peut rencontrer tous les stades de cet englobement de détritus par le sarcoplasma jusqu'à l'édification d'une cellule complète, telle que les quatre représentées autour d'une trachée en voie de néoformation (fig. 2, pl. I). Ces éléments sont excessivement nombreux et remplissent l'espace compris entre les organes. Chacun possède donc un noyau musculaire caractéristique et parfaitement reconnaissable; autour de lui se trouve groupé du cytoplasma qui se répand d'une façon radiaire et dans toutes les directions jusqu'à la périphérie : les rayons se ramifient et donnent lieu à un entrecroisement général, d'où résulte un réseau dans les mailles duquel se trouvent logés les débris musculaires. Il est aisé de se convaincre du fait que les plus gros fragments sarcolytiques sont groupés autour du noyau et que leurs dimensions vont en diminuant vers la périphérie. La coloration du contenu de ces grandes cellules mérite aussi qu'on s'y arrête, car elle jette un jour sur les phénomènes qui se passent dans leur intérieur. Les gros éléments situés vers le centre de la cellule ont conservé leur aspect général et la teinte rosée de l'éosine;

[1] Un phagocyte de ce genre mérite le nom de *sarcoclaste* ou de *myoclaste*.

au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre, la coloration rosée diminue et finit par céder la place à la teinte bleu pâle. Ainsi que nous le verrons dans la suite, il se fait une transformation, une sorte de digestion intracellulaire qui conduit à l'achèvement de la destruction des sarcolytes.

L'étude comparative des préparations obtenues après fixation par le sublimé, par la liqueur de Flemming et par celle de Hermann, nous a donné confirmation pleine et entière de l'interprétation que nous avions assignée aux figures obtenues après le sublimé seul. Les muscles, en effet, nous ont fourni constamment la preuve d'une destruction ayant sa cause dans l'élément contractile même, c'est-à-dire que, perdant sa structure, il devient homogène et tombe en sarcolytes dont les leucocytes peuvent ou non englober et emporter au loin les produits. De même, nous avons pu nous convaincre de la résistance qu'offrent les noyaux musculaires hypertrophiés à la cause qui amène la destruction générale de leurs tissus, tandis que d'autres fois, se détruisant par chromatolyse, ils finissent par tomber victimes de la voracité des phagocytes. Dans le premier cas, le cytoplasma forme autour du noyau un corps cellulaire qui, d'abord très réduit et très peu reconnaissable, acquiert bientôt une importance plus considérable, soulève et déchire le sarcolemme, et il n'est pas rare de constater plus tard, autour de lui, un groupement de sarcolytes. Quand, par suite de la disparition du sarcolemme qui succède à sa dilacération, l'élément devient libre, il englobe des fragments sarcolytiques encore épars; ceux-ci, l'osmium des liqueurs fixatrices le révèle, sont bientôt le siège d'une dégénérescence partielle ou totale : les plus petits les premiers tombent victimes de cette transformation et l'on peut s'en rendre compte très facilement, car, dans ce cas, ils déterminent un réseau de granulations graisseuses embrassant les plus grands dans ses mailles (fig. 3 et 4, pl. I). Le sarcoplasma groupe les sarcolytes autour de lui, surtout aux niveaux où la dégénérescence graisseuse est le plus accentuée; il émet des prolongements qui vont au-devant des sarcolytes et les entourent pour les incorporer, et il se forme, sous ce rapport, des amas à aspect amiboïde des plus caractéristiques. Ils embrassent, dans les excavations limitées par leurs prolongements, des groupes de sarcolytes et parfois, mais rarement, des phagocytes chargés de détritus mus-

culaires qui, dans leur intérieur, subissent déjà les transformations. Comme nous le disions plus haut à propos de nos préparations au bichlorure, ces éléments se conduisent en véritables phagocytes englobant et, ainsi que nous le verrons tout à l'heure, digérant dans leur intérieur les produits de la destruction musculaire. L'ensemble prend bientôt une forme presque arrondie et nous ne pourrions mieux rendre notre idée qu'en disant qu'une attraction semble s'exercer avec une même intensité et dans tous les sens sur les produits sarcolytiques englobés, de façon à les grouper en masses arrondies autour du noyau. Notre opinion se rapproche donc assez bien de celle de METCHNIKOFF, en ce sens que chez *Musca vomitoria,* comme lui chez les larves d'Anoures, nous attribuons au sarcoplasme et au noyau musculaire une propriété phagocytaire s'exerçant vis-à-vis des produits dégénératifs du muscle [1].

Les lignes suivantes, extraites du grand travail de VAN REES (**66**), nous donnent la conviction que l'auteur hollandais a vu débuter le phénomène dont nous venons de donner la description détaillée : « Eigenthümlich » erschien es mir nur, dass man in dem Stadium unmittelbar vor dem » Angriff der Leucocyten auf die nicht mehr functionirenden Muskeln oft » die Kerne sämmtlich mit dem Protoplasma abgehoben sieht, namentlich » auf Längschnitten manchmal höchst charakteristisch, als wollten diese » Muskelkörperchen, mit Rücksicht auf eine spätere Rolle, von der bedrohten » Muskelmasse wegfliehen, um so der allgemeinen Vernichtung zu entgehen. » Gewiss verlassen in dem Zeitpunkt auch schon viele Kerne die Muskeln, » aber nicht alle, wie wir oben sahen. Eine spätere Verwendung der » frühzeitig frei gewordenen Muskelkörperchen habe ich indessen nicht » nachweisen können. » Nous pourrions même ajouter que VAN REES a eu le pressentiment de la destinée des « corpuscules musculaires » devenus

[1] Dans son deuxième travail, S. MAYER (**44**) décrit la transformation du contenu du sarcolemme en *cellules amiboïdes :* il reconnaît tout au moins ce caractère aux produits de la fragmentation musculaire pour autant qu'ils possèdent un noyau. Ne s'agirait-il pas de *sarcoclastes* (myoclastes) dont les méthodes techniques en usage à cette époque n'ont pas permis à l'auteur de reconnaître la structure et la destinée.

libres, et l'on doit regretter qu'il n'ait pu réussir à poursuivre la solution du problème.

Les sarcolytes, une fois renfermés dans ces grandes cellules, y subissent la continuation de la transformation graisseuse : celle-ci est surtout accentuée vers la périphérie où les éléments sont plus petits. Ici, comme dans le cas décrit plus haut (préparations au sublimé), nous constatons que les inclusions vont en diminuant de dimension du centre vers la périphérie (digestion intracellulaire) et les réactifs révèlent encore une fois une modification dans la composition des sarcolytes.

De même que les coupes obtenues après fixation par le sublimé, celles fournies par les méthodes de Flemming et de Hermann ont permis de constater que les phagocytes proprement dits enlèvent un grand nombre de produits de la sarcolyse. Dans leur intérieur se fait subséquemment une digestion qui se manifeste par la disparition des formes anguleuses, une fragmentation plus avancée et l'apparition de granulations graisseuses. En dehors de celles-ci, nous reconnaissons également de petites masses arrondies, le plus souvent d'une teinte jaune bleuâtre homogène et parsemées de granulations variables qui fixent les matières colorantes. On rencontre les mêmes éléments avec le même aspect dans les grands phagocytes sarcoplasmatiques; il en résulte que dans les deux se passent des phénomènes identiques et que les deux sortes de phagocytes jouent le même rôle physiologique.

Nous avons entrepris l'étude du développement embryonnaire chez le Ver à soie (*Bombyx mori*). Sur une larve qui venait d'achever son cocon et qui se remuait encore vivement à l'ouverture de celui-ci, nous avons percé les téguments, sur toute leur étendue, de quatre coups de rasoir et l'animal fut plongé immédiatement dans la liqueur de Hermann; il y séjourna pendant cinq jours et, dans le cours des manipulations ultérieures, il était facile de s'assurer que le fixateur avait pénétré partout. Nous croyons cette méthode préférable à celle de Kowalewsky et de van Rees : le premier se servait d'eau chaude et le second de réactifs chauds qui coagulent les tissus et permettent de couper et de fixer ultérieurement. Les coupes obtenues par nous en séries ininterrompues ont réussi à souhait; la coloration aussi

nous a fourni d'excellents résultats. Dans le cas dont il s'agit, on peut dire que le stade nymphal ne faisait que débuter et déjà un grand nombre de muscles étaient en grande partie détruits. La cavité du corps renfermait un nombre considérable de leucocytes encore normaux : ils avaient presque tous la forme sphérique ou légèrement amiboïde ; d'autres renfermaient une ou plusieurs granulations noirâtres (graisse) et le noyau des deux espèces était arrondi et relativement grand. A ce moment, quasi aucun leucocyte ne renfermait des inclusions qui eussent pu en imposer pour des sarcolytes. Beaucoup de muscles montraient une altération morphologique qui se caractérisait par une dissociation des fibrilles ; presque tous les noyaux étaient hypertrophiés et faisaient saillie sur le reste des constituants musculaires : si on les rencontrait sur le bord d'une fibre musculaire, on constatait qu'ils soulevaient le sarcolemme et se trouvaient chacun dans un protoplasma finement granuleux. A certains niveaux, les noyaux de ce genre étaient très nombreux et donnaient à l'élément contractile un aspect festonné. Il n'y a pas lieu de craindre un seul instant de les confondre avec les noyaux des leucocytes, étant donnés leur structure et leur aspect général : c'étaient bien des noyaux musculaires hypertrophiés formant, avec le protoplasma, les *sarcoplasma* de Rollett.

C'était le plus souvent dans le voisinage immédiat de ces sarcoplasma que l'on pouvait se rendre compte du mode de destruction musculaire : la substance contractile, en effet, y subissait une dégénérescence graisseuse et l'ensemble de la partie atteinte par la destruction se groupait autour du noyau, les granulations étant plus ou moins régulièrement répandues dans le sarcoplasma. Chez le Ver à soie donc, de même que chez *Musca vomitoria*, nous constatons que le sarcoplasme acquiert des propriétés phagocytaires et qu'après s'être chargé de résidus sarcolytiques, il se détache et quitte son lieu d'origine pour tomber dans le liquide périviscéral. La seule différence, c'est qu'ici les détritus musculaires ont subi déjà presque tous la dégénération graisseuse, tandis que chez la Mouche ils sont avalés à l'état de sarcolytes qui ne se transforment en graisse que plus tard. Ajoutons encore que ces cellules sarcoplasmatiques n'atteignent pas les dimensions constatées chez la Mouche.

Çà et là des granulations graisseuses isolées, ou quelques-unes réunies, se trouvent répandues dans le voisinage immédiat du muscle en dégénérescence ou entre les cellules sarcoplasmatiques chargées des mêmes produits : des leucocytes pérégrinant et les rencontrant sur leur passage, peuvent les englober.

Ici donc, encore une fois, nous constatons que la destruction musculaire débute avant (et sans) toute atteinte d'un phagocyte; que, par conséquent, elle est d'abord de nature *physiologique*. Nous reconnaissons également que les modifications initiales sont tout à la fois *morphologiques* et *chimiques*.

Sur une chrysalide de sept jours, traitée comme la larve dont il vient d'être question, nous avons pu constater l'existence et vérifier tous les caractères des grandes cellules sarcoplasmatiques, mais leur nombre était relativement moins considérable. Par contre, il ne se trouvait plus guère de leucocytes vides ; presque tous s'étaient transformés en globes granuleux (Körnchenkugeln); leurs inclusions étaient manifestement des sarcolytes dont quelques-uns déjà transformés en graisse, d'autres se laissant colorer à la safranine. Un objet identique fut fixé au sublimé : l'examen des coupes n'a apporté aucune indication nouvelle, les résultats ont été confirmatifs des précédents. Disposant d'un troisième exemplaire du même âge, nous l'avons ouvert et dissocié sous le microscope pour en soumettre des fragments à l'examen à frais ; d'autres furent, au contraire, soumis à l'action des vapeurs d'une solution concentrée d'acide osmique et traités consécutivement au vert de méthyle glycériné. Sur les préparations obtenues à frais, nous avons très bien pu reconnaître les éléments et les modifications décrites jusqu'à présent, c'est-à-dire les leucocytes, peu nombreux, se trouvant répandus entre les muscles en dégénérescence, les « Körnchenkugeln » et les cellules sarcoplasmatiques; les éléments des deux dernières espèces renfermaient quelques granulations très réfringentes (de la graisse, probablement) et d'autres, des sarcolytes. Les muscles, en effet, qui n'avaient pas leur aspect normal, se trouvaient être composés de petits fragments en tous points identiques à ceux rencontrés dans les deux espèces de phagocytes. Par la seconde méthode, nous avons pu distinguer, grâce au vert de méthyle, la forme et l'aspect des noyaux; l'acide osmique, de son côté, avait coloré la graisse.

Nous pouvons donc conclure que chez *Bombyx* comme chez *Musca :* 1° la destruction musculaire trouve sa cause initiale (physiologique) dans les éléments contractiles eux-mêmes : elle se fait reconnaître par une modification morphologique et chimique ; 2° l'enlèvement et la « mise en réserve » des produits de cette destruction se font par les deux espèces de phagocytes sarcoplasmatique et sanguin [1]. Ajoutons encore que, contrairement à ce que nous avons vu chez *Musca,* les produits de la destruction musculaire jouent parfois chez *Bombyx* un rôle *actif* dans la néoformation des organes et tissus.

A première vue, les résultats obtenus par nous chez *Tenebrio molitor* semblent discordants avec ceux que nous venons d'exposer chez *Calliphora* et chez *Bombyx :* il est vrai d'ajouter immédiatement que les phénomènes de la dégénérescence musculaire ne sont pas absolument identiques et que la structure normale des éléments contractiles diffère d'avec ce qui se présente chez les deux autres insectes. De même que pour *Musca,* nous avons traité de diverses façons les chrysalides de *Tenebrio* et les résultats obtenus se complètent ou se confirment mutuellement. La destruction des éléments contractiles s'y manifeste par l'apparition, dans leur intérieur, de granulations toutes de même aspect et se composant d'un amas arrondi clair et homogène, servant de substratum à un ou deux corpuscules en demi-lunes qui, après l'emploi des liqueurs osmiques, deviennent chromatophiles, ou de granulations, colorables ou non, de formes diverses. L'apparition de ces éléments peut être précédée d'une condensation du tissu musculaire dans lequel on ne reconnaît plus trace de striation (ceci rappelle les résultats de Schaffer (59) rapportés plus haut au sujet de la destruction musculaire de *Calliphora*). Les noyaux finissent également par perdre leur forme et leur structure normales et disparaissent à l'œil dans cette bouillie qui remplace maintenant les éléments musculaires. Jamais il ne nous est arrivé de voir des noyaux s'hypertrophiant et présentant une résistance aux causes destructives, et quant au sarcoplasme, nous devons avouer n'en avoir jamais pu reconnaître de trace, tant est serrée et dense la structure des fibres muscu-

[1] Myoclaste et phagocyte proprement dit.

laires. Çà et là on peut constater l'existence de sarcoplastes nucléés ou non, qui, grâce à leur structure homogène et à leurs formes dilacérées et irrégulières, rappellent ceux décrits chez *Musca*. Les leucocytes arrivent en nombre considérable et se mettent en devoir d'incorporer ces débris musculaires; on les rencontre exclusivement entre les fibres dissociées, jamais dans leur intérieur, quand elles sont très minces : il en est autrement dans le cas de fibres plus épaisses. Ils occupent bientôt tout l'espace réservé antérieurement aux muscles pour y rester longtemps encore ou rentrer dans la circulation. Le noyau des phagocytes se reconnaît surtout, au milieu de ces innombrables inclusions, dans les préparations fixées au sublimé et colorées à l'hématoxyline; le protoplasma, au contraire, n'est plus guère reconnaissable, si ce n'est à de rares niveaux, tellement il se trouve réduit à de minces fibrilles formant par leur entrecroisement un réticulum qui loge dans ses mailles les inclusions sarcolytiques. Jamais on ne rencontre dans les phagocytes de gros fragments anguleux et irréguliers comme dans le cas des phagocytes de *Musca vomitoria* et de la chrysalide de *Bombyx* âgée de 7 jours. Les sarcolytes, en effet, se transforment complètement en amas granuleux (comme les fibres musculaires elles-mêmes). Aussi les progrès de la digestion intracellulaire de ces débris musculaires à l'intérieur des phagocytes ne se poursuivent pas aisément : il n'y a point de fragmentation ultérieure (*Musca*), mais uniquement une dégénérescence graisseuse, qui s'annonce par une transformation lente, mais progressive, des enclaves sarcolytiques; celles-ci perdent peu à peu leurs caractères et leur colorabilité. Contrairement à ce que nous avons vu chez la Mouche et surtout chez le Ver à soie (1 jour), cette transformation ne débute pas dans l'élément contractile réduit en bouillie, mais bien assez longtemps après l'incorporation des sarcolytes dans les phagocytes. Ces résidus donnent lieu ici à de grosses sphères graisseuses logées dans des vacuoles qui résultent elles-mêmes de l'union de deux ou plusieurs mailles du réseau protoplasmique (voir fig. 2 à 5, pl. II). Les sphères de graisse sont le produit de la transformation des sarcolytes : par pression mutuelle, elles peuvent se toucher, se fusionner et donner lieu à des boules parfois très volumineuses occupant des vacuoles fusionnées. Un coup d'œil sur les figures en question permettra au lecteur

de se rendre compte des phénomènes que nous venons de décrire. Chez *Tenebrio,* nous n'avons pu constater, *dans aucun cas,* que le sarcoplasma de la fibre musculaire s'isole pour englober les produits de la dégénérescence et, comme nous le disions déjà, toutes nos préparations concordent sous ce rapport.

De même que lors des métamorphoses des deux insectes précédemment examinés, la destruction musculaire débute dans l'élément contractile lui-même et ce n'est qu'après coup qu'intervient la phagocytose : la cavité du corps se trouve alors gorgée de leucocytes qui ont véhiculé loin de leur lieu d'origine les éléments sarcolytiques. Ganin, qui, de son côté, a également étudié la dégénérescence musculaire de *Tenebrio,* n'admet pas que les « Körnchenkugeln » (nos phagocytes) interviennent dans la néoformation musculaire. Nous partageons cette manière de voir et nous aurons à revenir dans un chapitre spécial sur le sort réservé aux phagocytes et à leur contenu.

La larve de la *Phrygane* nous a fourni un exemple de destruction musculaire que nous retrouverons encore chez les Insectes hémimétaboles : les noyaux des muscles intersegmentaires examinés plus spécialement par nous, s'hypertrophient tout en conservant pendant quelque temps encore leur situation en rangées linéaires. Le protoplasme finement granuleux se reconnaît encore parmi les éléments de la substance contractile qui sont le siège d'une transformation morphologique et chimique; les disques intermédiaires résistent le plus longtemps et déterminent, isolés ou accolés plusieurs ensemble, des séparations entre les territoires sarcoplasmatiques. Dans toute l'étendue de ceux-ci apparaissent des boules graisseuses grandes et petites qui finissent par donner à l'ensemble un aspect tout particulier. Ce sont donc aussi des sortes de myoclastes qui, se groupant entre eux de diverses façons, donnent lieu à des complexes adipeux très variables dans leur aspect, mais ayant tous même constitution. Le tissu interstitiel loge ces cellules devenues graisseuses dans les mailles de son réseau et augmente de cette façon l'étendue du corps adipeux déjà existant. Les leucocytes n'interviennent ici en aucune sorte et, comme dans tous les cas précédents,

nous constatons que la destruction musculaire trouve sa cause première dans l'élément contractile lui-même.

Notons qu'il s'agit dans l'espèce d'une larve âgée, non d'une chrysalide, et que l'objet a été traité par les méthodes histologiques les plus délicates. Nous pouvons conclure qu'*à l'état larvaire déjà,* les muscles de la *Phrygane* subissent des modifications régressives; rapprochant ce fait de celui rencontré chez *Bombyx,* à savoir que chez la chrysalide *du premier jour,* les muscles se détruisent par myoclastes, tandis que ceux-ci, à des dates plus reculées, cèdent sous ce rapport la place, partiellement tout au moins, aux cellules sanguines, nous pouvons en déduire que c'est surtout vers la fin de l'état larvaire et dans les premiers temps de la phase nymphale que se fait la destruction musculaire par le mode décrit avec quelque détail dans les pages précédentes (myoclastes) et qui se rapproche du genre de phagocytose signalé par Metchnikoff chez le têtard de grenouille.

La structure du *myoclaste,* une fois complètement formé, ressemble beaucoup à celle de l'élément correspondant de *Musca* et de *Bombyx :* tout autour du noyau se retrouve le protoplasma sarcoplasmatique s'irradiant jusqu'à la surface et logeant dans ses mailles des boules graisseuses et autres produits sarcolytiques sous la forme de granulations chromatophiles ou non.

Signalons encore une simple particularité : les myoclastes de *Bombyx* et de *Musca* restent isolés ou peuvent se grouper en chaînons sans que le tissu conjonctif interstitiel les loge dans ses mailles, contrairement à ce que nous venons de constater pour la larve de *Phryganea.*

C. — *Destruction des glandes salivaires.*

Ganin (**19**, p. 60) a dit à propos des glandes salivaires de la larve, que leurs cellules subissent la dégénérescence graisseuse et font place à des cellules nouvellement formées, sans qu'il ait pu établir le rapport entre les deux phénomènes. Viallannes (**67**, p. 167) a étudié avec plus de soin le processus de la destruction des glandes salivaires, mais de même que pour les muscles, malgré les dessins les plus exacts (pl. X, fig. 1 à 4), reproduisant probablement des préparations de premier ordre, il est arrivé à des

conclusions totalement fausses. Ainsi, il croit à une endogenèse cellulaire dans les organes en question ; le nombre des éléments nouveaux augmente sans cesse dans les cellules glandulaires qu'ils quittent ensuite pour se répandre dans la cavité du corps.

Kowalewsky (32) a trouvé dans la destruction des glandes salivaires un objet très propice pour l'étude de la digestion intracellulaire. Il a tué, par l'eau chaude, les chrysalides sur lesquelles il a pris ses matériaux et il a employé comme réactif colorant le picrocarmin additionné de carmin boracique. Il dit (p. 580) que c'est un véritable hasard de pouvoir observer ou constater la destruction des glandes salivaires par les leucocytes, parce que ce phénomène se passe en quelques heures de temps, dix à vingt-quatre heures et parfois moins encore. Nous constatons qu'il en est ainsi et ne pouvons nous expliquer autrement comment, sur plusieurs séries de coupes, il nous a été impossible de reconnaître la disparition de ces organes sécrétoires. D'après Kowalewsky, dans les glandes salivaires que les phagocytes commencent à attaquer, les noyaux sont encore parfaitement normaux, c'est-à-dire, dit-il, qu'ils sont constitués de granulations normalement situées à la périphérie : dans nos préparations, on peut facilement se convaincre que les soi-disant granulations nucléaires sont uniquement les éléments du boyau nucléinien décrit par Balbiani (pl. II, fig. 1). L'auteur russe reconnaît encore, plus tard, ces granulations dans les noyaux des cellules attaquées et partiellement détruites par les phagocytes : elles se groupent en un amas central situé dans une zone claire, et c'est à cet état qu'ils sont avalés par le phagocyte. Kowalewsky décrit avec beaucoup de détails les quatre figures (49 à 52, pl. IV) sur lesquelles il représente la destruction par phagocytose des glandes salivaires et il admet que les cellules migratrices qui arrivent vers les glandes renferment ou peuvent renfermer des granulations provenant d'incorporations faites à d'autres niveaux. Sa méthode de coloration lui a permis de reconnaître tous les détails du phénomène dont il avait les phases histologiques sous les yeux. L'acide du picrocarmin avait coloré en jaune toutes les inclusions, le protoplasme des phagocytes avait pris une teinte rouge-brun et le carmin boracique avait considérablement accentué la coloration rouge du noyau

et des corpuscules nucléaires. Van Rees n'a jamais vu, dans ses préparations de seize jeunes chrysalides, que les leucocytes interviennent d'une façon *active* dans la destruction des organes en question (**66**, pp. 74 et 75) et il attribue le fait à ce que ses recherches ont porté exclusivement sur des chrysalides qui ont été capturées pendant les mois de mars, mai et juin, « époque à laquelle les métamorphoses des insectes se passent d'une façon » moins rapide et exclusivement par dégénérescence ». Il estime que s'il avait opéré pendant les mois les plus chauds de l'année, il aurait pu s'attendre à une intervention active de la part des phagocytes. D'après l'auteur, les cellules salivaires des chrysalides sacrifiées dans les conditions précitées, se détruisent et se transforment en grumeaux et fragments vers lesquels se portent ensuite les leucocytes pour les incorporer et les soumettre à une digestion ultérieure; il recommande spécialement pour l'étude de cet objet sa double coloration au picrocarmin et à l'hématoxyline.

Au cours de nos observations, nous avons eu l'occasion de constater que les deux premiers jours de l'état nymphal, les leucocytes n'entament point les cellules glandulaires. Celles-ci, au dernier stade de fonctionnement, produisent encore la matière sécrétée sous forme de boules de diverses grandeurs. Un peu plus tard, leur cytoplasme se creuse de vacuoles, ainsi que van Rees l'a constaté (p. 75), et des trous et déchirures s'y produisent comme autant de preuves d'un commencement de dégénérescence. Il n'est pas rare non plus de trouver dans le cytoplasme des granules graisseux en plus ou moins grand nombre. A première vue déjà, on constate que l'on a affaire à des éléments affaiblis et épuisés qui ne peuvent plus guère offrir de résistance aux propriétés dissolvantes des phagocytes; mais nous avons toujours pu reconnaître d'autres cellules, encore en place et entières, n'ayant point subi les déformations et destructions signalées par van Rees et résumées ci-dessus. A partir du troisième jour, on voit des cellules sanguines et des phagocytes déjà chargés de résidus tissulaires (comme l'a décrit Kowalewsky) les entamer plusieurs à la fois ou bien isolément, et, selon les endroits, on retrouve des cellules irrégulièrement érodées et déformées de toutes les manières : elles présentent des excavations, des creux, des trous, des déchirures, etc.; autant de symptômes de l'influence

destructive des phagocytes. Le noyau résiste le plus longtemps et conserve ses caractères : il ne nous est pas arrivé d'y constater les progrès dégénératifs signalés par KOWALEWSKY, mais nous sommes néanmoins porté à croire que cet élément cellulaire, tout autant que le cytoplasme, subit déjà un commencement de régression avant d'être entamé par les phagocytes.

Notre figure n° 1, planche II, est très intéressante sous le rapport de la marche du phénomène dont il s'agit : à droite, une cellule glandulaire est entamée de quatre côtés à la fois par des phagocytes tous chargés de détritus tissulaires; dans quelques-uns d'entre eux, on reconnaît de gros sarcolytes, de même que d'autres inclusions qui pourraient provenir déjà de l'élément glandulaire lui-même. La cellule de gauche a subi également des atteintes très graves faites par des phagocytes et par un leucocyte vide : il suffit d'un coup d'œil rapide pour reconnaître dans ces éléments destructeurs les « Körnchenkugeln » de WEISMANN et de GANIN, appellation que KOWALEWSKY et VAN REES ont conservée. Le noyau du phagocyte est très distinct çà et là, tandis qu'à d'autres niveaux il semble devoir se retrouver dans les coupes précédente ou suivante.

Nous arrivons donc aux mêmes conclusions que pour les muscles, quant aux phases initiales de la destruction glandulaire : la cellule subit un commencement de dégénérescence avant que les phagocytes ne l'entament, et l'on ne peut attribuer à ceux-ci la cause primordiale de la destruction de ces organes. C'est par chimiotaxie que les leucocytes sont attirés ici vers des organes affaiblis par suite de la cessation de leur rôle physiologique et qui subissent des transformations morphologiques et chimiques de leurs constituants. Nous nous croyons d'autant plus autorisé à admettre cette opinion, que nous trouvons ici une confirmation de nos observations et de nos conclusions sur la dégénérescence musculaire et que, d'un autre côté, VAN REES a vu les glandes salivaires de la chrysalide des mouches dégénérer et disparaître dans leur totalité sans intervention phagocytique. Il est vrai de répéter ici que VAN REES attribue la différence de ses résultats d'avec ceux de KOWALEWSKY au fait que les deux auteurs ont recueilli et fixé leurs matériaux à des époques diverses de l'année : ce dernier, contrairement au premier, a eu recours à des chrysalides de l'époque la plus chaude

de l'année; or, il se fait que le stade chrysalide dure beaucoup moins longtemps pendant les époques de chaleur, c'est-à-dire que le développement se passe plus rapidement qu'au printemps. L'on ne peut néanmoins pas admettre que l'influence de la température extérieure puisse être importante au point de faire changer totalement le mode et le mécanisme d'un même phénomène se produisant dans le même organe, c'est-à-dire, dans l'espèce, que la destruction des glandes salivaires puisse tantôt être provoquée par les phagocytes et tantôt trouver sa cause initiale dans les cellules mêmes. Il est bien plus probable que la destruction des glandes salivaires débute par un affaiblissement, conséquence de l'inactivité dans laquelle est entré l'organe par suite du stade de repos que traverse l'animal. Le tissu affaibli subit plus ou moins rapidement des altérations nécrotiques et exerce une attraction chimiotaxique sur les leucocytes. En été, ceux-ci (les phagocytes) accourent déjà avant que la dégénérescence soit complète, mais certainement pas avant tout début régressif, c'est-à-dire que depuis ce moment les deux phases des phénomènes se passent simultanément et contribuent à hâter la marche de la métamorphose; à une période moins chaude, au contraire, l'intervention des leucocytes est plus tardive et le phénomène se passe plus lentement. Cette coopération des leucocytes ne peut toutefois pas être considérée comme de valeur secondaire, parce que, ainsi que l'a dit Barfurth pour la destruction musculaire, sans elle, le phénomène serait incomplet.

Quant aux jeunes cellules nées par voie libre dans les éléments salivaires, ainsi que croit l'avoir vu Viallannes (qui les a dessinées), il ne peut s'agir que d'une fausse interprétation des diverses phases de la destruction par phagocytose. Van Rees croit qu'il pourrait se faire que Viallannes eût pris des vacuoles pour des cellules nées par endogenèse; nous ne le pensons pas : les soi-disant jeunes cellules sont uniquement, soit des leucocytes à vide entrés par érosion dans les cellules, soit même des fragments sarcolytiques renfermés et entraînés par les phagocytes. Il est parfaitement exact que ces derniers, une fois suffisamment chargés, quittent les glandes salivaires, partiellement ou totalement détruites, pour rentrer dans la circulation générale : ce seraient là les cellules libres de Viallannes destinées à aller édifier des organes nouveaux.

De même que les phagocytes chargés des produits de la dégénération musculaire n'interviennent en aucun cas *directement* dans la rénovation du tissu contractile, c'est-à-dire que l'évolution ne les transforme pas en muscles, ceux qui ont contribué à la destruction des glandes salivaires ne sont point appelés, eux ou leur contenu, à fournir les constituants d'une glande digestive nouvelle. Nous aurons l'occasion de revenir dans un autre chapitre sur le sort réservé aux phagocytes et à leurs inclusions.

D. — *Destruction de l'hypoderme larvaire.*

Ganin, le premier (**19**, p. 32), a signalé dans l'hypoderme larvaire l'existence de tissus imaginaux destinés au remplacement. Viallannes (**67**, p. 20) les considère comme des épaississements épithéliaux et ne leur reconnaît pas la nature embryonnaire. Ceci découle principalement du fait qu'il a cru voir des transitions sensibles de ces éléments vers les cellules hypodermiques. Il les a interprétés comme étant destinés à remplacer l'hypoderme larvaire qui disparaît et laisse le corps de l'animal avec une tunique hypodermique nouvelle, mais incomplète. Van Rees (**66**, pp. 54 à 63) s'étend longuement sur le sujet et démontre d'une façon irréfutable que jamais les téguments ne présentent des lacunes, mais que chez la larve ils cèdent progressivement la place à ceux édifiés aux dépens des éléments imaginaux. Ce dernier auteur a fait voir de plus que ceux-ci ont conservé leur caractère embryonnaire pour se développer quand le moment sera arrivé et que la place et les éléments nutritifs leur seront concédés.

De notre côté, nous avons examiné la destruction hypodermique dans le stade nymphal des trois insectes étudiés sous d'autres rapports dans les pages précédentes. Chez *Musca vomitoria,* l'hypoderme larvaire est composé de grandes cellules dans lesquelles apparaissent, à un moment donné, des indices incontestables de dégénérescence : condensation du noyau, fragmentation du cytoplasme, apparition dans celui-ci de granulations graisseuses, de lacunes, etc. Van Rees aussi admet que les cellules hypodermiques diminuent d'énergie vitale et en témoignent par des caractères morpholo-

giques. Ce n'est qu'à partir de ce moment que les phagocytes arrivent vers les cellules débilitées et en complète histolyse; ici, comme partout, dit-il, il y a phagocytose. Il y a donc une contradiction en ce qui concerne les idées du professeur d'Amsterdam, relativement aux causes primordiales de la destruction des muscles et des éléments hypodermiques : pour les premiers, en effet, il a admis que les leucocytes déterminent les premières phases de la destruction musculaire, tandis qu'ici il fait valoir des altérations morphologiques *avant* l'intervention des phagocytes. Il est vrai qu'à la page 120, examinant le motif pour lequel les organes larvaires ayant cessé de fonctionner sont détruits par les leucocytes, il exprime l'idée que ceux-ci attaquent tous les tissus, mais ne remportent la victoire que dans leur lutte avec les organes affaiblis, ce qui expliquerait, d'autre part, pourquoi les organes imaginaux échappent à cette destruction. (Ceci est entièrement conforme aux idées émises par METCHNIKOFF et rapportées ci-dessus.) Il nous paraît, ainsi que dans le cas de la destruction musculaire, que les phagocytes sont attirés vers l'hypoderme larvaire en dégénérescence par une force chimiotaxique qui trouve son origine et sa cause dans les altérations chimiques subies par le tissu. Les disques imaginaux forment des épaississements locaux de l'hypoderme, mais sont constitués d'un grand nombre de cellules beaucoup plus petites. Nous partageons absolument la manière de voir de VAN REES, quand il dit que les éléments imaginaux prolifèrent en empiétant successivement et progressivement sur le territoire nécrosé de l'hypoderme larvaire, sans que jamais on puisse constater une solution de continuité dans les téguments de l'animal.

Parmi les phagocytes arrivant à l'hypoderme dans le but d'en enlever les éléments détruits, il n'est pas rare de constater que beaucoup ont encore le caractère de globes granuleux (Körnchenkugeln) et n'ont donc point perdu la propriété d'englober d'autres détritus (de même que dans le cas de la destruction des glandes salivaires).

Chez une chrysalide de *Bombyx*, n'ayant qu'*un* jour d'existence, nous avons eu l'occasion de poursuivre la dégénérescence hypodermique. Tantôt les éléments tombent en histolyse pure et simple : le noyau se prend en une masse compacte, se fragmentant dans tous les sens, et autour de ces frag-

ments nucléaires isolés ou non, se groupent des amas cytoplasmiques leur servant de substratum. Ce genre de destruction tissulaire est connu depuis longtemps déjà et nous n'avons pas besoin de nous étendre sur le sujet.

Un autre mode se caractérise par le fait qu'autour du noyau hypodermique transformé en masse amorphe logée dans un hyalosome nettement limité, le cytoplasme se charge de granulations graisseuses de dimensions variables et s'accumulant surtout, dès l'abord, dans la partie profonde de la cellule, formant par leur ensemble un groupe semi-lunaire qui embrasse le noyau; plus tard, ces granulations augmentent en nombre et finissent par se répandre d'une façon régulière dans toute l'étendue du cytoplasme. Ces éléments dégénérés cèdent la place aux cellules provenant de la prolifération des îlots embryonnaires (disques imaginaux) répandus régulièrement dans l'hypoderme et tombent un à un dans la cavité périviscérale, où ils vont rejoindre les produits de destruction d'autres tissus; nous les rencontrerons plus tard encore.

La destruction de l'hypoderme larvaire de *Tenebrio* s'annonce par une vacuolisation progressive du cytoplasme et une diminution des propriétés chromatophiles du noyau : les phagocytes arrivent à ce moment et l'examen d'une série de coupes prouve surabondamment qu'ici encore ils apparaissent sur le terrain de la destruction après que le phénomène a débuté. Les nids de cellules embryonnaires et les cellules embryonnaires isolées (les disques imaginaux hypodermiques, en un mot) tranchent d'une façon typique sur l'hypoderme larvaire, et dans aucun cas l'on ne peut constater, ainsi que Viallannes l'a prétendu, qu'il y a pénétration réciproque et, par suite, continuité des cytoplasmes. Ces îlots se distinguent au contraire, d'une façon évidente, par leurs caractères morphologiques et microchimiques, et par leur situation profonde; leurs progrès évolutifs marchent parallèlement avec ceux de l'involution hypodermique larvaire et nous avons pu nous convaincre que, comme chez *Musca* (van Rees) et chez *Bombyx*, les téguments de la chrysalide de *Tenebrio* ne présentent pas d'interruption.

E. — *Destruction du corps adipeux.*

Le corps adipeux a donné lieu, de la part de tous les auteurs qui se sont occupés des métamorphoses postembryonnaires des Insectes, à des appréciations individuelles et très discordantes. Il a déjà été donné plus haut un résumé des idées originales de Viallannes (**67**, pp. 3 et 4) au sujet de la destruction de cet organe et nous nous sommes empressé de déclarer que nous ne pouvons en rien partager cette manière de voir. Kowalewsky et van Rees ont tous les deux étudié la même question, mais aucun des trois auteurs n'a signalé la genèse de ce tissu.

Il a été constaté dans les pages précédentes que, dans certains cas, le sarcoplasme, dans les chrysalides de *Musca vomitoria*, s'emparant des détritus musculaires (sarcolytes), se transforme en un élément arrondi, logeant dans les mailles de son protoplasma ces fragments résiduels qui subissent ensuite lentement, mais progressivement, la digestion intracellulaire. Les réactifs à l'osmium nous ont convaincu que cette transformation est de nature graisseuse et que les grandes cellules sarcoplasmatiques se transforment en éléments constituants du corps adipeux. Ils diffèrent considérablement de ceux qui constituaient le tissu larvaire dont nous n'avons pas cherché à reconnaître l'origine, mais ressemblent complètement à ceux décrits par les auteurs. Viallannes, avons-nous dit, y voit naître des granules grossissant et mis en liberté après la rupture de la membrane. Ces granules seraient des cellules filles nées dans l'élément adipeux et auraient mission d'aller contribuer à l'édification des organes nouveaux. La relation qu'a faite Kowalewsky (**31** et **32**) au sujet de ses expériences *in vivo* est autrement sérieuse. Étant donnée la grande autorité du savant russe, nous n'essaierons pas de contredire ses résultats. Sur la vésicule céphalique transparente (Kopfblase) d'une chrysalide du troisième au quatrième jour, il a assisté *de visu*, pendant vingt-quatre heures, à la destruction des cellules adipeuses par les phagocytes. « Die am meisten » nach vorn in die Kopfblase hereinragenden Fettkörperzellen liegen » gewöhnlich ziemlich isolirt und man sieht wie an dieselbe sich die

» kleinen Körnchenkugeln ankleben und auf deren Oberfläche zu kriechen
» beginnen. Zu den erst aufgekrochenen Körnchenkugeln gesellen sich neu
» zukommende und in zwei Stunden, vom Anfange der Beobachtung an,
» sah ich die ganze Fettzelle von den Körnchenkugeln umgeben. Die Fett-
» zelle sieht jetzt wie ein gefurchtes Ei aus im sogenannten « Maulbeerform-
» Stadium ». Etwas später werden die Hervorragungen der äusseren
» Oberfläche der Körnchenkugeln schwächer, was ich durch das Eindringen
» derselben in die Substanz der Fettzelle erkläre. Eine Zeit lang bleibt die
» Sache in diesem Zustande stehen und nun findet man anstatt der
» Fettzelle einen Haufen von Körnchenkugeln, welche sich nach allen
» Seiten zerstreuen. Der centrale Haufen bleibt etwas länger an der Stelle
» liegen wo die Fettzelle war, aber auch er zerstreut sich bald. Nachdem
» die Vorderste in die Kopfblase hineinragende Fettzelle so aufgelöst ist,
» beginnt derselbe Vorgang mit den folgenden und den seitlichen Zellen
» und geht in derselben Weise vor. »

D'après l'auteur que nous venons de citer textuellement, ce seraient donc des phagocytes déjà chargés de produits d'histolyse qui iraient détruire, à leur tour, les cellules adipeuses. Il est vrai qu'il conclut à leur pénétration dans ces dernières du fait qu'il a vu diminuer la saillie qu'ils font à la surface externe, mais il ne décrit pas les *phases* d'une entrée observée en fait et l'on peut dire qu'il n'a pas *vu* celle-ci. Van Rees admet dans ses deux travaux sur le sujet que des leucocytes (non des phagocytes) pénètrent à l'intérieur des cellules adipeuses, car, dans ses préparations, il les y distingue, dit-il, avec certitude des autres inclusions (**66**, p. 77) et il croit que les cellules « *nées par formation libre* » de Viallannes correspondent à ces leucocytes. Il en signale dans le voisinage immédiat du noyau; d'autres, au contraire, sont répandus dans le reste du cytoplasme. Dans quelques-uns de ces leucocytes, il décrit deux à trois noyaux, même six, et quelquefois plus encore (jusqu'à vingt), le cytoplasme pouvant également s'accroître dans de fortes proportions : il ajoute qu'il ne s'agit probablement pas ici de formation de cellules géantes nées par fusion. Le cinquième jour, il a compté jusqu'à cent cellules groupées autour du noyau dont les propriétés chromatophiles diminuent, ce qui indiquerait une diffusion pro-

bable au profit des leucocytes. Dans son second travail, il émet l'idée que les leucocytes se nourrissent, à l'intérieur des cellules adipeuses, de granulations graisseuses et se répandent régulièrement dans le corps de la cellule. Comme leur nombre diminue d'une façon notable, il croit devoir conclure que plusieurs ont quitté successivement, tandis que les restantes se multiplient activement.

Plus haut déjà, nous avons décrit, avec quelques détails, les grandes cellules chargées de débris musculaires et de graisse qui se sont formées aux dépens des sarcoplasmes transformés en phagocytes, et nous avons signalé à cette occasion la disposition radiaire du protoplasme. Viallannes aussi a vu cette dernière et elle est due, d'après lui, à des « striations rayonnantes autour du noyau comme autour d'un centre » (p. 162). C'est à tort, d'après nous, que van Rees n'y voit que la séparation des leucocytes massés autour du noyau en une couche centrale. Il nous paraît absolument incontestable que les leucocytes de van Rees et les cellules endogènes de Viallannes sont uniquement des inclusions sarcolytiques subissant la digestion intracellulaire.

Il nous faut encore revenir avec plus de détails sur ce point pour établir notre manière de voir et pour combattre celle des auteurs cités. Dans nos préparations obtenues après fixation au sublimé et coloration par l'éosine et l'hématoxyline, nous reconnaissons parfaitement les inclusions des cellules adipeuses : il s'agit de fragments sarcolytiques très grands, irréguliers et rappelant en tous points ceux que nous voyons se former dans un muscle en dégénérescence, qui se sont groupés ici autour du noyau sarcoplasmatique et y ont conservé leurs propriétés microchimiques (coloration par l'éosine); ils sont massés autour du noyau et leur limite tranche nettement sur le protoplasme cellulaire qui, dès lors, affecte la disposition radiaire signalée par Viallannes. Plus loin, leurs dimensions ont diminué et leurs arêtes se sont arrondies; les caractères chimiques aussi se sont modifiés et l'on reconnaît chez eux des transitions insensibles vers les inclusions les plus éloignées du noyau qui se laissent déjà faiblement colorer par l'hématoxyline. Il n'est pas rare, au cours de l'examen total et comparatif des coupes des diverses régions nymphales, de constater que les inclusions rangées autour du

noyau sont le siège d'une transformation morphologique; nous voulons dire par là qu'il apparaît dans leur intérieur des boules très réfringentes (graisse), tandis que le reste prend une teinte bleu pâle. L'hématoxyline est regardée à juste titre comme un révélateur fidèle du noyau; or, jamais nous n'avons vu apparaître un point quelconque qui, par cette réaction, pût en imposer comme étant de nature nucléaire. S'il s'était trouvé, à l'intérieur des cellules adipeuses, des phagocytes ou des leucocytes (Kowalewsky et van Rees) et surtout des leucocytes en voie de multiplication (van Rees), il est absolument certain que l'hématoxyline eût décelé l'existence de leur noyau. Viallannes (p. 167) signale de « très nombreux granules sphériques colorables en rouge par le carmin ». Mais ce dernier colorant n'est point décisif pour la révélation de noyaux ou de débris nucléaires et, avec van Rees, nous ne pensons pas que ces granules colorables doivent être regardés comme les noyaux de ses leucocytes (sarcolytes). Dans nos préparations fixées à l'Hermann ou au Flemming, il y a également des granulations qui se sont colorées par la safranine, mais elles sont toujours isolées et point du tout entourées d'un territoire protoplasmique limité qui aurait pu les faire prendre pour des noyaux cellulaires. De plus, elles ne présentent aucune disposition réticulaire ou autre, qui est l'apanage des noyaux normaux et sains. Nous les considérons uniquement comme des produits de la digestion intracellulaire que l'on peut comparer aux granulations safranophiles des cellules engraissantes (Mastzellen) et de certaines boules sécrétées par les organes glandulaires, qui sont, les unes comme les autres, des produits de transformations dus à l'activité cellulaire. Un coup d'œil sur notre figure 5 de la planche I permettra de vérifier notre manière de voir au sujet des détails que nous venons d'examiner chez les deux derniers auteurs. Autour du noyau se rencontrent de grands amas sans trace d'éléments nucléaires et séparés entre eux par une mince couche protoplasmique parsemée de fines granulations graisseuses. La plupart d'entre eux renferment de petits éléments arrondis et le reste est constitué d'une substance homogène colorée en brun jaunâtre par les réactifs au même degré que les sarcolytes encore accumulés dans un muscle en dégénérescence. Le réticulum de granulations adipeuses peut se poursuivre à travers toute la cellule et il nous suffira

de le comparer à celui décrit précédemment déjà dans le muscle en dégénérescence (pl. I, fig. 3 et 4) pour faire comprendre quelles en sont l'origine et la signification, à notre sentiment du moins. De même que dans les préparations obtenues après fixation au sublimé, nous constatons que les inclusions diminuent d'importance au fur et à mesure que nous nous éloignons du noyau vers la périphérie. Nous voyons également apparaître des sphères graisseuses dont quelques-unes atteignent des dimensions considérables : certaines d'entre elles existaient déjà avant l'achèvement des cellules adipeuses; d'autres, au contraire, se sont formées à l'intérieur de celles-ci par digestion de sarcolytes. Il a déjà été dit, et nous avons fait connaître nos motifs à ce sujet, que parmi les inclusions nous n'avons jamais réussi à rencontrer à l'intérieur soit des cellules embryonnaires (Viallannes), soit des leucocytes (van Rees); il ne sera pas nécessaire d'insister beaucoup pour faire comprendre que, de même, nous n'avons pas constaté la présence de globes granuleux (Kowalewsky). A la surface, au contraire, ou dans le voisinage immédiat, il n'est pas rare que des « Körnchenkugeln » ou des leucocytes se rencontrent plus ou moins nombreux; il nous est même arrivé de voir que la membrane de la cellule adipeuse était quelque peu déprimée par eux. Mais ajoutons immédiatement que dans nos coupes d'une très grande finesse, il ne nous a point semblé que ces éléments fussent sur le point de pénétrer dans les cellules adipeuses ou d'en sortir. Il s'agissait là uniquement d'une rencontre fortuite d'éléments graisseux par des cellules migrantes, phagocytes ou non, qui, étant données leurs propriétés amiboïdes, pouvaient y ramper, et l'on comprend aisément qu'il pouvait en résulter des déformations purement accidentelles.

La manière d'interpréter la destinée des éléments du corps adipeux est intimement liée à l'idée que l'on se fait du travail intracellulaire. Il a été rappelé que Viallannes voit les cellules adipeuses se résoudre en éléments embryonnaires, sans que le noyau intervienne; l'auteur français ne fait pas connaître la destinée de celui-ci. D'après Kowalewsky, une fois que les globes granuleux l'auraient envahi de toutes parts et se seraient emparés de son contenu, il se désagrège et l'on ne retrouve à sa place qu'un amas de « Körnchenkugeln » qui se dispersent et vont rejoindre les autres produits de la

dégénérescence dans la « Körperflüssigkeit ». Van Rees (**66**, p. 82) parle d'une disparition progressive de la cellule adipeuse; il l'attribue à l'épuisement par les leucocytes qui se sont multipliés dans son intérieur et à ses dépens. Il signale sur les éléments adipeux des derniers jours du stade nymphal, des cavités qu'il interprète comme ayant servi de siège aux leucocytes émigrés et il considère de plus comme étant des leucocytes dégénérés, des éléments particuliers colorables que l'on peut encore retrouver entre les résidus graisseux.

Il va de soi que nous ne partageons aucune de ces manières de voir, étant donné que nous avons longuement combattu les idées qui reconnaissent un rôle quelconque aux leucocytes ou à leurs dérivés à l'intérieur des cellules adipeuses : celles-ci, après une existence plus ou moins longue, se désagrègent (fig. 11 de la pl. II), et à ce moment encore, on peut reconnaître aisément leurs inclusions : granulations graisseuses, boules chromatophiles et sarcolytes partiellement digérés renfermant parfois, eux aussi, de la graisse. Le noyau a subi la transformation caractéristique de la dégénérescence : il a perdu sa structure réticulée et ne forme plus qu'un amas unique ou un conglomérat caryolytique. Comme nous aurons à revenir encore sur le rôle nutritif des résidus hystolytiques, nous nous contentons à présent de dire que la désagrégation finale des cellules adipeuses se fait le plus souvent dans le voisinage immédiat des organes en néoformation et qu'il n'est pas rare de voir que des leucocytes ou des phagocytes viennent englober partiellement les restes de l'élément adipeux. Seraient-ce là les phagocytes venant détruire les cellules adipeuses d'après la manière de voir de Kowalewsky? Dans tous les cas, la chose ne se fait qu'après désagrégation totale des éléments en question. Ici, encore une fois, de même que dans le cas de la destruction musculaire, de l'hypoderme et des glandes salivaires, les phagocytes ne font pas débuter la destruction, mais arrivent après que celle-ci est déjà plus ou moins avancée.

Le mode de destruction musculaire chez la chrysalide de *Bombyx mori* a été exposé plus haut et il est facile de conclure de notre texte que nous y voyons un parallélisme quasi complet avec ce qui se passe chez *Musca vomitoria* : c'est-à-dire que nous considérons l'enlèvement des débris mus-

culaires comme se faisant et par les myoclastes et par les phagocytes. Les premiers, chez *Bombyx* comme chez *Musca,* les ont répandus dans leur intérieur sous forme de granulations le plus souvent graisseuses, quelquefois encore de nature sarcolytique (voir fig. 9 et 10 de la pl. II). Dans le cours de nos observations, nous n'avons pas pu voir une seule fois un leucocyte ou un phagocyte pénétrer à l'intérieur d'un de ces myoclastes (cellules adipeuses) : il ne sera pas nécessaire d'insister encore pour dire que nous ne regardons aucunement les granulations colorables comme ayant la signification de noyaux appartenant à des phagocytes qui y viendraient dans le but d'épuiser l'élément adipeux ou à des leucocytes accourant pour s'y nourrir ou pour s'y multiplier (Kowalewsky et van Rees). Il ne nous a point paru que chez *Bombyx* les inclusions (sarcolytes) prennent cette disposition particulière dans leur distribution autour du noyau, de même que ces éléments ne perdent pas de leurs dimensions au fur et à mesure qu'on se rapproche de la périphérie ; mais ce sont là différences secondaires qui ne peuvent en rien ébranler l'idée que nous nous faisons de leur similitude chez les deux animaux considérés, tant au point de vue de leur origine que de leur signification et de leur destinée. Il peut se faire que les globes granuleux atteignent des dimensions particulièrement grandes, et comme ils renferment les mêmes sarcolytes, plus parfois des granulations graisseuses résultant de la digestion intracellulaire subie par ceux-ci, on pourrait craindre de les confondre : mais le noyau reste toujours suffisamment caractéristique dans les deux espèces. Les grandes cellules du corps adipeux du Ver à soie sont donc des myoclastes, au même titre que les éléments correspondants de la Mouche et l'organisme les utilise probablement d'une façon identique chez les deux insectes

Il en est tout autrement chez le Ver de farine ; ainsi qu'il a été exposé plus haut, en effet, les muscles, dégénérant pendant le stade nymphal, sont exclusivement enlevés par les cellules sanguines : de myoclastes, il n'est pas question ici. Les fragments musculaires, ainsi englobés par les phagocytes, subissent la digestion intracellulaire qui se traduit par l'apparition de gouttelettes graisseuses logées isolément dans une lacune (vacuole). En parcourant les séries de préparations obtenues par les méthodes à l'osmium, on

peut poursuivre toutes les phases de cette transformation et l'on voit se former par fusion les grosses boules de graisse. Les coupes d'objets fixés au sublimé et colorés à l'hématoxyline fournissent également des données précieuses à ce sujet : dans les inclusions d'origine musculaire, en effet, on voit apparaître dans ces conditions des points et granules réfringents, en tout semblables à ceux que nous avons vus se former dans les sarcolytes englobés par les myoclastes de *Musca;* l'identité des rôles joués par ceux-ci et par les phagocytes est donc établie à suffisance par ce fait. Pour la destinée des produits de la destruction musculaire de *Tenebrio,* nous renvoyons au chapitre spécialement consacré à ce sujet (pp. 47 et suiv.). Quant au corps adipeux lui-même, nous ne pouvons donner aucun détail sur le mode mis en usage par l'organisme pour l'utiliser : nos préparations ne nous fournissent aucun renseignement à cet égard.

II. — Insectes a métamorphoses incomplètes (Homomorphes).

A. — *Historique.*

Contrairement à ce que nous avons constaté pour les métamorphoses complètes, les phénomènes postembryonnaires des Homomorphes n'ont donné lieu qu'à très peu de travaux. La chose s'explique en ce sens que les premières sont caractérisées par un stade d'immobilité souvent quasi absolue, d'où sort un insecte complètement développé et si différent de la forme larvaire que le phénomène en question ne pouvait manquer d'attirer l'attention du naturaliste. Swammerdam avait déjà reconnu que sous les téguments de la chrysalide s'ébauchent les ailes de l'insecte parfait; mais ce n'est que depuis les travaux importants publiés par Weismann en 1864 et 1866 (**70, 71** et **72**) que l'on a tenté de scruter les phénomènes intimes de cette métamorphose.

Les Homomorphes ne passent pas généralement par un stade nymphal et, depuis leur sortie des membranes de l'œuf, ils semblent se perfectionner progressivement par des mues successives. Pendant tous les stades qu'ils traversent, ils ne cessent de ressembler de plus en plus à l'insecte

adulte : il leur manque quelques appendices, les ailes, par exemple, que l'on voit naître et grandir successivement. Aussi l'évolution d'un Insecte homomorphe est considérée, en général, comme consistant en un simple accroissement d'organes. Dans leur excellent *Traité d'embryologie comparée des Invertébrés,* Korschelt et Heider [1] ont avancé l'idée que le mode intime de développement de ces Insectes ne diffère pas en réalité de celui de la plupart des autres animaux : il faudrait admettre que l'apparition d'organes nouveaux se réduit à un accroissement d'organes larvaires et qu'à cette occasion il se produit dans les tissus des phénomènes de régénération graduelle, comme cela se passe dans les organes en fonctionnement. Quoique les données manquent encore, ces auteurs estiment que les phénomènes essentiels peuvent se ramener, chez les uns comme chez les autres, à une destruction de cellules ou de groupes de cellules épuisées après la cessation de leur fonctionnement vital et à une régénération lente, graduelle et permanente d'organes. Jusqu'à présent, aucun travail, à notre connaissance, ne signale des phénomènes de phagocytose et nous avons entrepris de voir par nous-même si ce processus physiologique, si répandu chez les Holométaboles, fait totalement défaut dans le cas de métamorphoses incomplètes.

B. — *Dégénérescence et destruction musculaires.*

L'hypothèse de Korschelt et Heider, inspirée probablement par des considérations évolutionnistes, s'est vérifiée dans nos recherches, qui ont particulièrement porté sur la régression musculaire chez un Orthoptère (*Forficula auricularia*) et chez deux Hémiptères (*Nepa cinerea* et *Notonecta glauca*).

Avant tout, nous pouvons faire remarquer que jamais, ainsi qu'il fallait s'y attendre, nous n'avons vu une dégénérescence musculaire quasi générale, comme c'est le cas chez les chrysalides. Le phénomène ne se reconnaît d'ordinaire au même moment que dans quelques muscles séparés ou parties

[1] *Lehrbuch der vergleichenden Entwickelungsgeschichte der wirbellosen Thiere.* 1890-1893.

de muscles, et il s'y montre le plus souvent à des phases différentes; il est toujours caractérisé par ce fait qu'il a une *marche très lente.*

Chez une Forficule très jeune, l'évolution régressive d'un muscle de l'exo-squelette, situé immédiatement sous l'hypoderme, a été observée par nous dans tous ses détails. L'animal, auquel la tête et le dernier anneau abdominal avaient été amputés pour permettre la pénétration, a été fixé à la liqueur de Hermann et débité en coupes sériées très minces. La dégénérescence débute par une fragmentation de l'élément contractile, en même temps que le noyau, s'hypertrophiant considérablement, devient complètement sphérique et que sa structure, tout en restant normale, devient plus claire. Dans le corps du muscle apparaissent des granules graisseux, dès l'origine déjà assez grands; ils restent séparés les uns des autres et se rencontrent par groupes. L'endroit où ils ont pris naissance et où ils se groupent ainsi, renferme encore de très rares et très petits fragments sarcolytiques; il se montre dans une coupe comme une tache claire tranchant sur le reste par son contenu graisseux noirci par l'osmium. Dans un stade plus avancé, les granules graisseux augmentent encore en nombre et s'accumulent autour du noyau. Nous retrouvons ici les *myoclastes* décrits ailleurs déjà.

De même que dans le myoclaste de *Musca,* de *Bombyx* et de *Phryganea,* on reconnaît parfaitement l'existence d'un réseau sarcoplasmatique s'étendant par tout l'élément et logeant les granules graisseux dans ses mailles (voir pl. V, fig. 5). Ceux-ci résultant de la dégénérescence de la substance contractile, sont le plus souvent déjà tout formés, comme chez *Bombyx* et *Phryganea,* tandis que chez *Musca* les sarcolytes ne subissent généralement cette altération qu'après leur englobement par le sarcoplasma.

Ainsi que nous le verrons plus loin encore, cette autophagocytose n'est qu'un stade de la dégénérescence causée par la cessation du fonctionnement physiologique : le cas de la Forficule est, sous ce rapport, encore plus démonstratif que celui de la Mouche.

Ni dans le muscle en régression, ni dans son voisinage immédiat, on ne voit un phagocyte, et les cellules sanguines vides ou chargées de quelques granulations graisseuses que l'on peut trouver çà et là, diffèrent absolument par tous leurs caractères de ce que l'on rencontre dans le muscle en dégé-

nérescence. Il se fait parfois que *deux* et même plus de deux noyaux accompagnés de leur cytoplasme restent associés et unis, tandis qu'autour d'eux se groupent les résidus musculaires; ils peuvent dans ce cas donner lieu à des *syncytia* quelquefois très compliqués. A la place précédemment occupée par un muscle, on peut ainsi trouver une suite, sorte de chaîne, de *myoclastes* englobés dans le tissu adipeux et faisant corps avec lui. Il y a donc ici une *autodestruction* musculaire sans intervention de cellules migratrices : la désagrégation du muscle trouve sa cause initiale en lui-même et s'achève sans le secours de phagocytes. Nous avons insisté à diverses reprises déjà sur ce détail et nous y revenons encore.

La description de la dégénérescence musculaire dans le cas de *Forficula* a été considérablement écourtée, parce que nous aurions dû nous répéter : le phénomène, en effet, est à la rigueur analogue à celui examiné chez la larve de la *Phryganea,* et ici même les phénomènes initiaux ressemblent fortement à ceux signalés pour les myoclastes de *Musca* et de *Bombyx;* quant à leur signification physiologique, on peut dire qu'il y a identité complète. Nous pourrons à plus forte raison être plus bref encore en décrivant la destruction par autophagocytose observée dans quelques muscles de jeunes *Nepa* et *Notonecta* (à côté de destruction par *simple dégénérescence*) : l'autodestruction musculaire de ces animaux a, de même que chez *Forficula,* une marche lente et débute par une fragmentation et par l'apparition de granulations graisseuses dans la partie contractile, tandis que le noyau s'hypertrophie. Le tissu interstitiel élargit ses mailles et y loge les myoclastes ainsi formés pour aller augmenter le corps adipeux. Il peut arriver qu'un myoclaste ainsi formé se trouve complètement isolé et non entouré d'une maille conjonctive; nous savons par ce qui précède que ce dernier cas existe pour les myoclastes de *Musca* et de *Bombyx :* ils peuvent former des chaînons et d'autres groupes, mais ne se logent pas dans les interstices du tissu connectif.

C. — *Modifications au sein de l'hypoderme.*

L'*hypoderme* d'un Insecte à métamorphoses incomplètes n'est jamais, comme dans le cas d'une chrysalide, au même moment le théâtre d'une destruction totale, suite de la cessation fonctionnelle de tout l'organe, amenée par un stade d'immobilité complète. Aussi, dans nos coupes de Forficule, on ne rencontre pas dans ce tissu de vastes territoires en voie de destruction, tandis que des éléments embryonnaires se développent à leurs dépens et reprennent leur place et leurs fonctions : de phagocytes il n'est point question ici et il y a sous ce rapport une différence fondamentale d'avec ce que nous avons décrit pour les téguments de la nymphe de *Musca,* par exemple. On a sous les yeux les phénomènes ordinaires d'un épithélium en activité fonctionnelle, c'est-à-dire que des cellules isolées peuvent, par suite d'épuisement vital, montrer des symptômes pathologiques précurseurs d'une mort prochaine, tandis que d'autres, dans le voisinage immédiat, continuent leurs fonctions et se trouvent en état de multiplication indirecte. Ce néanmoins, l'hypoderme trouve de son côté basal des matériaux nutritifs auxquels il puisera : c'est ainsi qu'on y rencontre, entre autres, des myoclastes isolés ou réunis en chaînons qui se désagrègent et répandent leur contenu : peu à peu, leurs éléments graisseux disparaissent au profit des cellules épithéliales. Nos résultats concordent donc ici avec l'idée émise par Korschelt et Heider.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES AU SUJET DE LA PHAGOCYTOSE.

Chez les trois représentants des Insectes homomorphes étudiés par nous sous ce rapport, nous constatons donc une autophagocytose musculaire typique : il n'est point question de cellules migratrices détruisant par phagocytose des fibres musculaires. Nous en concluons que, outre la régression par simple dégénérescence, l'autophagocytose seule existe normalement chez les Insectes inférieurs, comme elle existe encore au stade *larvaire* d'un Névroptère (la Phrygane), qui appartient au groupe des Insectes hétéromorphes. Chez ceux-ci, les métamorphoses se font par une *phagocytose*

mixte, avec une tendance à la prédominance de la phagocytose proprement dite. Au point de vue phylogénétique donc, on peut dire que l'autophagocytose est un phénomène *primaire* dans les métamorphoses des Insectes, tandis que la phagocytose par cellules migratrices est, au contraire, *acquise.* Cela tient probablement à ce fait que les métamorphoses incomplètes se passent lentement, contrairement à ce qui arrive le plus souvent pour les métamorphoses complètes. Cette idée se trouve en germe, à notre avis, dans les travaux de VAN REES et de KOROTNEFF; parlant de métamorphoses complètes, mais s'effectuant chez *Musca vomitoria* pendant les mois les moins chauds de la belle époque (VAN REES) et chez *Tinea* (KOROTNEFF), ils disent que la destruction de certains tissus, les glandes salivaires (VAN REES), les fibres musculaires (KOROTNEFF), se fait sans l'intervention de phagocytes proprement dits, qui, d'après les termes de KOROTNEFF lui-même, exécutent *ein barbarisches Auffressen.* Les leucocytes n'interviendraient pour la destruction des tissus que d'une façon secondaire, puisque le phénomène peut, dans certaines conditions, se passer sans leur concours.

L'étude entreprise au sujet de la phagocytose chez les Insectes tant homomorphes qu'hétéromorphes, nous confirme dans la conviction puisée dans nos résultats obtenus chez les Insectes à métamorphoses complètes et exposée plus haut, c'est-à-dire que la destruction des tissus musculaires et autres n'est pas l'apanage exclusif des phagocytes (KOWALEWSKY et en partie VAN REES), mais trouve sa cause initiale dans le tissu lui-même qui, par suite d'inactivité physiologique, subit des modifications morphologiques, physiques et chimiques. Si les métamorphoses ont une marche lente, comme chez la plupart des Insectes inférieurs, la destruction aussi progresse lentement et se réduit, à proprement parler, à une dégénérescence suivie d'une histolyse dont les résidus seront assimilés par les organes en évolution progressive. Celle-ci se faisant elle-même *très lentement,* résorbe les produits de cette destruction et n'influe pas, par ses besoins nutritifs, sur la marche du phénomène en question. Cette dégénérescence peut être accompagnée d'une « mise en réserve », en ce sens que pour le tissu musculaire, par exemple, les résidus peuvent être englobés par le sarcoplasma (autophagocytose),

pour aller avec lui faire partie du corps adipeux. S'agit-il, au contraire, d'une période nymphale très courte (comme c'est le cas pour beaucoup de Lépidoptères, par exemple), dans laquelle les organes larvaires cessent brusquement de fonctionner (au moment où débute le stade de nymphe) et sont en un très court laps de temps remplacés par des organes nouveaux (insecte parfait), il semble, à l'examen des tissus de la chrysalide, qu'une autodestruction seule ne peut suffire : la désagrégation des tissus larvaires se déclarant presque au même moment dans tous les organes, produit probablement sur l'ensemble des leucocytes (tissu sanguin) des attractions chimiotaxiques telles que leurs propriétés phagocytaires doivent se manifester au sein de cette histolyse générale; ils se chargent des débris tissulaires qui achèvent leur dissolution par la digestion intracellulaire. Par leur intermédiaire aussi, les matériaux nutritifs qui résultent de la destruction des organes larvaires sont portés rapidement à destination, et sous ce double rapport s'explique le rôle considérable et prépondérant que ceux-ci peuvent remplir dans le cas de métamorphoses complètes. Cela n'empêche pas, néanmoins, l'autophagocytose de se manifester, mais elle n'intervient plus exclusivement, à côté de la destruction par simple dégénérescence dont elle ne constitue en somme qu'une phase (*Musca, Bombyx, Phryganea*).

DESTINÉE DES PRODUITS DE DESTRUCTION DES ORGANES LARVAIRES.

Il résulte de nos recherches et de toutes celles de nos devanciers que les organes larvaires épuisés dégénèrent et que leurs débris, enlevés ou non par phagocytose (phagocytes, myoclastes, etc.), ont tous une destinée commune : ils serviront de matériaux nutritifs pour l'édification des organes de l'*Imago*.

1. *Phagocytes proprement dits.* — Quant à la destinée des phagocytes proprement dits, nous pouvons renvoyer au travail de van Rees (pp. 113 à 118). De même que Kowalewsky, il conclut à une digestion intracellulaire des sarcolytes et autres inclusions; à notre tour, nous avons pu nous

rendre compte de ce phénomène. On rencontre ces phagocytes, pendant les premiers temps du stade nymphal, à l'endroit même où ils ont incorporé des parties d'organes larvaires; plus tard, on peut en trouver en des points très éloignés, ce qui prouve qu'ils ont pérégriné entre les organes, véhiculant avec eux leurs inclusions. Van Rees est d'avis que les phagocytes se détruisent en perdant la membrane et le protoplasme; le noyau seul reste pendant quelque temps encore au milieu des débris organiques totalement ou imparfaitement digérés. Il est incontestable que tel est le sort de beaucoup de phagocytes; ainsi, au niveau de tissus en évolution, on en rencontre en très grand nombre qui périssent de la façon décrite par van Rees : le but de leur fonction phagocytaire est atteint, puisque les produits de la destruction sont véhiculés jusqu'aux endroits où ils pourront être utilisés. Ainsi que l'a démontré van Rees, de même que Kowalewsky, il n'y a jamais d'interruption dans le tissu hypodermique pendant le double phénomène de la dégénérescence et de la néoformation, c'est-à-dire que pendant que les phagocytes font disparaître l'hypoderme larvaire en dégénérescence, les téguments nouveaux évoluent et puisent leurs matériaux nutritifs dans ce que leur apportent ces phagocytes venus d'ailleurs et chargés, par suite, partiellement tout au moins, d'éléments d'une autre nature : car ainsi qu'il a été dit plus haut, l'hypoderme larvaire est attaqué et détruit par des leucocytes renfermant déjà des sarcolytes, par exemple. Van Rees admet aussi que des phagocytes peuvent déverser leurs inclusions, se « *vider* » et devenir des leucocytes vides. Il est certain que des leucocytes perdent lentement et graduellement leurs inclusions, mais il est le plus souvent difficile de dire de quelle façon se passe le phénomène. Est-ce que les sarcolytes et autres produits de destruction, après avoir subi la digestion intracellulaire, sont transformés en substances liquides qui peuvent diffuser à travers la membrane sans que nos réactifs les fassent apparaître, ou bien, sans avoir été transformés totalement, peuvent-ils être mis en liberté par le leucocyte? Nous croyons que le processus se passe suivant ces deux modes chez *Musca vomitoria* et chez *Bombyx mori.* Chez *Tenebrio molitor,* nous avions déjà l'occasion de le dire, les phagocytes qui se chargent ici, à eux seuls, de l'enlèvement des résidus organiques, les transforment en graisse qu'ils

déversent (pl. II, fig. 2, 3, 4 et 5) dans les organes en formation ou en régénération. Les vacuoles précédemment occupées par les boules graisseuses restent vides et donnent aux cellules un aspect caractéristique (pl. II, fig. 6, 7, 8). Pour beaucoup de phagocytes, l'expulsion des boules de graisse est le signal de la destruction. On les retrouve pendant quelque temps munis encore de leurs vacuoles et de leur réticulum graisseux, mais le noyau dégénère et l'ensemble des phagocytes finit par se transformer en conglomérat informe, vacuolaire, dans lequel on ne distingue plus de cellules à limites nettes. D'autres inclusions se font encore reconnaître comme étant les sarcolytes caractéristiques dont la transformation (par digestion) ne s'est pas opérée ou achevée.

2. *Myoclastes.* — Plus haut déjà, nous nous sommes prononcé au sujet de la destinée reconnue à ces éléments par Viallannes, Kowalewsky et van Rees : l'écart de notre interprétation d'avec les leurs trouve surtout son explication dans le fait que nous attribuons une origine différente à ces éléments. Rappelons brièvement ce qu'en pensent ces trois auteurs. Le premier les considère comme donnant lieu par *formation libre* à de jeunes cellules embryonnaires destinées à aller édifier de nouveaux organes; Kowalewsky admet que les phagocytes les détruisent, tandis que, d'après van Rees, ils joueraient un rôle d'organes lymphoïdes où les leucocytes viendraient se multiplier après s'être nourris aux dépens du contenu. On trouvera plus haut le détail des observations chez *Musca* et chez *Bombyx* qui nous ont conduit à admettre que ces grandes cellules chargées de granulations graisseuses sont des *myoclastes* gorgés de produits de l'histolyse musculaire; ceux-ci y continuent leurs modifications régressives, au point qu'ils finissent presque tous par se transformer en graisse. Il a été démontré à suffisance, croyons-nous, que les autres inclusions, telles que les points et corpuscules colorables, doivent également être considérées comme des produits d'une digestion intracellulaire plus ou moins avancée.

Ce qui précède s'applique aussi aux *myoclastes* décrits chez la Forficule et chez les Punaises d'eau; il n'y a qu'une différence de degré consistant surtout en ce fait qu'ici la substance contractile se transforme

sur place presque entièrement en graisse, tandis que chez *Bombyx* et tout particulièrement chez *Musca* le phénomène ne se fait reconnaître qu'après l'englobement des sarcolytes.

Ces *myoclastes* se retrouvent plus tard au niveau d'organes ou tissus en voie de développement, mais le plus souvent, s'y désagrégeant, ils perdent leurs formes arrondies et s'étalent ou s'aplatissent de façon que leur contenu, s'échappant ainsi qu'une masse semi-liquide, aille se répandre à la portée des jeunes tissus (trachées, muscles, hypoderme, organes génitaux, etc.) (pl. II, fig. 11). Ceux-ci s'en emparent, car on les trouve gorgés des produits de cette désagrégation qui subissent dans leur intérieur une assimilation reconnaissable aux modifications d'aspect qu'ils présentent. Il s'agit évidemment ici d'une nutrition, c'est-à-dire que les produits de la destruction enlevés et véhiculés par les myoclastes, comme ceux que transportent les phagocytes vrais, servent de nutriment aux organes imaginaux en voie de développement. L'origine et la signification de ces myoclastes n'ont donc rien qui doive étonner. Il s'agit uniquement de détritus musculaires groupés et « mis en réserve » : ils constituent en effet des réserves alimentaires qui seront utilisées plus tard par les organes en néoformation, au lieu que, dans le cas d'une intervention exclusive des phagocytes sanguins, ceux-ci les transportent immédiatement vers les points où ils seront utilisés à l'édification des tissus adultes.

Syncytia. — Il a été exposé précédemment que dans certains cas, lors de la dégénérescence musculaire, il se produit chez les Insectes des ordres inférieurs (*Hémiptères, Orthoptères*), et quelquefois aussi dans le cas d'Insectes plus élevés dans la série (larve de la *Phrygane*), des associations de cellules chargées de produits de dégénérescence. L'aspect de ces *syncytia* varie parfois considérablement, mais on peut les ramener presque toujours à un aggloméré de cellules provenant d'organes en voie de destruction. Ici encore, ces débris tissulaires ont la destinée de ceux qui, chez les Insectes plus élevés, sont enlevés par phagocytose : c'est-à-dire qu'ils sont destinés à aller fournir les matériaux nutritifs nécessaires à l'édification d'organes nouveaux. C'est ainsi qu'on les retrouve, par exemple, dans l'ovaire d'*Æschna,*

de *Periplaneta,* etc., où les syncytia viennent se vider au point qu'ils s'épuisent complètement. On peut poursuivre par le détail les phases de cette destruction qui débute le plus souvent par un étalement de l'élément syncytial à la surface des tubes ovariques (il s'agit dans l'espèce d'ovaires sans cellules nutritives). Peu à peu, les cellules perdent de leur graisse; l'épithélium folliculaire, au contraire, et après lui l'ovule, en acquièrent : lentement, mais progressivement, la graisse passe totalement dans l'organe génital. Nos figures 12, 13 et 14 de la planche II montrent diverses phases de ce phénomène et, dans le but de ne pas trop nous étendre sur ce sujet, nous renvoyons à l'explication de la planche.

Nous aurons à revenir, dans un chapitre spécial, sur des destructions particulières qui se produisent dans certains constituants de l'organe femelle. Disons un mot de leur destinée.

L'épithélium seul dans le cas des ovaires les plus simples, l'épithélium et les cellules nutritives quand ces glandes sexuelles ont une composition plus parfaite, se détruisent à un moment donné par dégénérescence et seront incorporés (en tout ou en partie) par les ovules en vue de l'accroissement. Ceux-ci (les ovules) forment dans leur ensemble ce que l'on pourrait appeler le *tissu génital femelle adulte* et, à l'instar de tous les organes définitifs, ils se nourrissent en partie, pendant leur accroissement, des débris d'éléments préexistants, *larvaires.* Le sort réservé aux produits nés de la destruction à l'intérieur des organes génitaux femelles, est donc en tous points identique à celui des autres résidus tissulaires.

3. *Leucocytes.* — Van Rees consacre un chapitre à la destinée des leucocytes (**66**, pp. 113 à 118) : il conclut à une dégénérescence de ces éléments dont il voit, d'un autre côté, la multiplication se produire activement dans les cellules adipeuses, ainsi qu'il a été rappelé plus haut. Le fait seul que les cellules adipeuses en renferment un nombre considérable (*hunderttausende*), fait naître l'idée, chez l'auteur hollandais, que beaucoup sont destinés à se détruire et il dit qu'il serait désirable que l'on pût fournir des données certaines quant à leur disparition. Il croit en avoir trouvé l'expli-

cation et l'expose à la page 116 de son travail de 1888. Ayant rencontré entre les cellules des divers épithéliums des granulations fines ou grossières situées à l'intérieur, « eines ziemlich breiten Hofes », de même que des leucocytes, il a conclu que ces granulations étaient les résidus de cellules sanguines en voie de dégénérescence. « Les leucocytes, dit-il, cédant à leur tendance » innée à pénétrer dans les tissus, ne trouvent pas de proie, mais tombent » eux-mêmes victimes de leur activité. Dans ce cas encore, ils interviennent » au bénéfice des jeunes tissus en formation. »

Cette question nous a également occupé : nous avons rencontré dans les épithéliums des phagocytes, des cellules sanguines normales en voie de division indirecte et d'autres en état de dégénérescence marquée. Le sort des premiers a été décrit ci-dessus ; quant aux seconds, ils sont certainement dans un état d'activité vitale telle que l'on ne peut pas un seul instant soutenir l'hypothèse qu'ils soient arrivés à ce niveau pour y trouver la mort. Ainsi qu'il a été démontré par un grand nombre d'auteurs, des leucocytes sains et vigoureux peuvent pénétrer dans tous les tissus et à tous les niveaux, s'y multiplier, englober des substances nocives, des débris cellulaires, de la graisse et autres produits de la digestion, des bactéries mortes ou vivantes, etc., puis retourner dans les voies sanguines. Il nous est avis que dans le cas actuel, contrairement à l'idée émise par VAN REES, les leucocytes dont il s'agit ne trouveront pas la mort dans les épithéliums. A certains niveaux, les leucocytes en division étaient excessivement nombreux, tandis qu'à d'autres, on ne les rencontrait qu'isolés ou réunis par petits groupes. Pour ce qui regarde les leucocytes de la troisième espèce, nous dirons que l'on peut reconnaître une dégénérescence caractéristique par chromatolyse : des boules homogènes et très peu colorables, prenant naissance dans leur intérieur et servant de substratum à des granulations chromatiques compactes, sans structure aucune, provenant du fractionnement du noyau. Il est probable que le large « *Hof* » vu par VAN REES autour des granulations chromatiques correspond à la boule homogène de nos préparations et que l'on retrouve toujours dans le cas d'une destruction par chromatolyse. Nous renvoyons, au surplus, pour l'historique complet de la question relative à la pénétration des leucocytes dans les épithéliums, à notre travail de 1895

(16, pp. 45 et suivantes). Quant au sort qui les attend, je me range sans réserve à l'opinion de VAN REES : de même que les autres *résidus* tissulaires, ils seront utilisés par les organes en évolution au sein desquels ils ont trouvé la mort. Les boules chromatiques et leur substratum subissent une sorte de dissolution progressive qui se fait surtout reconnaître parce que leurs dimensions diminuent : ils se fragmentent encore davantage et leur colorabilité va s'affaiblissant.

D'une façon générale donc, les produits de la destruction histolytique servent tous indistinctement de matériaux nutritifs aux organes imaginaux qui commencent leur développement, chacun séparément et indépendamment, à des moments divers de l'évolution organique.

DÉVELOPPEMENT DES ORGANES GÉNITAUX.

Le principe du développement postembryonnaire des Insectes peut donc se résumer comme suit : *Des organes nouveaux restés à l'état d'ébauche embryonnaire se développent en utilisant les matériaux nutritifs résultant de la destruction d'organes préexistants dont le fonctionnement a cessé et dont l'activité vitale est épuisée.*

Pendant la première et aussi la plus grande partie de l'existence, le fonctionnement des organes tend surtout à la *conservation de l'individu ;* l'organisme accumule pendant cette période active les matériaux nécessaires et préparatoires à la seconde, qui a pour but la *conservation de l'espèce :* les organes dont la mission spéciale est de réaliser ce dernier, se forment en dernier lieu, et quand ils ont atteint leur développement complet et leur maturité, on peut considérer l'animal comme étant parvenu à la deuxième étape de son existence. Pendant cette dernière période, toute l'activité vitale semble se concentrer en vue de ce but suprême. Nous aurons l'occasion plus tard de revenir sur ce sujet dans nos conclusions; mais disons dès à présent que, à notre sentiment, les métamorphoses des Insectes, qu'elles soient complètes ou incomplètes, durent toute la vie, et la dernière phase, la formation et l'achèvement des organes génitaux, débute relativement tôt

et dure elle-même une grande partie du temps embryonnaire. L'ovaire, comme tous les autres organes de l'*Imago,* a existé pendant un temps plus ou moins long à l'état d'ébauche embryonnaire et commence son développement à un moment donné, puisant dans les résidus d'organes disparus une grande partie des matériaux nécessaires à son évolution. Nous avons déjà vu autre part que, chez *Tenebrio molitor,* les phagocytes chargés de sarcolytes qu'ils ont digérés et transformés en graisse dans leur intérieur, vont pénétrer dans le testicule pour y déverser leurs boules adipeuses. Celles-ci se fragmentent et sont utilisées par les éléments de la spermatogenèse. De même, chez *Æschna grandis,* chez *Forficula auricularia* et chez *Periplaneta orientalis,* les syncytia du corps adipeux perdent leur graisse qui finit par disparaître presque complètement au profit des organes génitaux femelles. Ce phénomène est donc, en tous points, identique à celui exposé d'une manière générale dans le chapitre relatif à la destinée des divers produits de la destruction des organes larvaires. Il nous a été donné de nous rendre compte de ce fait plus spécialement chez *Dytiscus, Carabus, Hydrophilus, Telephorus, Bombyx, Æschna, Forficula, Periplaneta, Notonecta, Nepa :* la graisse passe, à la suite d'une émulsion poussée très loin, dans les cellules épithéliales des follicules ovariques qui la cèdent plus tard aux ovules. Dans nos préparations de *Bombyx* femelle à l'état d'insecte parfait, on peut se convaincre que le corps adipeux est totalement épuisé; il n'a plus guère de raison d'être : les organes génitaux qui achèvent l'organisation de l'animal étant complètement formés, la ponte ne devait pas tarder à se produire.

Mais là ne se borne pas la nutrition des organes génitaux en général et de l'ovule en particulier : celui-ci, à l'état de complet développement (stade de maturité), constitue une cellule douée de propriétés spéciales et renfermant en dépôt une grande quantité de substances nutritives qui serviront plus tard à la formation et à l'entretien des premières cellules embryonnaires auxquelles il donnera naissance; il est, de plus, constituant d'un organe de l'insecte parfait et comme tel il s'achève tardivement et aux dépens de tissus primitivement existants qui jouent ainsi un rôle larvaire. On peut, d'une façon générale, distinguer deux espèces d'ovaires chez les

Insectes : ceux qui renferment des *cellules vitellines* et ceux qui n'en ont pas. Parmi les premiers, on peut encore établir une distinction selon que ces cellules se trouvent toutes groupées dans une chambre spéciale ou accompagnent par série les ovules dans leur trajet vers l'oviducte. Dans les ovaires dépourvus de cellules nutritives, les ovules se suivent dans les tubes ovariques et reçoivent les éléments nécessaires à leur accroissement exclusivement de l'épithélium pariétal. Nous aurons l'occasion de revenir, quelques lignes plus bas, sur ces modes de nutrition de l'ovule.

Le phénomène de la nutrition de l'ovule de Dytique a fait, de notre part, l'objet d'une étude approfondie. L'ovariule de cet insecte a atteint le degré le plus compliqué et le plus complet. On y distingue successivement : 1° le ligament suspenseur (Endfaden); 2° le germigène ou chambre terminale (Endkammer); 3° le tube ovigère constitué par la série des follicules où se trouvent les œufs en chapelet, séparés entre eux par les cellules nutritives; puis vient 4° la portion réticulée de l'ovariule qui conduit dans l'oviducte. Nous n'insisterons pas sur la signification anatomique et physiologique du ligament suspenseur : c'est la terminaison proximale du tube ovarien qui débute d'une façon aveugle et se continue par transition lente avec la chambre terminale.

La signification de celle-ci a été examinée dans un très grand nombre de travaux et l'interprétation qu'on a donnée aux phénomènes morphologiques et physiologiques qui s'y passent, varie considérablement. Lubbock, en 1859, a dit des éléments qui la remplissent que, à un moment donné de leur développement, on ne peut distinguer quelles sont les cellules destinées à devenir nutritives de celles qui deviendront génitales. Stein, en 1847, avait déjà admis cette interprétation. Il serait trop long de donner ici l'historique complet de tout ce qui a été dit depuis les premiers travaux publiés sur ce sujet : il suffira, pour se mettre au courant de la matière, de consulter le travail de Korschelt (1886). Il nous faut cependant nous arrêter quelque peu aux trois travaux que L. Will a publiés de 1884 à 1886. Dans la chambre terminale, les cellules indifférentes, que l'auteur appelle *ooblastes*, sont constituées de grands noyaux, les limites cellulaires ne

peuvent se poursuivre dans la substance fondamentale; les noyaux sont composés de chromatine homogène. Ces ooblastes s'entourent de protoplasme et produisent par bourgeonnement des amas de chromatine qui constitueront les noyaux des cellules nutritives et des cellules épithéliales. Ce qui reste de ces ooblastes devient la vésicule germinative, tandis que la chromatine encore disponible se transforme en vitellus. Par continuation, le noyau des cellules nutritives donne aussi des amas de chromatine qui se transforment dans le protoplasma en noyaux de cellules épithéliales. Sabatier (**57**) a également étudié la morphologie de l'ovaire; il fait naître les cellules épithéliales et les cellules nutritives *par formation libre* au sein de l'ovule. Dans le travail de 1885, Will (**76**) revient sur le sujet pour étayer encore les résultats de ses précédentes études. En 1886 paraît son mémoire sur l'œuf de *Colymbetes fuscus* (**77**); on y trouve quasi la confirmation de ses recherches faites antérieurement chez *Nepa* et *Notonecta*. Le noyau de l'œuf, d'après ce travail, produirait par bourgeonnement les noyaux des cellules nutritives, qu'il nomme des cellules épithéliales géantes (Riesenepithelzellen), et qui, non séparées par des cellules épithéliales, constituent avec l'œuf ce qu'il appelle une « mehrzellige Eianlage »; de plus petits bourgeons nucléaires formeraient les noyaux des cellules épithéliales folliculaires. Les figures 3 à 19 de la planche I du travail de 1886 sont suggestives à cet égard, mais elles ont été exécutées à un trop faible grossissement, qui n'a pas permis à leur auteur de fournir l'interprétation exacte. Korschelt (**29**) attribue à des phénomènes de dégénérescence les images obtenues par Will et interprétées par lui comme correspondant à la formation de cellules épithéliales aux dépens des ooblastes; il ne s'est pas attardé davantage à combattre les vues de Will. Stuhlmann (**61**) conteste également l'origine attribuée par cet auteur aux cellules épithéliales, et Schneider (**60**), à son tour, attaque énergiquement les idées exposées dans le travail de 1885. Il en est de même de Blochmann (**10**), qui voit bien bourgeonner le noyau des cellules de la chambre terminale et donner lieu à de petits noyaux; mais comme il en a vu encore se produire dans l'ovule après la formation du chorion, il dit que l'on ne peut pas admettre que ce sont là des noyaux de cellules épithéliales, mais des produits destinés à disparaître.

Dans notre examen du germigène de Dytique, entrepris avec tous les soins possibles, nous avons eu l'occasion de rencontrer les figures décrites par Will chez *Colymbetes,* dont le tube ovarien a une structure identique à celle du même organe du Dytique. Il nous a été facile de vérifier les résultats obtenus par Korschelt relativement aux modifications successives subies par les cellules destinées à se transformer en ovules; mais, à côté de ces détails, il s'en est montré d'autres qui nous ont tout particulièrement intéressé. Quelques cellules du germigène subissent la transformation histolytique caractérisée par l'apparition, dans le protoplasme, de sphères à structure compacte, servant de support à des fragments chromatophiles plus ou moins nombreux. Les limites de ces cellules ainsi transformées ont disparu et les produits de la dégénérescence se répandent dans la cavité de la chambre, entre les autres qui ont conservé leur aspect général. Ces produits, serrés entre les cellules qui occupent la chambre terminale, pénètrent ou arrivent jusque dans celles que l'on reconnaît déjà comme étant les futurs éléments ovulaires et vont y contribuer à leur accroissement : il s'agit d'une dégénérescence spontanée, débutant et s'achevant sans l'intervention de cellules sanguines, et d'une disparition subséquente par englobement de la part de la cellule-œuf, qui joue ainsi le rôle de phagocyte. Les boules du protoplasme nées dans les cellules nutritives correspondent donc aux produits des ooblastes (Will) et leur partie chromatique est le noyau né, d'après cet auteur, par bourgeonnement de ces mêmes ooblastes [1]. Non seulement des cellules nutritives peuvent, en dégénérant, donner lieu à des substances d'accroissement pour l'ovule, mais l'épithélium aussi peut sécréter de ces boules, et la figure 5 de la planche III le prouve surabondamment. Il est de fait qu'il règne dans la chambre terminale une activité physiologique considérable : elle se manifeste, dans des coupes bien

[1] Des sorties de parties chromatiques ont été signalées par Roule (**87**) chez les Phallusiadées, par Balbiani (**2**) chez les Myriapodes, par Fol (**17**) chez les Ascidiens, par Blochmann (**10**) chez les Fourmis, par Leydig (**37**) chez divers Arthropodes, par Weismann et Ischikawa (**82**) chez *Daphnia,* par Lameere (**80**) chez *Camponotus ligniperda* et par Van Bambeke (**78**) chez *Scorpaena scrofa.* Nous avons déjà cité à ce sujet les travaux de Stuhlmann, de Schneider et de Korschelt.

faites, par l'apparition de figures karyokinétiques nombreuses de tous les stades et par les indices certains d'une sécrétion épithéliale énergique qui, de même que la dégénérescence de certaines cellules nutritives, se fait au profit des cellules ovulaires. Dans la partie inférieure de cette chambre, on distingue les cellules destinées à devenir génitales de celles qui garderont leur caractère nutritif; Korschelt a fourni à cet égard des détails d'une grande précision et il est vraiment étonnant qu'il n'ait point constaté des figures de division indirecte.

Dans un important travail paru en 1889, Korschelt a étudié dans tous les détails la morphologie et la physiologie du noyau cellulaire de l'ovule et des cellules nutritives dans l'ovaire de Dytique. C'est ainsi qu'il a démontré que les cellules nutritives sécrètent au profit de l'ovule assez longtemps durant son trajet dans la gaine ovarique, des granulations qui noircissent par l'acide osmique (l'auteur ne les regarde pas comme de nature graisseuse, car elles se colorent aussi par le bleu de Lyon), et que, d'un côté, le noyau de ces cellules nutritives intervient tout au moins indirectement dans cette sécrétion, tandis que, d'autre part, la vésicule germinative exerce une attraction sur les produits de cette sécrétion. Il est facile de constater qu'il en est ainsi et l'on reconnaît parfaitement des traînées de granulations sécrétées par les cellules nutritives se dirigeant vers la vésicule germinative et s'accumulant autour d'elle. Pendant ce temps, à n'en pas douter, celle-ci émet des prolongements qui lui font reconnaître des propriétés amiboïdes, telles qu'en ont décrites Balbiani (1), en 1865, et E. Van Beneden (62), en 1880 [1]. L'auteur ne s'occupe pas spécialement de la question de savoir ce que deviennent les cellules nutritives après avoir épuisé leurs fonctions sécrétoires; l'idée généralement admise est qu'elles sont absorbées par l'ovule. Il nous faut encore revenir à ce sujet sur les travaux de Will; d'après lui, la vésicule germinative qui a déjà fourni, par bourgeonnement, les noyaux

[1] Pendant la correction des épreuves du présent travail paraît la communication faite par le professeur Van Bambeke au Congrès des sciences anatomiques tenu à Gand (79). L'auteur y décrit et figure des « irrégularités du contour nucléaire » qu'il interprète... « comme étant l'expression de mouvements amiboïdes du noyau » (oocyte de *Pholcus phalangioides*).

des cellules nutritives et des cellules épithéliales, continue encore à bourgeonner pour produire du vitellus; il décrit ce dernier phénomène comme se passant chez le Dytique. Les cellules nutritives, de leur côté, ne fournissent point à l'œuf : elles sont probablement, dit-il, avec les cellules épithéliales, les homologues de la « zur Bildung der männlichen Geschlechtsstoffe hinführenden Formation » et semblent indiquer que l'œuf primordial a été hermaphrodite. Il nie également pour les cellules épithéliales folliculaires la propriété d'élaborer au profit du vitellus; dans ce travail, il ne revient plus sur la destinée des noyaux des cellules nutritives une fois entrés dans le vitellus : à cette époque, il avait déjà admis ailleurs que ces noyaux en sortent pour aller constituer des cellules épithéliales.

Les cellules nutritives de l'ovaire de Dytique sont destinées à passer dans le vitellus de l'ovule : nos préparations nous ont fourni l'occasion de poursuivre tous les détails de ce phénomène. A ce moment [1], les cellules ont conservé l'aspect caractéristique qui les fait reconnaître depuis leur lieu d'origine, la chambre terminale; elles ont simplement acquis des dimensions graduellement plus considérables au fur et à mesure qu'elles ont avancé dans l'ovariule. Les cellules épithéliales qui les séparent, subissent bientôt des altérations : les minces membranes qu'elles constituent encore cèdent à la pression qu'elles subissent et il n'est pas rare de voir que des éléments nutritifs voisins se fusionnent. D'autres fois, à l'endroit où la chambre vitelline se continue avec le follicule ovarique, on voit, d'après les cas, une ou plusieurs cellules s'écoulant dans l'œuf. A ce moment, on ne distingue plus de séparation nette entre celui-ci et les éléments qui viennent le grossir; seuls, les noyaux ayant gardé leur aspect, leur forme et leur structure, indiquent encore le nombre de cellules pénétrant ou ayant pénétré, car, pendant longtemps encore, ils conservent leur intégrité parfaite. Il peut se faire parfois que la cellule nutritive, avant d'aller joindre son cytoplasme au vitellus ovulaire, déverse dans ce dernier son noyau qui, s'écoulant comme une masse semi-liquide, passe dans le vitellus sans subir aucune altération (pl. III, fig. 1 et 4). Il nous est arrivé de voir que, dans

[1] La chose est connue et admise depuis longtemps déjà (Stein, Wagner, Lubbock, etc.).

certains cas, cet écoulement s'accompagnait d'une désagrégation poussée très loin ; il en résultait une coulée de nucléine fragmentée, se maintenant entière, parfaitement reconnaissable par les réactifs et ne contractant aucune fusion avec le vitellus ambiant.

Avant leur pénétration dans l'ovule, les noyaux peuvent parfois se fusionner ; la figure 2 de la planche III est très démonstrative à cet égard : quatre cellules nutritives voisines, par suite de leur accroissement considérable, ont déchiré la mince membrane épithéliale qui les sépare, et à la hauteur de ces solutions de continuité, on voit nettement que les noyaux ouverts eux-mêmes laissent échapper leur chromatine qui se divise en des granulations très fines, mais sans se mélanger au cytoplasme. Dans cet état de division même, on voit que les constituants du noyau conservent leur identité pleine et entière. C'est probablement aussi sous forme de coulée chromatique que nous aurions pu retrouver ces noyaux, si le hasard des recherches nous avait fait fixer l'ovaire quelque temps plus tard.

Le cytoplasme nutritif, au contraire, ainsi qu'il a déjà été dit, arrivant dans le vitellus, se confond absolument avec celui-ci et il est rare que les réactifs le fassent encore apparaître quand il a quitté la logette nutritive.

Korschelt (30) a dit que, pendant que les cellules nutritives déversent vers l'ovule leurs produits de sécrétion, la vésicule germinative se porte à leur rencontre et modifie complètement son aspect. A notre tour, nous constatons de plus qu'elle se porte *vers les noyaux* des cellules nutritives, à leur entrée ; dans ce transport, elle modifie sa forme, se creuse et émet des prolongements.

Il a déjà été rappelé plus haut que des mouvements amiboïdes du noyau cellulaire ont été décrits depuis longtemps par les auteurs ; l'interprétation qu'on a donnée du phénomène varie considérablement : Korschelt, qui a pu les étudier *in vivo,* y voit une augmentation d'activité du noyau, et comme ils se montrent avec une grande évidence lors de l'entrée dans le vitellus de substances sécrétées par les cellules nutritives, il est d'avis qu'il faut les interpréter comme un signe que le noyau prend part à l'assimilation de ces substances ou qu'il exerce une influence considérable sur l'activité absorbatrice de l'œuf. Ce qui nous a particulièrement intéressé,

c'est l'entrée du noyau des cellules vitellines dans l'ovule et le sort qui lui est réservé. Il a été dit qu'il conserve son intégrité complète (s'il se déagrège, sa chromatine reste toujours parfaitement reconnaissable) et qu'il entre dans l'ovule, soit avant, soit après son cytoplasme, quelquefois aussi en même temps que lui. Le vitellus émet des prolongements très épais, — grossiers lobopodes, — qui se portent dans la direction de la chambre nutritive, et englobe les cellules à la façon d'une amibe : il se conduit ici en véritable phagocyte. Le noyau, de son côté, peut parfois aussi se porter à la rencontre des éléments nutritifs et, dans ce cas, affecter un aspect polymorphe (fig. 3, pl. III). Ces mouvements de la vésicule germinative observés dans nos préparations doivent s'interpréter comme étant de nature amiboïde et destinés à englober l'élément nucléaire qui, dans ce cas, est attiré tout entier dans une excavation où se passeront subséquemment les phénomènes caractéristiques de l'absorption.

Il est un fait qui frappe, quand on observe dans sa totalité un tube ovarique de *Dytiscus :* à une certaine distance de la chambre terminale, on constate que la chromatine est quasi absente dans les vésicules germinatives et que cette particularité se maintient inaltérée jusqu'au niveau où les cellules nutritives, ayant atteint leur épuisement fonctionnel, cessent de sécréter et passent dans l'ovule [1]. A ce moment même, tant qu'un noyau ne soit descendu jusque dans l'œuf, on constate cette pauvreté en chromatine dans la vésicule. Plus loin, au contraire, elle augmente et devient même abondante; entre ces deux niveaux s'est faite une absorption de noyaux dont la chromatine est allée enrichir la vésicule. La figure 3 de la planche III montre d'une façon évidente que le noyau de la cellule vitelline, encore entier dans la plus grande partie de son étendue, a perdu sa membrane en un point de sa surface tournée vers la vésicule et déverse ses granulations dans celle-ci, qui l'embrasse dans une large excavation; elle-même est très pauvre en nucléine. Notre figure 1 de la planche III est plus démonstrative encore pour l'idée que nous développons en ce moment. La vésicule germi-

[1] La diminution de la chromatine a été longuement étudiée dans le travail de Stuhlmann (**61**).

native, en effet, déjà très riche en matière chromatique, a pris une forme toute spéciale qui indique qu'elle travaille activement à englober un noyau, un autre se trouvant déjà être entouré de toutes parts. Le vitellus est creusé d'une traînée claire qui conduit vers la chambre nutritive, indiquant d'une façon incontestable le trajet parcouru par les noyaux dans leur descente vers la vésicule; à la limite de la chambre nutritive, on voit encore deux noyaux s'écoulant dans l'ovule et il est facile de prévoir qu'eux aussi sont engagés dans la même direction. Il n'y a, au contraire, rien qui puisse faire reconnaître le cytoplasma des cellules nutritives écoulées dans le vitellus : il y a fusion complète.

Il résulte de ces détails que vitellus et vésicule se nourrissent tous les deux et *séparément* du contenu de la chambre nutritive; l'un et l'autre s'emparent d'éléments à fonction physiologique terminée, c'est-à-dire que leur développement et leur accroissement se feront par un même mode physiologique que pour les autres tissus embryonnaires. On pourrait dire, à la rigueur, que les cellules nutritives reprennent, dans cette phase, leur rôle génital, puisqu'elles vont augmenter les constituants de l'ovule qui se développent aux dépens de leurs parties similaires et qu'elles contribuent ainsi à l'édification de la cellule sexuelle.

Il n'est pas fréquent de voir, aussi distinctement que nous venons de le décrire, la vésicule s'enrichir du contenu nucléaire de la chambre nutritive : nous-même, nous ne l'avons observé d'une façon frappante que sept fois chez le Dytique et une fois dans l'ovaire de Carabe; le plus souvent, on constate que les noyaux descendant dans l'ovule en plus ou moins grand nombre, s'y maintiennent longtemps dans leur état normal (fig. 4, pl. III). Dans ce dernier cas, ils s'épuisent lentement, et la chromatine, diffusant dans le vitellus, pénètre probablement à l'état de division extrême dans la vésicule. Tout semble du moins imposer une pareille manière de voir, et particulièrement le fait, déjà signalé pour le noyau des cellules vitellines, que la chromatine peut s'écouler du noyau sous la forme d'un courant finement granuleux, se produisant dans la direction de la vésicule.

Korschelt décrit et figure une zone claire autour de la vésicule dans laquelle celle-ci envoie des prolongements et acquiert cet aspect amiboïde

caractéristique; l'auteur la compare à la « *Mantelschicht* » de Leydig. Nous ne l'interprétons pas comme une couche vitelline, mais comme le résultat de l'accumulation de la chromatine venue des noyaux des cellules nutritives : elle se colore, en effet, d'une façon intense par les réactifs ordinaires de la nucléine. Avant que ne débute la descente des cellules vitellines dans la logette ovulaire, on ne constate pas trace de cette couche (fig. 3, pl. III); elle s'ébauche, au contraire, pour s'accroître par la suite, après que les premiers noyaux nutritifs sont descendus de la chambre nutritive (fig. 1 et 4, pl. III). Brass, dans ses études sur les *Amibes* et les *Infusoires* (14), dit que la chromatine qui, d'après lui, n'est pas une partie vivante et active du noyau, doit être considérée comme un produit de l'assimilation de substances nutritives. Dans le cas de l'ovule de *Dytiscus,* nous sommes d'avis, au contraire, que si une partie de la chromatine de la vésicule germinative est d'origine nutritive, elle possédait déjà le caractère chromatique avant son entrée et qu'elle ne fait qu'en augmenter la quantité préexistante. Chez *Carabus* aussi, il nous est arrivé de revoir cette couche chromatique; de même que chez *Dytiscus,* elle avait une surface externe nette et parfaitement sphérique, et il en était ainsi encore du côté interne, contrairement à celle de *Dytiscus,* qui présentait des boursouflures rappelant absolument les figures 33 et 37 à 39 de Korschelt. Krassilstschik, qui a fait des observations *in vivo* sur l'ovaire d'*Aspidiotus* (34), décrit un phénomène qui se rapproche de celui que nous venons de signaler : il a vu que les cellules nutritives déversent leur chromatine dans l'ovule où se trouvait irrégulièrement répandue, sous forme de peloton, celle de la vésicule germinative. Dans un second travail, cet auteur signale le fait que chez *Phylloxera* et chez les *Aphides*, le noyau de la cellule nutritive, auquel aboutit le pédicule d'un ovule situé dans une chambre folliculaire, se gonfle considérablement : il y voit le prélude de l'émigration nucléaire. Dans les deux travaux, il nie que le cytoplasme nutritif intervienne en quoi que ce soit dans l'accroissement de l'ovule. Signalons encore en passant l'opinion de Will, d'après laquelle des noyaux des cellules nutritives, une fois descendus dans le vitellus, s'y accroissent et sortent finalement en partie pour former les noyaux des cellules épithéliales : le vitellus, d'après cet

auteur, naîtrait uniquement de la chromatine de la vésicule et des noyaux nutritifs.

Le phénomène de l'englobement d'un noyau par un autre (vésicule germinative) n'a jamais été signalé, à notre connaissance du moins : c'est un cas de *caryophagie,* et le noyau lui-même mériterait le nom de phagocyte, ou mieux celui de *phagocaryon.* L'ovule est un phagocyte au second degré, attendu que ses deux parties constituantes englobent, chacune pour sa part, un élément à l'état solide ou du moins semi-liquide.

A. Brandt (12) est d'avis que les cellules nutritives fournissent à l'ovule des particules qui se détachent de leur surface : dans aucun cas, nous n'avons pu réussir à retrouver ce détail et dans toutes nos préparations ces éléments se déversaient dans leur totalité dans l'ovule, à moins d'admettre que les particules signalées par cet auteur ne correspondent aux granulations sécrétées dans la chambre nutritive. Nos résultats diffèrent sous d'autres rapports encore de ceux obtenus par le professeur Brandt. Balfour (3) dit textuellement à la page 44 : « Après avoir atteint un maximum, elles » s'atrophient graduellement et enfin sont absorbées sans se fusionner en » apparence directement avec l'œuf... On ne sait pas encore bien si les » cellules vitellines élaborent les particules du vitellus ou transmettent le » nutriment à l'œuf. » D'après Korschelt (30), l'accroissement de la vésicule se fait aux dépens de substances liquides; il fait remarquer que, par cet apport, le noyau ovulaire augmente de volume dans le cours de son évolution et il ajoute avec raison que les dimensions diminuent au contraire vers la période de la maturation. Will aussi signale ce détail; mais c'est surtout Stuhlmann qui en a fait une étude approfondie (61). Il n'est pas impossible qu'entre les nombreux matériaux apportés, la vésicule ait fait un choix et se soit débarrassée (par une expulsion ultérieure) des moins favorables. Il ne nous est cependant pas arrivé de pouvoir assister à cette expulsion élective et nous n'avançons l'idée que comme simple hypothèse; ajoutons encore qu'en effet, vers l'époque de la maturité, l'ovule montre une affinité plus grande pour les matières colorantes nucléaires, ce qui semblerait indiquer que les substances chromatiques se sont condensées. Il y aurait peut-être lieu de rapprocher de cette hypothèse les résultats obtenus

en 1886 par Blochmann (11) : il a vu la vésicule germinative de la *Fourmi* et de la *Guêpe* émettre des bourgeons qui se détachent et se répandent dans le vitellus pour y disparaître.

L'épithélium, comme il a déjà été dit, forme dans l'ovaire de Dytique des chambrettes nutritives et folliculaire qui accompagnent l'œuf et les cellules vitellines dans leur marche vers les canaux excréteurs. Dans le germigène déjà, il peut sécréter des boules aux dépens desquelles l'ovule augmente ses dimensions. En 1885, Brandt (12), rappelant qu'il a signalé le fait de l'intervention de l'épithélium dans l'accroissement ovulaire par la production de boules, réclame la priorité de cette découverte. Aujourd'hui la chose est généralement admise, malgré les travaux de Will, qui conduisent à d'autres conclusions.

Il est cependant certains points de détail que l'on n'a pas décrits et au sujet desquels nous communiquerons ici nos résultats. L'ovaire du *Dytique,* et tel est le cas pour la plupart des Insectes, puise dans le corps adipeux, au sein duquel il se trouve plongé, des éléments nutritifs ; ceux-ci sont tout d'abord repris par l'épithélium, qui les passe ensuite à l'ovule : les liqueurs à l'osmium les font apparaître avec évidence. La chose est surtout frappante dans nos preparations de *Periplaneta,* d'*Æschna,* d'*Hydrophilus,* de *Carabus* et de *Dytiscus :* nous avons moins bien réussi sous ce rapport dans nos coupes sériées d'autres Insectes, mais il n'est pas impossible que le phénomène ne soit pas ininterrompu et que, dans ces conditions, il échappe parfois à l'examen. En dehors de cette particularité physiologique, l'épithélium témoigne encore d'une activité sécrétoire qui augmente au fur et à mesure que *son* ovule se rapproche de l'oviducte. Cette activité se manifeste par l'apparition dans son protoplasma de boules plus ou moins grandes, fixant ou non les matières colorantes, qui passent dans la chambre ovulaire et vont rejoindre l'ovule ; elle atteint son apogée très peu de temps avant la formation de la membrane vitelline : à ce moment, tous les éléments épithéliaux sont gorgés de ces productions sphériques et il n'est pas rare de constater que certains d'entre eux, épuisant leur pouvoir fonctionnel, projettent tout leur protoplasma transformé dans l'ovule et jouent ainsi le rôle de cellules glandulaires *olocrines* (Ranvier). L'épithélium folliculaire termine son rôle

physiologique par la production du chorion, qui formera pour l'ovule une protection temporaire.

L'ovule, prêt à tomber dans l'oviducte, a atteint le terme de son évolution : il fait partie constituante de l'organisme parfait et, à l'instar de tous les organes imaginaux, il a acquis son complet développement, grâce en partie aux matériaux lui fournis par des cellules qui se sont désagrégées et revêtent ainsi un caractère larvaire. Nos recherches sur l'ovaire du *Carabe* et du *Ver à soie* concordent dans leurs résultats généraux avec ceux obtenus chez le *Dytique*. Les préparations que nous ont fournies l'ovaire de l'*Hydrophile* et celui du *Téléphore* ont donné, de leur côté, confirmation pleine et entière en ce qui concerne l'activité épithéliale.

Après la formation du *chorion*, l'épithélium folliculaire se désagrège complètement chez tous les Insectes et fournit des matériaux précieux pour l'étude de l'histolyse typique. Nous ne nous y arrêterons pas davantage et renvoyons le lecteur à notre figure 4, planche V, qui représente un bouchon histolytique en forme de cône suspendu à l'entrée de l'oviducte; les parois épithéliales montrent une continuité ininterrompue et une transition avec ce conglomérat dans la constitution duquel entrent quelques cellules non encore complètement désagrégées. Nous n'examinerons pas la question de savoir si l'ovule arrivé dans l'oviducte se nourrit encore dans ce milieu essentiellement nutritif formé par la matière histolytique accumulée tout autour de lui; si cela était, il n'y aurait là qu'une phase de sa nutrition et de son évolution générales.

L'ovule s'est nourri, depuis son origine et pendant tout son trajet à travers la glande femelle, de substances lui fournies par les cellules épithéliales (qui elles-mêmes puisent aux réserves amassées dans le corps adipeux, édifié à son tour en grande partie aux dépens de tissus dégénérés et détruits) et par les cellules nutritives (quand elles existent), c'est-à-dire qu'il a accumulé dans son intérieur et *par phagocytose* des substances de réserve en grandes quantités, destinées aux cellules blastodermiques qui naîtront plus tard de lui. Henking, en effet, étudiant les premiers stades de développement des Hyménoptères, a constaté que les cellules ectodermiques absorbent des

granulations vitellines, et Tichomiroff a pu se convaincre du même phénomène sur les sphères de segmentation de *Calandra granaria*. Dès les premiers stades donc du développement, des phénomènes de phagocytose apparaissent déjà ; ils procurent aux jeunes cellules les matériaux nécessaires à leur entretien et à leur multiplication, tandis qu'elles-mêmes édifieront des tissus larvaires destinés à leur tour à disparaître et à nourrir par voie phagocytique les organes de l'Insecte parfait et entre autres les organes génitaux. *Tout le cycle évolutif de l'Insecte est donc basé sur le principe de la phagocytose qui peut revêtir les diverses formes exposées plus haut.*

CONSIDÉRATIONS PHYLOGÉNÉTIQUES.

Les disques imaginaux des Insectes sont des groupes de cellules embryonnaires ou des cellules embryonnaires isolées dont la prolifération s'arrête de très bonne heure, tandis que leurs voisines continuent leur évolution et édifient des organes. Ceux-ci, après une existence plus ou moins longue, dégénèrent lorsque leur activité physiologique a cessé. Depuis ce moment, les disques imaginaux reprennent leur multiplication, puisant des éléments nutritifs entre autres dans les restes de l'organe larvaire en voie d'atrophie. Telle est la marche générale, reçue en embryologie, du développement organique chez les Insectes à métamorphoses complètes.

On admet d'ordinaire que les organes génitaux ne passent pas par ce stade temporaire ou larvaire et qu'ils évoluent progressivement.

Dans les ovaires *les plus développés,* on trouve à l'état adulte, vers l'extrémité proximale des tubes, une chambre, le *germigène,* dans laquelle se rencontrent des cellules non différenciées [1] ; c'est un tissu *embryonnaire* d'origine mésodermique, dont une partie se transformera en éléments épithéliaux entourant complètement les autres et leur servant de gaine

[1] D'après les recherches de Heymons (**23**), les cellules destinées à former l'épithélium se distinguent dès l'origine des autres, qu'il nomme « génitales » et qui, dans son esprit, donneront, selon les Insectes, ou bien simplement des ovules, ou bien des ovules et des cellules nutritives.

protectrice en même temps que de glande nourricière; une seconde partie donne lieu aux cellules *nutritives* (cellules vitellines), sorte d'œufs abortifs, dont la mission *acquise* est de sécréter des matériaux nutritifs et de se détruire plus tard au profit de celles de la troisième catégorie. Quelques-unes de ces cellules vitellines dégénèrent déjà, à peine formées, dans le germigène et passent à cet état dans les ovules; d'autres sécrètent plus loin dans le tube ovarique des substances nutritives et finissent, une fois leur pouvoir sécrétoire épuisé, par se désagréger complètement. Les cellules nutritives, de même que les cellules épithéliales, ont une fonction spéciale à remplir : celle-ci a atteint son but quand l'œuf est complètement développé; mais vers cette époque elles ont cessé leur fonctionnement et, comme toujours dans ce cas, elles dégénèrent, leurs produits de désagrégation étant destinés à l'accroissement de l'ovule. Les unes et les autres contribuent donc pour une part à l'édification de la cellule sexuelle, l'ovule, qui constitue l'élément génital définitif. Enfin, une troisième partie des éléments du tissu indifférent, les futurs ovules eux-mêmes, se développent sans subir ni altération ni perte, et aux dépens des deux autres espèces. Il y a donc ici, comme dans le cas d'organes larvaires (cellules hypodermiques larvaires, par exemple), une destruction *sans phagocytose préalable*, en vue de l'édification d'organes définitifs (organes imaginaux), les cellules génitales femelles (les ovules).

Physiologiquement parlant, toutes les cellules ovariques sont donc, *à des degrés différents*, des cellules génitales; quelques-unes toutefois, à l'instar d'organes larvaires, précèdent les autres dans leur évolution, sans atteindre le but définitif, réservé aux ovules seuls, et préparent à ceux-ci le terrain. La chose est surtout frappante dans le cas d'un ovaire tel que celui du Dytique, du Carabe et du Ver à soie, où les cellules nutritives et l'épithélium qui les enveloppe, accompagnent l'œuf depuis sa sortie du germigène et dans tout son trajet à travers le tube ovarique; mais l'examen de l'Hydrophile fait reconnaître les détails d'une disposition analogue dans son ovaire : il y a simplement cette différence que les cellules vitellines restent ici groupées dans la chambre germigène, où elles forment, en dégénérant et en fusionnant

leurs produits de destruction, un matériel nutritif qui a même signification que dans l'ovaire de Dytique. Les cas énumérés plus haut du Téléphore, etc., sont identiques et n'exigent pas que nous nous y arrêtions. Depuis le germigène déjà, l'épithélium, de son côté, travaille activement à l'accroissement de l'ovule : il puise dans le tissu adipeux des substances nutritives qu'il transmet à l'ovule, et, accompagnant celui-ci dans son trajet, tout autant que les cellules nutritives, lui sécrète une membrane d'enveloppe (chorion) et finit par se désagréger et se transformer complètement à son profit exclusif. Nous en avons décrit des exemples frappants pour le Dytique, l'Hydrophile et le Téléphore. Dans l'ovariule des Homoptères (Phytophthères), les ovules, poursuivant leur route vers les canaux vecteurs, restent en communication avec la chambre terminale par un canal spécial qui leur amène le produit de la dégénérescence des cellules nutritives. L'épithélium folliculaire, de même que dans les cas ci-dessus examinés, après avoir fonctionné quelque temps comme tissu glandulaire, dégénère à son tour au bénéfice de l'ovule chez les Rhynchotes-Hétéroptères (Hémiptères) (*Nepa, Notonecta*). Chez les Orthoptères (*Periplaneta, Forficula, Meconema,* etc.) et chez les Pseudo-Névroptères (*Æschna*), les cellules nutritives manquent et l'accroissement de l'ovule se fait d'une part, comme toujours pour tous les organes en général, par l'apport venant du tissu adipeux : cet apport lui arrive par l'intermédiaire de la gaine épithéliale qui lui sécrète plus tard le chorion et contribuera par sa propre destruction finale à lui fournir une dernière réserve nutritive (fig. 4, pl. V). Le principe de la nutrition de l'ovule reste toujours le même : des éléments *de même origine blastodermique que l'œuf* (l'épithélium seul ou l'épithélium et les cellules vitellines) sécrètent des matériaux à son profit, pendant qu'ils sont encore en pleine activité physiologique, et quand, plus tard, ils dégénèrent à la suite de l'épuisement fonctionnel, il se développe à leurs dépens : le premier cas est uniquement plus simple, et le phénomène atteint alors un degré phylogénétique moins avancé.

Des cellules nutritives ont été signalées dans les ovaires de certains *Aptérygogènes :* Grassi (83), il est vrai, ajoute que ces cellules de *Collembola* ne sont pas les homologues de celles des autres Insectes. Nous ne

nous sommes pas occupé spécialement de l'anatomie des Amétaboliens, parce que nous ne devions pas nous attendre à y rencontrer des phénomènes de phagocytose, objet principal de nos recherches; mais, désireux de voir si nos considérations phylogénétiques concernant l'évolution de l'ovaire allaient se vérifier pour ce groupe, nous avons demandé à M. le Dr Willem de pouvoir examiner ses excellentes coupes totales de *Smynthurus* (Latr.). Nous avons eu la satisfaction d'y trouver une confirmation pleine et entière de nos idées : en effet, l'épithélium ovarique de cet Insecte sécrète en abondance des granulations vers lesquelles les ovules avancent des prolongements pseudopodiques pour se les incorporer; aucun élément de la glande femelle n'en impose pour une cellule vitelline. Nous ajouterons que, en comparant ces coupes aux figures du travail de Sommer (84), nous n'hésitons pas à dire que ce que cet auteur a décrit comme *cellules nutritives* correspond aux *ovules* et qu'il a attribué une signification *ovulaire* aux éléments *épithéliaux*. Il nous est avis que les *Collembola,* comme les autres Aptérygotes, ont des ovaires *sans cellules nutritives* et qu'ils occupent sous ce rapport, comme sous tous les autres, un rang phylogénétique inférieur.

Au fur et à mesure que se complique le développement des Insectes dans la série, nous voyons que l'évolution de la glande femelle se complique de son côté : sous ce rapport donc, on peut dire que, phylogénétiquement, les Insectes à métamorphoses complètes sont les plus élevés dans l'échelle; or, chez eux aussi, le double processus de la destruction et de la néoformation des organes atteint un degré plus grand de complication. L'édification des glandes génitales femelles se compliquant dans le même sens, le raisonnement nous conduit à distinguer dans l'évolution de ces organes un *tissu larvaire* (les pseudo-ovules et les éléments épithéliaux, tous deux des cellules nourricières) et un *tissu imaginal* (les ovules). L'un et l'autre sont originaires d'une même ébauche embryonnaire mésodermique dont certaines cellules (les ovules) n'évoluent comme celles des disques imaginaux proprement dits qu'après l'existence précaire d'autres qui leur ont frayé la voie et préparé les conditions favorables de développement.

Dans cet ordre d'idées, par conséquent, les ovaires des Insectes, tout

autant que les autres organes, subissent *dans le temps* une série de transformations qui rentrent dans le mode général et peuvent être ramenées à la dégénérescence et à la néoformation tissulaires. Ces modifications, pour se produire parfois tardivement et ne se bornant pas à un stade postembryonnaire très court, n'en sont pas moins parallèles à celles connues dans les autres organes; c'est assez dire que, s'il n'y a pas lieu de proclamer une identité complète, nous croyons pouvoir établir tout au moins un parallélisme entre l'évolution des organes en général et de l'ovaire en particulier.

La disposition primitive de l'organisation de l'ovaire *avec cellules nutritives* (ovaire méroïstique [Brandt, II']) se trouve réalisée dans l'organe femelle, où elles sont réunies dans une chambre spéciale, reliée (*Phytophthères*) ou non (quelques *Coléoptères*) aux follicules. Nées de l'ébauche génitale embryonnaire, elles constituent des cellules sexuelles n'arrivant pas au stade parfait : elles se développent aux dépens de matériaux leur apportés par l'épithélium ovarique, qui les puise lui-même au sang et au corps adipeux. Arrêtées dans leur évolution sans qu'elles aient pu atteindre le stade de cellules génitales parfaites, elles dégénèrent et préparent la voie et les moyens d'existence à l'ovule qui s'empare de leurs résidus. (Tel est le cas pour l'ovaire des *Rhynchotes-Homoptères* et de quelques *Coléoptères.*) Chez les *Holométaboliens,* il y a, d'une façon générale, un pas en avant dans cette disposition : les cellules nutritives, qui doivent donc être considérées comme des éléments larvaires, d'après tout ce que nous en avons vu, accompagnent dans son trajet à travers le tube ovarique l'ovule qui, de même qu'un disque imaginal, se trouve au sein de tissus à fonctions vitales qui vont s'épuisant et qui sont destinés à dégénérer; il puisera dans ces détritus larvaires des matériaux nécessaires à son développement. De même encore que les disques imaginaux proprement dits, il les utilisera pour son accroissement et ne les épuisera qu'au moment où s'achèvera son évolution; celle-ci se passant beaucoup plus tard et en dehors de l'organe où il est né (soit dans le corps de l'Insecte, dans les cas très rares de viviparité, soit, comme il arrive le plus souvent, au dehors), il *accumule* ces matériaux et les tient « en réserve » jusqu'au moment opportun. Dans le cas d'une chambre nutritive

unique, le principe est absolument le même et il n'y a qu'une différence de degré. Il y a lieu d'ajouter que, dans l'un comme dans l'autre cas, la sécrétion épithéliale collabore au résultat final : accroissement de l'ovule. Chez les Insectes à métamorphoses incomplètes, l'évolution de la glande femelle, de même que celle des autres organes, est moins compliquée, mais le principe en est le même que dans le cas d'Insectes holométaboles. Ici comme là, les organes primitifs se modifient dans le temps (destruction et néoformation), de façon à acquérir une disposition appropriée. Nous venons de voir que pour la structure de l'ovaire, le cas des Homoptères est identique à celui de quelques Coléoptères (*Hydrophile, Téléphore*). Quant aux autres Hémimétaboliens, de même que pour les Aptérygogènes, l'épithélium ovarien, après avoir sécrété des produits divers au profit de l'ovule, se désagrège et fournit ainsi encore une réserve nutritive au sein de laquelle l'œuf séjourne quelque temps. Il n'y a pas de cellules nutritives (ovaire panoïstique [Brandt, II']).

Nous pouvons résumer ces idées dans le tableau suivant, qui établit d'une façon nette que la complication se dessine pour la glande femelle comme pour les autres organes dans un même ordre phylogénétique.

A. Amétabolie.

Les *Thysanoures* et *Collembola*, c'est-à-dire les *Aptérygogènes*, qui doivent être considérés comme les Insectes-souches (types ancestraux) : il n'existe ici aucune métamorphose; les glandes génitales, de même que les autres organes, ne passent pas par les stades de transformation progressive et ont conservé une disposition toute primitive : OVAIRE SANS CELLULES NUTRITIVES.

B. Hémimétabolie.

a) Les *Archiptères;*

b) Les *Orthoptères;*

c) Les *Rhynchotes-hémiptères.*

Ces Hexapodes N'ONT POINT DE CELLULES NUTRITIVES dans l'ovaire et occupent un rang phylogénétique inférieur dans la classe des Insectes, et (c'est le cas pour les *Hémiptères*) dans l'ordre auquel ils appartiennent.

d) Les *Homoptères* ont une CHAMBRE SPÉCIALE DE CELLULES NUTRITIVES qui est reliée par un pédicule aux ovules en développement, lesquels sont situés plus bas dans le tube ovarique.

(Les Aphides qui sont *aptères* ne le sont que par *amétabolie acquise* (LANG) et manquent naturellement de métamorphoses en vue du développement des ailes; mais sous tous les autres rapports, ils ont un développement interne semblable à celui des autres Hémimétaboliens.)

C. HOLOMÉTABOLIE.

a) Quelques *Coléoptères* (*Hydrophile, Téléphore*) : TOUTES LES CELLULES NUTRITIVES SE TROUVENT ACCUMULÉES DANS LA CHAMBRE TERMINALE et se fusionnent au profit de l'ovule.

b) Les autres *Coléoptères,* les *Névroptères,* les *Hyménoptères,* les *Diptères,* les *Lépidoptères.* LES CELLULES NUTRITIVES OCCUPENT DES CHAMBRETTES SPÉCIALES qui accompagnent l'ovule pendant son développement et son trajet vers les conduits excréteurs.

Ici encore il y a des degrés : Chez les trois premiers ordres, les cellules nutritives sont accumulées dans des logettes séparées des follicules ovulaires par un étranglement de la gaine; leurs produits de sécrétion, ainsi que KORSCHELT (**30**) l'a démontré, peuvent s'écouler tantôt vers l'œuf qui les suit, tantôt vers celui qui les précède, c'est-à-dire que le mode de nutrition de l'ovule se rattache ici encore à celui rencontré chez l'*Hydrophile* et le *Téléphore,* où les cellules nutritives, toutes réunies dans une même chambre, ne sont pas destinées plus spécialement à tel œuf plutôt qu'à tel autre. Il en est autrement chez les Diptères et les Lépidoptères : là les logettes nutritives sont unies plus intimement au follicule, font corps avec lui et destinent exclusivement leurs produits à l'œuf de ce follicule; elles sont, au contraire, séparées du follicule précédent par un pédicule fortement étranglé. Il y a ici, à n'en pas douter, un pas en avant, une spécialisation plus grande, et l'on peut dire que cette dernière disposition est la plus éloignée du stade primitif et que, par conséquent, elle est la plus récente.

N. B. On peut donc conclure de ce tableau que l'évolution progressive de l'organe femelle marche de pair avec la complication organique des métamorphoses, ainsi qu'avec le développement phylogénétique.

La table synoptique ci-dessous met en évidence les points principaux de la thèse que nous venons d'exposer.

I. OVAIRES SANS CELLULES NUTRITIVES.

(*Ovaires panoïstiques* [Brandt].)

a) Les *Aptérigogènes* (formes primitives). — *A*. Amétabolie.
b) Les *Archiptères*.
c) Les *Orthoptères*.
d) Les *Rhynchotes-Hémiptères*.

II. OVAIRES A CELLULES NUTRITIVES.

(*Ovaires méroïstiques* [Brandt].)

A. Les cellules nutritives ne quittent pas le germigène. — *B*. Hémimétabolie ou Amétabolie acquise (Lang).

1. Un pédicule unit l'ovule aux cellules nutritives.

Les *Rhynchotes-Homoptères*.

2. Il n'y a point de pédicule unissant.

Certains *Coléoptères*.

B. Les cellules nutritives accompagnent dans son trajet l'ovule auquel elles sont destinées. — *C*. Holométabolie.

1. Les logettes nutritives sont séparées de leur follicule ovarique par un étranglement de la gaine.

a) Les autres *Coléoptères*.
b) Les *Névroptères*.
c) Les *Hyménoptères*.

2. Cet étranglement de la gaine n'existe pas.

a) Les *Diptères*.
b) Les *Lépidoptères*.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

I. La destruction des tissus larvaires débute chez les Insectes par voie physiologique : à la suite de la cessation fonctionnelle, il se produit des modifications chimiques et morphologiques. Cette destruction trouve donc sa cause initiale dans les tissus eux-mêmes.

II. Il arrive qu'une partie de la cellule en destruction conserve pendant quelque temps encore des propriétés vitales se manifestant principalement par l'englobement des autres constituants qui, eux, ont dégénéré : tel est le cas pour le sarcoplasme dans quelques exemples de destruction musculaire (*Myoclastes* de *Musca vomitoria, Bombyx mori, Phryganea, Forficula auricularia* et *Nepa cinerea*) examinés par nous. Ceci est conforme au mode de phagocytose signalé dans les derniers travaux de Metchnikoff traitant de la résorption de la queue des têtards. Nous croyons pouvoir employer ici le terme d'*autophagocytose musculaire* pour ce genre d'englobement de résidus par des cellules appartenant au même tissu. Ce phénomène est assez répandu dans la métamorphose des Insectes et peut suffire parfois à lui tout seul (abstraction faite de l'influence dissolvante du sang sur les éléments histologiques nécrosés) à réaliser la phase de la destruction musculaire.

III. L'autophagocytose musculaire n'est, somme toute, qu'une phase de la destruction anatomique après cessation du fonctionnement physiologique. Elle constitue un mode lent de dissolution histologique, et on peut la mettre en parallèle avec l'histolyse d'autres tissus qui débute et s'achève sans l'intervention de cellules migratrices.

IV. L'enlèvement et le transport des résidus tissulaires de la larve se font parfois par les cellules migratrices; il s'agit ici de phagocytose, telle qu'on l'entend en général. Mais il faut la considérer comme constituant un phénomène acquis, c'est-à-dire comme un progrès évolutif. Elle n'est pas, dans tous les cas, la cause déterminante de la destruction des tissus, car les leucocytes ne pénètrent dans ceux-ci qu'après que le phénomène a com-

mencé. Ils ne jouent donc qu'un *rôle secondaire* dans la résorption des tissus larvaires.

V. Il résulte de la conclusion précédente que l'autophagocytose musculaire (phase de l'hystolyse) doit être considérée comme primitive, la phagocytose vraie n'étant qu'acquise.

VI. En étudiant d'une manière systématique les métamorphoses des Insectes, on peut voir les phases par où passe la phagocytose et se convaincre que ce phénomène gagne en importance avec les progrès phylogénétiques. Laissant de côté les Insectes *amétaboles* où elle fait probablement défaut, on la voit apparaître chez les *Hémimétaboles* sous la phase primitive d'autophagocytose. Ici les métamorphoses sont lentes et progressives, sans interruption : des organes nouveaux apparaissent (les ailes, par exemple) et déterminent nécessairement des modifications plus ou moins profondes de la musculature; ces modifications marchent naturellement de pair avec l'évolution de ces organes. Chez les *Holométaboles*, où les transformations postembryonnaires s'accomplissent parfois très vite, comme c'est le cas pour les formes les plus élevées, elle est *mixte* à divers degrés, avec tendance à la *prédominance de la phagocytose vraie sur l'autophagocytose*. Cette dernière ne suffit plus.

VII. Sous le rapport de la phagocytose, l'*Ontogénie* d'un Insecte à métamorphoses complètes est la répétition de la *Phylogénie;* chez la larve, il y a *autodestruction* de certains tissus (muscles chez la Phrygane, par exemple); chez la Chrysalide se produit la *phagocytose mixte avec* (dans certains cas) *prédominance de phagocytes vrais*.

VIII. Les produits de la dégénérescence sont utilisés pour les phases nouvelles de l'évolution organique; ils sont véhiculés à cet effet, de très diverses façons.

Tantôt ils sont mécaniquement entraînés par le sang, qui lui-même peut en enlever une partie, grâce à ses propriétés dissolvantes; tantôt ce sont les autophagocytes ou les phagocytes proprement dits qui vont les uns (les premiers) dégénérer, les autres déverser leur charge histolytique aux points où règne une activité formative plus ou moins énergique à la hauteur

des organes en évolution (eux-mêmes peuvent dégénérer et servir de nutriment aux tissus en évolution).

IX. Dans tout tissu bien vivant et fonctionnant, il y a physiologiquement destruction et régénération simultanées de cellules : les unes, épuisées par fonctionnement, dégénèrent, tandis que d'autres continuent leur existence ou se multiplient. L'élément nécrosé se dissout sur place et se résorbe lentement ; la phagocytose intervient parfois pour accentuer le phénomène (Heidenhain, Stöhr, Zawarykin, De Bruyne, etc.). Celui-ci a acquis un développement considérable chez certains Insectes à métamorphoses incomplètes (autophagocytose) et plus encore chez les *Hétéromorphes* (phagocytose mixte), c'est-à-dire que chez ces animaux, les métamorphoses trouvent leur cause et leur explication dans un phénomène très répandu, mais qui a acquis ici une importance extraordinaire.

X. La distinction entre *métamorphoses complètes* et *métamorphoses incomplètes* est artificielle. Les premières se distinguent par un stade de repos caractéristique : la *nymphe*. Mais outre que ce repos est loin d'être toujours absolu et par suite essentiel, ainsi que le montre la classification admise des différentes formes de nymphes (nymphe libre — Coléoptères, nymphe emmaillottée — Lépidoptères, nymphe resserrée — Muscides), il est à remarquer que certains *Coccides* traversent un stade nymphal pendant lequel se produisent des modifications organiques profondes. Au point de vue de la phagocytose aussi, il n'y a pas de différence tranchée entre les développements postembryonnaires des *Homomorphes* et des *Hétéromorphes ;* le phénomène existe chez les deux groupes, mais prend des proportions plus considérables dans le cas de métamorphoses complètes.

XI. Chez certains Insectes (*Bombyx*), il y a réédification musculaire aux dépens de résidus nucléés. Des *myoblastes,* sarcolytes nucléés, peuvent proliférer et produire de la substance musculaire nouvelle [Vertébrés — Schaffer (**59**)]. Ainsi que l'ont décrit Kowalewsky et van Rees pour le cas de *Musca vomitoria,* les globes granuleux (Körnchenkugeln) n'interviennent jamais d'une façon *active* dans la génération du tissu contractile, contrairement à l'opinion de Weismann et Viallannes.

XII. Les cellules du corps adipeux de *Musca vomitoria* ne produisent pas, par endogenèse, des cellules embryonnaires (Viallannes).

Les leucocytes n'y pénètrent pas non plus pour s'y nourrir et proliférer ensuite (van Rees).

Pas plus que les phagocytes déjà chargés de détritus tissulaires n'y entrent dans un but de destruction (Kowalewsky).

Ces éléments constituent des dépôts de réserve et, se désagrégeant par eux-mêmes, déversent leur contenu dans les tissus imaginaux en voie d'évolution. Ils contribuent ici, comme le corps adipeux de tous les Insectes, à l'édification de tissus nouveaux après avoir servi de dépôt de réserves nutritives.

XIII. La phagocytose exercée par l'ovule dans la glande femelle est un phénomène acquis, de même que toutes les autres formes de phagocytose dans le reste de l'animal. Son importance croît avec les progrès phylogénétiques. Nous renvoyons à ce sujet aux deux tableaux du paragraphe relatif à l'évolution des organes génitaux.

XIV. Toutes les cellules qui entrent dans la constitution de l'ovaire des Insectes sont à divers degrés des *cellules génitales :* les ovules formant par leur ensemble ce que l'on pourrait appeler le *tissu génital femelle,* peuvent être considérés comme constituant une sorte d'*organe imaginal,* se développant aux dépens d'un tissu préexistant (l'épithélium) ou de deux (l'épithélium et les cellules nutritives), de même origine blastodermique, qui, ne parvenant pas au stade parfait, gardent une signification *larvaire* et se désagrègent à leur profit.

XV. L'ovule des Insectes complètement développé a amassé par phagocytose une grande quantité de substances nutritives provenant de la destruction de tissus larvaires et lui transmises par d'autres tissus (épithélium ovarique et cellules nutritives ou épithélium seul) qui se désagrègent à leur tour à son profit et acquièrent par ce fait même une signification larvaire. — Les cellules blastodermiques qui naîtront de l'ovule s'en empareront par un phénomène identique (Henking et Tichomirow). La phagocytose apparaît donc dès les premières phases du développement des Hexapodes et se retrouve dans tous les stades ultérieurs à un degré plus ou moins prononcé.

RÉGÉNÉRATION MUSCULAIRE.

Quoique cette question, d'une importance capitale pour le développement postembryonnaire, n'ait aucun rapport avec le sujet que nous traitons dans ce travail (phagocytose), nous dirons un mot de ce que nous avons eu l'occasion de constater incidemment chez *Bombyx mori*. Parmi les muscles achevant de se détruire après dégénération préalable, dans le sarcoplaste jouant le rôle de phagocyte, et dans les leucocytes remplissant les mêmes fonctions, il en est quelques-uns dont les noyaux s'hypertrophient et conservent autour d'eux une partie du protoplasma (corpuscules musculaires, myoblastes). Viallannes, dans son grand travail, exprime l'opinion que les noyaux musculaires peuvent proliférer et édifier des muscles nouveaux. Nous aussi nous avons vu de ces multiplications nucléaires se produisant avec une intensité considérable, de façon à déterminer des amas de petits noyaux, tantôt groupés irrégulièrement, tantôt rangés en séries linéaires. Çà et là, nous pouvions constater, parmi ces amas nucléaires, l'existence de figures caryocinétiques. Faut-il voir ici une néoformation musculaire? D'après Ziegler, la multiplication directe des noyaux est le prélude certain d'une destruction, d'une mort prochaine; la caryocinèse ne se rencontre que dans les cellules pleines de vigueur et destinées à une vie durable. Nous constatons les deux phénomènes dans les mêmes conditions et nous sommes d'avis que les idées de Ziegler pourraient bien ne pas trouver ici leur application dans ce cas. J. Schaffer, du reste, dans son important travail sur l'*Histolyse des muscles striés* (**59**, pp. 115 et 137), admet parfaitement que des éléments protoplasmiques musculaires ayant conservé le noyau puissent, par fragmentation de celui-ci et augmentation du protoplasme avec écartement subséquent des jeunes noyaux ainsi formés et striation du protoplasme, contribuer à la rénovation du tissu musculaire. Cet auteur propose le nom de *sarcoplaste*, alors que Klebs (**25**) et Barfurth (**5**) avaient employé avant lui le terme de *sarcoblaste*. Nous nous rallions à l'appellation plus ancienne encore de *myoblaste*.

Il peut paraître étrange que nous attribuions aux sarcoplasma des pro-

priétés tantôt phagocytaires et destructives, tantôt néoformatrices; mais si l'on songe que chez les Vertébrés, les ostéoblastes, après le développement d'un os long, rongent le tissu osseux pour agrandir la cavité et les espaces médullaires, que dans toute l'épaisseur de l'os, ils peuvent faire des ravages et enlever la substance osseuse sur des étendues relativement grandes qu'ils sont eux-mêmes appelés à combler en produisant du tissu nouveau, on pourra aisément se convaincre que dans notre esprit il s'agit, dans le cas du développement postembryonnaire des muscles de *Bombyx*, d'un phénomène identique : *myoblastes* et *myoclastes*, physiologiquement parlant, jouent un rôle analogue à celui des *ostéoblastes* et *ostéoclastes*. Il s'agirait donc uniquement ici d'un phénomène très compliqué dont nous pouvons découvrir la marche morphologique sans réussir provisoirement à fournir la solution physiologique et causale. — Rapprochons encore de ces considérations les résultats obtenus déjà en 1876 par S. Mayer et confirmés depuis lors par un grand nombre d'auteurs au sujet de la dégénérescence et de la néoformation des nerfs myéliniques. Sur des nerfs lésés par suite de sections ou par des troubles physiologiques, il a vu se former des amas granulés : une prolifération nucléaire conduit à la néoformation.

MOLLUSQUES.

Nous ne connaissons aucun travail attribuant à la phagocytose une intervention quelconque dans le développement des Mollusques, quoiqu'un grand nombre de recherches aient été entreprises depuis longtemps et jusque dans ces derniers temps au sujet de cette partie de l'Embryologie. Nous nous sommes adressé plus spécialement aux *Unionides*, à *Cyclas cornea* et à *Tritonium nodiferum*, en même temps qu'à un très grand nombre d'autres espèces. Nos recherches n'ont abouti que chez les formes énumérées et parmi elles, ce sont plus particulièrement les *Najades* qui nous ont fourni les principaux résultats; aussi, dans les pages suivantes, nous traiterons surtout d'eux, sauf à intercaler, aux endroits opportuns, nos résultats concernant *Cyclas* et *Tritonium*.

Les *Unionides* sont vivipares, la chose est connue depuis bien des années. Pendant longtemps, les jeunes embryons des *Unionides* qui séjournent dans les branchies externes de la mère, et que Leeuwenhoek avait déjà vus, ont été regardés comme des parasites : c'est ainsi que Rathke (23) les a dénommés *Glochidium parasiticum*. Ce n'est que depuis le travail de F. Leydig (18) publié en 1866 que la question a été résolue; ce savant trouva, en effet, sur des poissons d'eau douce, des *Glochidia* enkystés qu'il reconnut pour des larves de *Najades*.

En 1830, von Baer (1) a décrit l'entrée de l'ovule fécondé dans les chambrettes incubatrices de la branchie externe, et depuis lors ont paru un très grand nombre de travaux traitant du développement des *Unionides*.

Tant que le jeune embryon réside dans les branchies maternelles, il est dépourvu de tube digestif, d'organes locomoteurs et d'organes respiratoires. Il ne peut donc être question d'une entrée de substances alimentaires à l'état solide, puisqu'il n'existe pas d'*organes* pour les digérer; aussi la question du mode de nutrition se présente tout naturellement à l'esprit. Nos recherches nous ont permis de nous rendre compte de ce phénomène depuis les tout premiers stades jusqu'au moment où le *Glochidium* complètement développé se prépare à quitter la mère : la nutrition se fait principalement aux dépens de phagocytes sortis du corps maternel. Nous exposerons ci-dessous nos résultats et diviserons le texte en deux chapitres traitant successivement de la phagocytose dans les chambres incubatrices et du développement embryonnaire et postembryonnaire. Un autre est réservé à nos recherches concernant la nutrition de l'ovule depuis le début de sa genèse jusqu'au moment où il quitte définitivement l'ovaire.

MÉTHODES ET MATÉRIAUX DE RECHERCHES.

A. *Unionides.*

1. *Études sur le vivant.* — Nous avons suivi assez fidèlement les méthodes exposées dans notre travail de 1895. Des branchies renfermant des embryons ont été amputées sur des Anodontes *à diverses époques de*

l'année et ont été examinées immédiatement à frais, soit entières, soit dissociées : il s'agissait ou d'animaux venant d'être capturés, ou d'autres qui avaient séjourné pendant quelque temps dans des solutions étendues de bleu de méthylène. Les embryons sont suffisamment transparents pour permettre dans ces conditions un examen assez complet de leurs tissus. Des branchies fraîchement ouvertes et délicatement comprimées laissent échapper les embryons qui, tombant ainsi directement sur le porte-objet, se présentent dans les meilleures conditions d'observation.

2. *Objets fixés.* — Des matériaux recueillis et examinés d'après les méthodes rappelées ci-dessus ont été soumis à fixation. Ceux qui avaient séjourné dans le bleu de méthylène ont été plongés dans une solution alcoolique saturée de tanin, pour fixer la matière colorante dans les tissus; d'autres ont été traités au sublimé ou aux liqueurs osmiques, puis débités en coupes sériées et colorées sur plaque. L'extraction des embryons par compression légère des branchies a donné d'excellents résultats, parce que, de cette manière, les jeunes *Anodontes* tombant directement dans le liquide, ont été rapidement fixés dans leur totalité, et, enrobés par centaines à la fois dans la paraffine, ont été réduits en coupes très minces et sériées. De cette façon, la membrane d'enveloppe était généralement rompue, mais ce défaut de la méthode est largement compensé par ses nombreux avantages; de plus, pour obvier aux interprétations erronées, il suffit de rétablir les faits par la comparaison avec les coupes totales, fragments de branchies incubatrices, obtenues par les autres procédés.

B. *Cyclas cornea.* — Un grand nombre d'exemplaires recueillis *à diverses époques de l'année* ont été fixés au sublimé ou aux liqueurs de Hermann et de Flemming, avant ou après ablation de la coquille; il en est de même des branchies ou des fragments de branchies amputées à des animaux absolument sains et renfermant des embryons.

C. *Tritonium nodiferum.* — La station zoologique de Naples nous a fourni de *très jeunes stades* de développement de ce Mollusque : ils ont été préparés au sublimé ou à la liqueur de Hermann.

I. — Oogenèse et nutrition de l'ovule.

L'étude de l'oogenèse et de l'accroissement de l'ovule des Lamellibranches a été entreprise par un certain nombre d'auteurs. Citons, parmi les principaux, C.-G. Carus (4), von Hessling (14), Lacaze-Duthiers (16), W. Flemming (10 et 11). Aucun d'eux n'attire l'attention sur le rôle nutritif de l'épithélium folliculaire dans l'ovule des *Najades*. Cet épithélium simple, que le savant professeur de Kiel interprétait à cette époque comme une espèce de syncytium, « *un protoplasme commun à noyaux* » (van Beneden), se révèle, sous l'action des méthodes *actuelles* de technique, comme étant composé de cellules nettement délimitées; il sécrète en abondance des granulations qui, dans nos préparations (liqueurs osmiques et safranine), se colorent, les unes en noir, les autres en rouge : à l'instar de cellules olocrines (Ranvier), ses constituants finissent par transformer tout leur contenu en produit de sécrétion qui s'écoule dans la lumière du tube ovarique. Les ovules, qui sont des cellules épithéliales à évolution spéciale [von Hessling (14, p. 408) et Flemming (10, p. 263) admettent comme point de départ de l'oogenèse un des *noyaux libres* du syncytium], baignent ainsi dans un milieu granuleux qui les accompagne dans leur trajet à travers les conduits vecteurs. Au fur et à mesure que ces ovules progressent dans leur marche vers la sortie des organes génitaux, on constate, dans les préparations, que leur vitellus se charge de granulations identiques, et nous pouvons, sans hésitation aucune, admettre que celles-ci proviennent du milieu ambiant et, en dernière analyse, des cellules épithéliales folliculaires. Nous ignorons le mode suivant lequel ces granulations arrivent jusque dans le vitellus : il nous semble qu'il doit s'agir ici d'un phénomène d'imbibition ou de diffusion; toujours est-il que la présence d'une membrane homogène semble devoir exclure la possibilité d'une préhension active. Il n'en est pas moins vrai qu'il faut considérer le phénomène en question comme une nutrition de l'ovule qui offre, jusqu'à un certain degré, des ressemblances avec ce que nous avons décrit plus haut chez les Insectes. 1° Les cellules folliculaires contribuent toutes, directement ou indirectement, à l'évolution de la cellule femelle et peuvent donc être

considérées comme étant jusqu'à un certain point des *cellules génitales*. 2° Depuis les premiers stades de sa genèse jusqu'à son entier développement, l'ovule se nourrit et s'accroît aux dépens des produits de sécrétion et de destruction des cellules épithéliales : il vit donc en véritable parasite unicellulaire.

II. — Phagocytose dans les chambres incubatrices des Unionides.

Ray Lankester, dans son travail sur les huîtres vertes, a dit que « la « phagocytose étant un terrain encore inexploré chez les Mollusques, mérite » une étude minutieuse (17) ». Nous avons publié, l'an dernier, un travail étendu (5) sur la phagocytose observée chez les *Lamellibranches :* nous y concluons à un exode considérable de leucocytes à la surface de tous les épithéliums, tant muqueux que tégumentaires. Ainsi qu'il a été dit plus haut, les mêmes méthodes ont été appliquées dans notre étude de la question chez les *Unionides* femelles au point de vue du développement des embryons.

La sortie des leucocytes est en effet toujours très importante à la surface de l'épithélium branchial, mais elle s'exagère encore aux endroits où les branchies se sont transformées en chambrettes incubatrices. A ce niveau, la paroi branchiale s'est distendue considérablement et cette distension augmente avec l'âge et les dimensions des embryons y logés. A l'instar de corps étrangers, les embryons y déterminent une irritation suivie, comme toujours, d'une arrivée en nombre de leucocytes. Metchnikoff (21 et 22), ayant introduit à *Thethys* et à *Phillirhoe* des échardes, a constaté que les amibocytes affluent, et Lubarsch (20) a fait des expériences analogues avec des résultats semblables chez les *Ascidies*. Le premier auteur, et certes le plus autorisé en la matière, conclut que les leucocytes des Invertébrés réagissent contre toutes sortes de lésions provoquées ou accidentelles (22, p. 92).

Les phagocytes sortis des tissus maternels, parfaitement reconnaissables à leur noyau et à leurs inclusions, pérégrinent dans la cavité incubatrice et, se plaçant souvent à la file, déterminent par leur groupement des réseaux parfois assez étendus, logeant les embryons dans leurs mailles. Parmi eux, il y a des leucocytes libres de toute charge, d'autres sont des phagocytes

encore en parfait état de conservation, d'autres enfin subissent une désagrégation marquée; cette disposition rappelle de façon frappante celle qu'ont prise parfois les granulations sécrétées par les cellules de l'épithélium folliculaire de la glande génitale femelle; elles aussi, dans ce cas, se rangent en réticulum enserrant les ovules dans ses mailles et, de même encore que les phagocytes dans les cavités incubatrices, elles subviennent à l'alimentation ovulaire.

L'ensemble des phénomènes que l'on observe sur le vivant ou sur des coupes, montre qu'il s'agit, à proprement parler, d'une sorte de réaction de l'organisme mère contre le parasitisme des embryons. Dans les anfractuosités et les replis de la membrane ovulaire, devenue trop grande par suite du retrait de l'œuf dans les premiers stades, on trouve le plus souvent des phagocytes isolés ou groupés; çà et là, on constate que l'un ou l'autre perfore la membrane et pénètre à l'intérieur : la fixation surprend parfois l'un d'eux pendant son passage à travers la membrane, et les coupes fournissent ainsi des exemples de phagocytes partiellement pénétrés. Mais dans ce cas, il ne se produit pas d'orifice se retrouvant encore béant plus tard; nous croyons que le leucocyte passe par un pore de la membrane, grâce à ses propriétés connues de diapédèse : la membrane est élastique et il est probable qu'après le passage de la cellule sanguine à travers le pore, elle revient sur elle-même et toute trace de solution de continuité disparaît ainsi. Nous aurons à revenir encore sur le sujet dans le chapitre suivant.

Les ovules d'une chambrette incubatrice n'ont pas été fécondés tous indistinctement; c'est pourquoi quelques-uns ne se segmentent pas et dégénèrent : dans ce cas, les leucocytes arrivés par diapédèse les envahissent en nombre plus ou moins considérable et les détruisent complètement. Il en est de même parfois pour certains œufs déjà en segmentation : ils peuvent se désagréger sur place et les cellules amiboïdes se chargent de les enrober pour les écarter ainsi définitivement. Ici encore, ces dernières remplissent le rôle que nous leur avons assigné (**5**), en ce sens que leur phagocytose a pour but l'*épuration* de l'organisme auquel elles appartiennent et se réduit donc ainsi à une véritable *excrétion :* c'est un cas d'ADAPTATION FONCTIONNELLE de la phagocytose.

Si, à la suite de conditions physiologiques particulières, certains ovules

ayant déjà atteint des stades évolutifs plus ou moins avancés, dépérissent, leur corps est entamé et écarté de la même façon; mais il peut se faire que l'embryon soit arrivé à un degré de développement trop avancé pour qu'il soit encore possible aux leucocytes de détruire partie par partie tous les constituants. Alors on assiste à cet admirable travail d'ensemble d'un très grand nombre de leucocytes qui, se rangeant à la file, forment autour de l'embryon une membrane cystique l'enveloppant de toutes parts, à l'instar de celle qu'a décrite Metchnikoff (22) dans le cas du *Rhabditis* parasitant chez le Lombric (p. 84).

C'est encore un mode détourné de l'excrétion et de l'épuration : l'embryon ainsi renfermé dans cette membrane qui lui supprime toute communication avec le milieu ambiant, voit détruire par le fait même sa nuisance pour les tissus environnants; on peut dire qu'ainsi est atteinte l'élimination du parasite. Notre figure 1, planche V, représente un cas pareil. Il s'agit d'un embryon ayant déjà atteint le stade de *Glochidium*. On y reconnaît, en effet, très aisément la membrane, la coquille quelque peu froissée et déchirée par la compression, le byssus, le muscle adducteur, etc. Il nous paraît qu'il n'existe ici aucun indice de dégénérescence : tous les tissus sont normaux et nous sommes d'avis que nous avons affaire à l'enkystement d'un embryon resté isolé dans les branchies maternelles après la sortie des autres; il s'agit, en effet, d'un embryon *unique,* renfermé dans la branchie d'une Anodonte sacrifiée le 1er juin, époque de l'année à laquelle les *Glochidies* ont normalement quitté les chambres incubatrices. Dans ce cas encore, la réaction de la part de l'organisme mère contre l'embryon parasite apparaît clairement.

Le phénomène acquiert un degré d'importance considérable dans le cas représenté par la figure 5, planche IV. Il y a là non pas un seul, mais un très grand nombre d'embryons avortés formant par l'agglomération de leurs résidus un conglomérat compact dans lequel on peut encore reconnaître les coquilles représentées par quelques fragments imbriqués et fusionnés; par-ci, par-là, un point plus foncé se colorant par les réactifs nucléaires indique qu'il y a eu histolyse. En *a*, *b*, *c* et *d*, on peut se convaincre que la destruction est moins avancée, mais qu'elle est progressive et que les

embryons dont il s'agit étaient destinés à aller rejoindre le conglomérat bientôt après. Quoique dessinée à un faible grossissement, la figure permet aisément de reconnaître les leucocytes qui entrent dans la constitution de la membrane cystique enveloppante.

Nous pouvons conclure que la présence des embryons dans les chambrettes branchiales provoque de la part de la mère une réaction qui se manifeste par une diapédèse considérable de leucocytes. Ce phénomène existe normalement à la surface des épithéliums, mais s'exagère au niveau des chambrettes. Les leucocytes arrivés à la surface épithéliale ont encore conservé, quelques-uns du moins, une grande activité vitale; on peut s'en assurer par l'examen à frais, après dissociation ou mieux encore en parcourant une préparation de mucus recueilli fraîchement : ils émettent des pseudopodes et se meuvent assez énergiquement sur la plaque; arrivés dans le voisinage immédiat d'un embryon, ils s'y accolent en moulant leur corps sur la surface. Les mêmes phénomènes se passent normalement dans la branchie intacte, ce dont on peut se convaincre par l'étude des coupes. Il y a donc, entre les leucocytes de la mère et les embryons parasites, une lutte dont les phases très intéressantes révèlent chez ces derniers une grande résistance : formés d'éléments jeunes et vigoureux, ils peuvent, en général, la soutenir avec succès, mais les faibles succombent au contraire, et il en résulte que seuls les embryons normalement constitués et bien armés résistent : de là, une élimination des faibles et, pour le bien de l'espèce, il n'y a que la génération vigoureuse qui se maintienne (sélection naturelle).

La réaction de l'organisme mère débute avec l'entrée des embryons dans les branchies et dure tout le temps de leur séjour; elle se termine par l'*expulsion totale* de toute la couvée.

Faussek (**9**) a étudié le développement du *Glochidium* fixé dans la peau du poisson, après son expulsion des branchies maternelles : il a conclu à une nutrition par phagocytose, et nous aurons à revenir sur le sujet; mais nous pouvons, dès maintenant déjà, établir un parallèle entre certains de ses résultats et ceux que nous venons d'exposer. Le *Glochidium,* qui vit en parasite chez le poisson, provoque de la part de celui-ci une *réaction* qui

se manifeste par une hypertrophie épidermique et par une affluence considérable de cellules migratrices : il est des cas où celles-ci pénètrent dans le jeune Lamellibranche qui se résorbe peu à peu. L'auteur russe n'a pas eu de preuves de l'activité destructive des leucocytes, mais il a pu constater que la désagrégation de l'embryon avançait au fur et à mesure que les leucocytes affluent plus nombreux. Chez les deux hôtes si différents où l'embryon d'Anodonte parcourt son premier développement, il détermine un même phénomène de réaction dont les phases sont absolument identiques. Nous retrouverons encore cette identité dans le chapitre suivant.

Les chambres incubatrices de *Cyclas cornea* résultent de l'hypertrophie de l'épithélium entre les septa branchiaux. Stepanoff (27), en 1865, et Ziegler (28), en 1885, ont insisté sur le mode de nutrition de l'œuf et des embryons de ce Lamellibranche; les conclusions de ces deux importants travaux sont en faveur d'une nutrition exclusive aux dépens de produits sécrétés par les cellules épithéliales. Étudiant la question à notre tour, nous avons pu nous convaincre qu'il est des cas où la phagocytose intervient d'une façon très active. Ainsi que le montre notre figure 2, planche V, la cavité incubatrice est gorgée de produits de destruction, les uns de provenance épithéliale, les autres en imposant pour des phagocytes gorgés de résidus; on reconnaît également un très grand nombre de leucocytes normaux qui, de même que les phagocytes, se rencontrent dans les tissus environnants avec des caractères identiques. Il y a donc ici une réaction phagocytaire, comme chez les Unionides, contre l'embryon parasite qui continue son développement dans le corps de la mère et, ainsi que nous le verrons, à ses dépens.

III. — Nutrition de l'embryon.

Le jeune *Cyclas* passe les premiers temps de son existence dans des chambres incubatrices : ainsi que nous le verrons encore plus loin, un produit de sécrétion lui est fourni par l'épithélium; l'embryon de *Paludina* vit, dans l'utérus maternel, où se trouvent en abondance des matières albu-

minoïdes : tous deux ont un tube digestif fonctionnant déjà. Il en est tout autrement pour l'embryon d'Anodonte séjournant dans les branchies maternelles : il lui manque, en effet, un organe digestif complet et son alimentation doit se faire d'une façon absolument spéciale; telle est l'idée que l'on se fait *a priori* déjà.

Disposant de matériaux recueillis à toutes les époques de l'année sur des Najades, nous nous sommes livré, sur des préparations fraîches et sur des coupes, à l'étude de toutes les phases du développement. Il est très difficile de reconnaître les phénomènes intimes des tout premiers stades : les travaux les plus importants qui traitent de cette question le prouvent d'une façon positive. Schierholz (**25**), qui a fourni un travail très complet, ne donne guère de détails à ce sujet, et quant au mémoire de Lillie (**19**) qui a paru l'an dernier dans le *Journal of Morphology,* il n'y est question de phases caryocinétiques qu'après la première segmentation. Flemming a publié un très beau travail en 1875 (**11**); mais à cette époque, on ne disposait pas encore des méthodes actuelles; aussi n'est-il pas étonnant que ses résultats ne concordent pas avec les nôtres, obtenus par une technique perfectionnée, due en grande partie au célèbre professeur de Kiel lui-même. Il nous a été donné de poursuivre les principales phases de la maturation, de la fécondation et de la première segmentation; les détails de ces importants phénomènes ne rentrent pas dans le cadre du travail actuel; aussi, n'était que dans notre planche IV nous représentons un stade très jeune dans l'intention de faire voir qu'alors déjà débute la phagocytose, nous aurions passé ce point sous silence. Mais, à ce sujet, nous voulons dire que si, après les deux divisions caryocinétiques successives qui ont produit les globules polaires, la vésicule germinative s'est considérablement appauvrie en chromatine, on peut encore la retrouver parmi le très grand nombre de granulations vitellines; si les préparations ont bien réussi, on peut reconnaître les divers stades de la formation et de la fusion consécutive des deux *pronuclei,* de même que ceux de la première segmentation. Contrairement à ce qu'en dit le professeur Flemming (p. 198), l'œuf ne traverse pas un stade *cytodique* ou *monérulaire* et les noyaux des deux premiers blastomères ne naissent point par *voie libre* dans un « espace clair à structure dicentrique »,

mais bien par division indirecte du premier noyau embryonnaire dont on peut étudier les diverses phases sur des coupes sériées de branchies d'Anodonte fixées quelque temps après l'entrée des ovules fécondés dans la branchie externe. Ce que nous venons de dire prouve surabondamment que nos préparations ont été faites dans les meilleures conditions de fixation et de conservation.

Nous venons de voir, dans le chapitre précédent, que depuis l'entrée des ovules dans les branchies externes, la sortie des leucocytes à la surface épithéliale des chambrettes incubatrices augmente dans de fortes proportions et que, dès l'abord, on peut se convaincre qu'il s'agit ici d'une réaction de la part de l'organisme maternel. Ainsi que le montre la figure 1 de la planche IV, les leucocytes ont une grande tendance à pénétrer dans les anfractuosités de la membrane ovulaire; la chose est encore plus frappante dans les cas représentés figures 2, 3 et 4. Ils rampent à la surface, entraînant avec eux leurs inclusions et, à certains endroits, on peut reconnaître qu'ils ont réussi à passer au travers de la membrane (fig. 4), ou bien se trouvent déjà à l'intérieur (fig. 3 et 2). Dans ces cas, on pourrait croire que l'on a affaire, non à des leucocytes pénétrant ou déjà entrés, mais bien à des micromères aberrants, c'est-à-dire éloignés de leur position normale; mais il est facile de se convaincre que cela n'est pas, car les éléments en question sont totalement différents des sphères de segmentation et ressemblent en tous points aux leucocytes ou phagocytes en dehors de la membrane. Le leucocyte ou le phagocyte pénétrant à travers une enveloppe ovulaire, se rencontre à l'intérieur avec des éléments vigoureux doués de toutes les ressources de la jeunesse et le plus souvent il y trouve la mort; alors on le voit dégénérer : la membrane disparaît et le contenu se désagrège.

Le cas de la figure 2, planche IV, n'est pas très heureusement reproduit, en ce sens que le dessin ne rend pas d'une façon suffisamment claire les mouvements qui se produisent dans les sphères de segmentation. Nous aurions voulu montrer, en effet, que les macromères sont le siège de mouvements amiboïdes très énergiques, ayant pour but d'englober les cellules intruses ou leurs résidus. La sphère *a* possède un lobopode très grand, qui, de même que les prolongements amiboïdes ordinaires, débute par un courant

d'hyaloplasma, le plasma granuleux suivant par entraînement mécanique; une autre *b* montre deux lobopodes dont un partiellement hyalin, l'autre, au contraire, plus granuleux et plus foncé. A l'objection que l'on pourrait nous faire, qu'il s'agirait, dans ce cas, d'un stade de division mal interprété, nous répondrons que le noyau est complètement au repos et que dans le cas de la sphère *b* on ne pourrait également pas admettre une explication de ce genre, puisque le corps cellulaire porte deux prolongements qui certes ne peuvent rien avoir de commun avec une future cellule fille. Remarquons encore la sphère *c,* qui manifeste une tendance à englober, entre deux pseudopodes fins, un élément nucléé, lequel ne peut assurément point en imposer pour une autre sphère de segmentation, mais qui est bien un leucocyte en chromatolyse caractéristique. Il y a phagocytose de la part des blastomères qui se nourrissent, en partie du moins, de détritus leucocytaires. Le cas décrit ici est certes le plus démonstratif de tous ceux que nous ayons vus, mais bien d'autres auraient pu nous fournir l'occasion de produire des dessins confirmatifs.

Nos coupes du stade gastrula de *Tritonium nodiferum* nous montrent, à diverses reprises, que les cellules ectodermiques et endodermiques, sans quitter leur emplacement, émettent des pseudopodes s'étendant vers des granules vitellins, fort nombreux dans l'ovule de cet animal : ils les englobent, les attirent dans leur intérieur et leur font subir la fragmentation et la digestion. Ce dernier détail est nettement révélé par l'action des matières colorantes, sur laquelle nous n'avons pas besoin d'insister plus longuement. Les préparations des stades ultérieurs fournissent de belles images de cellules mésodermiques qui, à l'instar d'amibes, se déplacent activement et s'emparent des granules vitellins. Dans l'œuf de ce Gastéropode, le vitellus est très riche en matière nutritive et les blastomères y trouvent les ressources nécessaires à leur entretien et à leur évolution ultérieure : ils s'en emparent par phagocytose. Cela n'est point le cas chez l'Anodonte dont les ovules sont alécithes et il faut probablement chercher dans ce fait l'explication de la différence dans le mode de nutrition des sphères de segmentation chez les deux animaux : l'ingestion de la nourriture se fait d'après le *même*

principe (phagocytose), mais dans une espèce la substance existe dans l'ovule, tandis qu'elle est apportée, en partie du moins, dans l'autre par des cellules migratrices maternelles émigrées.

On peut rapprocher de ces faits ceux relatés par Henking (13) et par Tichomirow. Le premier, en effet, étudiant le développement des Hyménoptères, a constaté que les cellules ectodermiques absorbent des granulations vitellines au moyen de pseudopodes, et le second a vu de même, chez *Calandra granaria*, que les sphères de segmentation se nourrissent par préhension de granulations vitellines. Ces divers cas sont donc identiques en principe, c'est-à-dire que les blastomères de plusieurs groupes d'animaux peuvent se conduire en véritables phagocytes.

Loin de nous l'idée que tel est le mode exclusif de nutrition des embryons d'Anodonte; nous croyons, au contraire, que ceux-ci, passant leur premier développement au sein des branchies, bénéficient, dans ce milieu, des conditions extraordinairement favorables de nutrition, par voie de diffusion. Ainsi que nous l'avons exposé ailleurs (5), *les leucocytes* (des Najades) *sortant à la surface des muqueuses et entre autres des branchies, sont tous ou presque tous porteurs d'inclusions que nous avons reconnues provenir d'éléments dégénérés, d'organes en activité physiologique ou de substances étrangères venues du dehors.* Arrivés à la surface, ils se trouvent dans des conditions nouvelles, auxquelles beaucoup ne résistent plus guère, et tombent bientôt en dégénérescence; dans les chambres incubatrices, on l'a vu plus haut, il sort également beaucoup de leucocytes encore normaux, et c'est parmi eux qu'on rencontre les plus vaillants et les plus propres à la lutte dont il a été question dans le chapitre précédent : c'est grâce à eux que se forment ces kystes autour d'embryons affaiblis, dégénérés ou restés sur place au moment où toute la couvée a été mise en liberté. Mais les autres, très nombreux et agglutinés par le produit des cellules épithéliales mucipares, forment un milieu essentiellement nutritif. La figure 1 de la planche V représente une de ces bourres histolytiques au sein desquelles se trouve parfois logé un embryon. Il est probable que de ces matériaux passent *par diffusion* dans l'embryon et contribuent ainsi à son entretien : c'est donc

aux dépens de substances alimentaires provenant des tissus de la mère et apportées *par la voie phagocytique* que se nourrit l'organisme, en même temps que les cellules sanguines qui arrivent par réaction et engagent la lutte avec lui, peuvent encore, dans une certaine mesure, lui servir de nourriture.

C'est là une phase nouvelle de la phagocytose : le terme de ce phénomène est généralement considéré comme atteint quand la cellule ayant englobé une substance solide, nuisible ou pouvant le devenir pour l'économie, l'a digérée pour recommencer ou non aussitôt après le même fonctionnement, ou qu'elle l'a « remisée » dans son intérieur, tandis qu'elle-même se fixe et ne prend plus aucune part à l'activité physiologique du corps ou qu'elle quitte celui-ci définitivement. Mais dans le cas d'une Anodonte portant des embryons dans ses branchies, les phagocytes, chargés des produits d'usure physiologique et d'autres inclusions, émigrent à la surface des chambrettes branchiales et vont y servir à l'entretien des tissus des jeunes. Quant aux leucocytes encore absolument vides et accourus dans un but de réaction et de protection de l'organisme mère contre le parasite, ils tombent fréquemment victimes eux-mêmes et contribuent pour leur part à l'évolution des embryons; ce n'est, le plus souvent, que dans le cas où ceux-ci sont affaiblis qu'ils parviennent à remplir leur mission : réaction se manifestant sous forme de destruction et d'enlèvement de l'embryon parasite par englobement ou par formation d'un kyste.

C'est donc en grande partie aux dépens de la *phagocytose (suivie de diapédèse) se passant dans le corps maternel* que le jeune embryon d'Anodonte se développe pendant tout le temps qu'il passe dans les branchies, même quand il a déjà formé son manteau et sa coquille provisoires.

Les préparations obtenues à frais sont parfois très instructives à cet égard. C'est ainsi qu'on peut rencontrer un leucocyte ou un phagocyte en tous points semblables à ceux de la mère, se mouvant énergiquement encore entre la valve et la membrane du glochidium, et si l'animal sur lequel on a recueilli l'embryon a séjourné quelque temps dans une solution étendue de bleu de méthylène (**5**), on se trouve dans des conditions des plus favorables pour interpréter le phénomène. La liqueur de Hermann révèle

dans leur intérieur l'existence de granulations graisseuses en plus ou moins grand nombre : tel est aussi le cas pour les cellules mésodermiques glochidiennes, qui en sont parfois gorgées, de même que les grandes cellules palléales et les cellules sensorielles. Nous sommes convaincu que cette graisse est d'origine externe, provenant en partie des cellules épithéliales folliculaires de l'ovaire, remontant d'autre part aux phagocytes sortis du corps maternel et apportée soit *directement,* soit *par diffusion* (avec décomposition et synthèse). Ne l'oublions pas, le tube digestif ébauché ne fonctionne pas encore chez l'embryon, et les aliments devant servir à son entretien et à son accroissement doivent lui être apportés dans un état assimilable.

A un moment donné, les Glochidies quittent les branchies maternelles et vont se fixer sur le corps d'un poisson osseux par un phénomène des plus curieux, étudié et décrit par Forel (12), Braun (2 et 3), Schmidt (26) et Schierholz (24 et 25). Plusieurs de ces savants se sont occupés de l'évolution ultérieure de la jeune Anodonte, mais il n'y a guère que Braun et Faussek (9) qui aient fourni des données concernant sa nutrition pendant cette nouvelle existence parasitaire; celle-ci peut durer des semaines ou des mois, selon la température régnante; sa durée normale est de 72 à 73 jours (Schierholz). En se fixant sur la peau du poisson, l'embryon déchire l'épiderme et saisit avec les crochets de ses valves des fibres dermiques et des parties osseuses (nageoires). L'épiderme aussitôt commence à proliférer et entoure bientôt le parasite de toutes parts.

Le tube digestif ne possède toujours pas encore de stomodæum et ne fonctionne par conséquent pas. Braun (2 et 3) attribue à une prolifération fungiforme des grandes cellules cylindriques du manteau, le rôle de résorber les tissus de l'hôte emprisonnés entre les deux valves; elle aurait encore pour fonction de dissoudre au profit de l'embryon les sels calcaires du tissu osseux. Les résultats de Faussek (9) ne concordent pas en tous points avec ceux que nous venons de résumer : les débris tissulaires provenant des désordres causés par l'entrée du *Glochidium* dans la peau du poisson constituent la première nourriture dont s'emparent les grosses cellules palléales pour la

soumettre à la digestion intra-cellulaire. Le derme aussi subit des altérations profondes dans le voisinage immédiat de l'embryon : dégénérescence des tissus au profit de l'évolution de ce dernier. Les leucocytes arrivent en grand nombre, indubitablement dans un but de défense (réaction) : l'auteur croit que l'embryon se nourrit aussi en partie de ces éléments, s'il l'emporte contre eux dans la lutte.

Il arrive que le parasite s'arrête dans son développement; alors se fait dans la peau du poisson une migration de leucocytes plus considérable que d'habitude vers le kyste qu'ils envahissent de toutes parts et dont ils détruisent le contenu englobé partie par partie jusqu'à disparition complète (résorption); il n'est pas rare toutefois que, dans ce cas, le kyste se rompe du côté de la surface du corps et que son contenu de même que les leucocytes se perdent par l'orifice ainsi formé.

Les larves des Unionides de l'Amérique du Sud ne possèdent pas de crochets aux bords libres de leur coquille : ils constitueraient pour elles des organes inutiles, car elles ne vont pas vivre sur la peau des poissons [von Ihering (15)]. Sorties des branchies maternelles, elles sont suffisamment développées pour mener une vie libre : leur tube digestif, entre autres, est complètement formé. Il n'en est pas de même de nos Anodontes, qui doivent à ce moment-là encore achever leur développement embryonnaire : les crochets de leurs coquilles sont des *organes acquis* qui leur permettent de continuer une vie parasitaire chez un hôte nouveau : leur existence s'y passe dans des conditions quasi analogues et leur nutrition y est essentiellement *phagocytique.*

On peut faire un parallèle entre les conditions d'existence de la larve chez ses deux hôtes. Son entrée provoque une *réaction :* chez la mère, distension des parois branchiales (formation de la chambre incubatrice) et grande émigration de leucocytes chargés d'un rôle de protection; dans la peau du poisson, formation de kyste (chambre incubatrice) par prolifération épidermique et afflux de leucocytes dans le même but que ci-dessus. Au point de vue de la *nutrition,* l'embryon utilise les leucocytes et les éléments

phagocytaires (et leur contenu, tel que des résidus histolytiques) fournis par le corps de la mère d'un côté, et de l'autre, des débris tissulaires et les leucocytes et les phagocytes du poisson. Dans les branchies maternelles, un embryon chétif ou affaibli est envahi par les phagocytes : ou bien ils le détruisent, ou bien ils déterminent autour de lui une membrane cystique qui le rend inoffensif et dans lequel il finit par se détruire; dans le même cas, les cellules migratrices du poisson envahissent la logette dermique et en détruisent le contenu (résorption); le résultat est le même dans les deux cas, c'est-à-dire que la nuisance du parasite est arrêtée. Nous pouvons donc conclure qu'entre hôte et embryon il existe dans les deux cas une lutte incessante qui se termine au profit du plus fort, et dans les branchies de la mère comme dans la peau du poisson, la jeune Anodonte vit en *parasite*.

Nous n'avons pas observé les premiers stades du développement de *Cyclas cornea :* il nous est donc impossible de fournir des détails au sujet du *mode* de nutrition des très jeunes embryons. Il a été rappelé plus haut que Stepanoff (27) et Ziegler (28) attribuent exclusivement l'entretien de ceux-ci à une sécrétion de l'épithélium de la chambre incubatrice. Cette sécrétion est très intéressante à observer dans les préparations histologiques; nous n'en donnerons pas une description, puisque le sujet s'écarte trop de la question que nous traitons.

Il a déjà été dit que des phagocytes et des leucocytes se rencontrent en grand nombre dans la chambre incubatrice de *Cyclas*. De même que chez les Najades l'exode à ce niveau de ces cellules migratrices normales ou transformées s'exagère considérablement, par réaction de l'organisme mère contre l'embryon parasite. Les préparations qui nous ont servi à cette étude ont été obtenues après fixation d'objets absolument frais et ont parfaitement réussi. Il suffit de jeter un coup d'œil sur la figure 2 de la planche V pour se rendre compte de nos résultats. Le tissu conjonctif, entourant de toutes parts le tissu épithélial de la chambre incubatrice, renferme un grand nombre de leucocytes et de phagocytes en tous points semblables à leurs correspondants arrivés jusque dans la cavité incubatrice après perforation de l'épithélium : la figure en représente encore un grand nombre entamant ce tissu

ou le franchissant. Cet exode d'éléments migrateurs constitue, avec le produit de la sécrétion épithéliale, un apport nutritif des plus riches pour l'embryon.

La phagocytose intervient donc dans la nutrition de l'embryon de *Cyclas*, mais encore une fois, comme chez les Najades, il s'agit ici d'une adaptation fonctionnelle : les phagocytes destinés primitivement à l'épuration des tissus de la mère arrivent par diapédèse, en compagnie des leucocytes appelés par réaction, jusqu'à la surface épithéliale et vont y servir finalement à l'entretien d'un nouvel organisme [1].

Les substances nutritives accumulées dans la chambre incubatrice passent dans le tube digestif de l'embryon qui fonctionne longtemps avant la mise en liberté. Les préparations font souvent reconnaître, dans la lumière du tube digestif, les produits de sécrétion, de même que les phagocytes ou leucocytes avalés.

Nos recherches chez *Cyclas* n'ont donc conduit qu'à faire voir l'avantage résultant, pour l'embryon, de la phagocytose qui se fait dans le corps de la mère : elle constitue, à côté de la sécrétion épithéliale, un apport de substances nutritives. Les résultats auraient été plus importants si nous avions pu réussir à retrouver les stades de *phagocytose active* décrite chez l'Anodonte : il est probable qu'ils existent, car pendant les premières phases, l'embryon de *Cyclas* se trouve dans des conditions assez semblables à celles de l'*Anodonte,* et, à moins d'admettre que les aliments y passent *exclusivement* par diffusion, on peut s'attendre à voir les sphères de segmentation s'en emparer activement. Pendant les stades ultérieurs, les substances nutritives, si abondamment représentées dans les logettes, diffusent jusque dans le corps de l'embryon; mais cet état ne dure probablement que fort peu, attendu que de bonne heure déjà le tube digestif commence à fonctionner.

[1] Aucune de nos *nombreuses* préparations de *Cyclas* ne nous a fourni un exemple d'un enkystement (par leucocytes) d'embryons faibles, atrophiés ou détruits, comme cela avait été le cas dans nos recherches sur les *Anodontes*. Nous n'en concluons pas néanmoins que ce phénomène ne se produit pas; nous dirons même qu'*a priori* déjà nous croyons qu'il doit se rencontrer parfois, étant donné que les conditions générales d'existence sont les mêmes pour les embryons de ces deux espèces de Lamellibranches.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

NAJADES.

I. Toutes les cellules épithéliales des follicules ovariques contribuent, à des degrés différents, à l'édification des ovules et sont jusqu'à un certain point des *cellules génitales :* certaines d'entre elles deviendront des ovules, tandis que les autres leur fourniront par sécrétion les éléments nutritifs. Dès le début de sa genèse, la cellule-œuf vit en parasite aux dépens des autres constituants des follicules.

II. L'exode de leucocytes et de phagocytes qui se produit normalement chez l'Anodonte à la surface des muqueuses (voir notre travail de 1895), s'exagère dans les logettes incubatrices depuis le moment de l'entrée des ovules fécondés ou non.

III. L'augmentation du nombre de leucocytes est l'expression de la réaction de l'organisme mère contre l'embryon parasite.

IV. La lutte entamée contre l'embryon parasite par les leucocytes maternels donne lieu à une sélection : seuls les embryons vigoureux sont conservés.

V. Cette lutte contre l'embryon dans les branchies maternelles (avec destruction ou enkystement) constitue une adaptation fonctionnelle du phagocytisme, en ce sens que, chargées primitivement de l'épuration de l'organisme mère, les cellules sanguines concourent encore à ce but en débarrassant les chambrettes des jeunes avortés ou affaiblis qui par leur accumulation pourraient, à un moment donné, amener des causes de troubles physiologiques. Si, au contraire, la lutte se termine à l'avantage de l'embryon, ils servent à son entretien, ce qui constitue une autre phase d'adaptation.

VI. Il y a deux phases dans la nutrition par phagocytose de l'embryon :

1° *Phase active* (ou directe) : les cellules embryonnaires dévorent les phagocytes et leucocytes arrivés par diapédèse jusqu'à la surface de l'épithélium;

2° *Phase passive* (ou indirecte) : histolyse des phagocytes et des leucocytes, et nutrition par diffusion (le tube digestif n'existe pas encore).

VII. La nutrition par phagocytose directe ou indirecte continue durant tout le séjour de l'embryon dans les branchies de la mère.

VIII. L'embryon continue sa vie parasitaire dans les tissus tégumentaires du poisson.

IX. Il y a un parallélisme complet entre les conditions d'existence et les phénomènes nutritifs intra-branchiaux (Anodonte mère) et intratégumentaires (Poisson).

CYCLAS CORNEA.

N. B. (Nous n'avons pas étudié l'oogenèse ni observé les jeunes stades de développement [1].)

X et XI. Voir II et III.

XII. L'embryon se nourrit du produit de la sécrétion de l'épithélium de la chambrette incubatrice et (adaptation fonctionnelle de la phagocytose) des leucocytes et phagocytes maternels y arrivés par diapédèse. (Pour le motif signalé plus haut [1], les détails nous manquent concernant la *phase active* de la phagocytose.)

XIII. Le tube digestif fonctionne avant que l'embryon ne quitte le corps de la mère.

TRITONIUM NODIFERUM.

XIV. Les cellules des trois feuillets blastodermiques se nourrissent activement de granules vitellins par *phagocytose*.

[1] Page 96.

(Mémoire déposé à l'Académie le 31 juillet 1896.)

BIBLIOGRAPHIE.

A. INSECTES.

1. Balbiani, Article publié par la *Gazette médicale de Paris*, 1865.

2. Idem, Sur l'origine du follicule et du noyau vitellin de l'œuf chez les Géophiles. (*Zool. Anz.*, VI, 1883.)

3. Balfour, Embryologie et organogénie comparées.

4. Barfurth, Die Rückbildung des Froschlarvenschwanzes und die sogenannten Sarkoplasten. (*Arch. f. mikrosk. Anat.*, Bd. XXIX, 1887.)

5. Idem, Zur Regeneration der Gewebe. (*Ibidem*, Bd. XXXVII, 1891.)

6. Bataillon, La dégénérescence musculaire dans la queue des larves d'Anoures et la phagocytose. (*C. r. de la Soc. de Biol.*, II, 1890.)

7. Idem, Recherches anatomiques et expérimentales sur les métamorphoses des Amphibiens anoures. (*Annales de l'Université de Lyon*, t. II, 1891.)

8. Idem, A propos du dernier travail de M. Metchnikoff : Sur l'atrophie des muscles pendant la transformation des Batraciens. (*C. r. de la Soc. de Biol.*, IV, 1892, n° 9.)

9. Idem, Quelques mots sur la phagocytose musculaire, à propos de la réponse de M. Metchnikoff à ma critique. (*Ibidem*, n° 13.)

10. Blochmann, Ueber eine Metamorphose der Kerne in den Ovarialeiern und über den Beginn der Blastodermbildung bei den Ameisen. (*Verhandl. der Nat. Med. Ver.*, Heidelberg, Bd. III.)

11. Idem, Ueber die Reifung der Eier bei Ameisen und Wespen. (*Festschrift des Nat. Med. Vereins*, Heidelberg, 1886.)

11'. A. Brandt, Ueber die Eiröhren der Blatta (Periplaneta) orientalis. (*Mémoires de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, t. XXI, n° 12, 1874.)

12. Idem, Ueber das Ei und seine Bildungsstätte. Ein vergleichend-morphologischer Versuch mit Zugrundelegung des Insekten-Eies, 1878.

13. Idem, Die Ernährung und das Wachsthum des Dotters im Insekteneie. (*Zool. Anz.*, 1885.)

14. Brass, Die chromatische Substanz in der thierischen Zelle. (*Zool. Anz.*, 1883.)

15. Bremer, Ueber die Muskelspindeln nebst Bemerkungen über Structur, Neubildung und Innervation der quergestreiften Muskeln. (*Archiv. f. mikrosk. Anat.*, Bd. XXII.)

16. C. De Bruyne, Contribution à l'étude de la phagocytose. (*Mém. cour. et mém. des savants étrang. publiés par l'Acad. roy. de Belg.*, t. LIV, et *Arch. de Biol.*, t. XIV, 1895.)

17. Fol, Sur l'origine des cellules du follicule et de l'ovule chez les Ascidiens. (*C. r. de l'Acad. des sciences de Paris*, 1883.)

18. Idem, Sur l'œuf et ses enveloppes chez les Tuniciers. (*Rec. zool. suisse*, t. I, 1883.)

19. Ganin, Beiträge zur Kenntniss der Entwicklungsgeschichte der Insekten. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Vol. XIX, 1869.)

20. Idem, Matériaux pour la connaissance du développement post-embryonnaire des Insectes (travail russe). (Même travail dans le *Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XXVIII, 1878.)

21. B. Hatschek, Beiträge zur Entwicklung der Lepidopteren. (*Jenaische Zeitschr.*, XI.)

22. Henking, Untersuchungen über die ersten Entwicklungsvorgänge in den Eiern der Insekten. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. LIV, 1892.)

23. R. Heymans, Die Entstehung der Geschlechtsdrüsen von Phyllodromia (Blatta) germanica. Inaug. Diss., Berlin, 1891.

24. Klebs, Die allgemeine Pathologie oder die Lehre von den Ursachen und dem Wesen der Krankheitsprocesse, 1889.

25. Korotneff, Die Embryologie der Gryllotalpa. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XLI, 1885.)

26. Idem, Histolyse und Histogenese des Muskelgewebes bei der Metamorphose der Insekten. (*Biol. Centralbl.*, 1892.)

27. Korschelt, Zur Frage nach dem Ursprung der verschiedenen Zellenelemente der Insektenovarien. (*Zool. Anz.*, 8. Jahrg., 1885.)

28. Idem, Ueber die Entstehung und Bedeutung der verschiedenen Zellenelemente der Insektenovarien. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XLIII, 1886.)

29. Idem, Ueber einige interessante Vorgänge bei der Bildung der Insekteneier. (*Ibidem*, Bd. XLV, 1887.)

30. Idem, Beiträge zur Morphologie und Physiologie des Zellkernes. (*Zool. Jahrb.*, Abth. f. Anat. u. Ontogenie der Thiere, Bd. IV, 1. Heft, 1889.)

31. A. Kowalewsky, Beiträge zur nachembryonalen Entwicklung der Musciden. (*Zool. Anz.*, 1885, pp. 98 à 103, 123 à 128 et 153 à 157.)

32. Idem, Beiträge zur Kenntniss der nachembryonalen Entwicklung der Musciden. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XLV, 1887.)

33. Idem, Sur les organes excréteurs chez les Arthropodes terrestres. (Extrait des *Travaux du Congrès international de zoologie à Moscou*, 1892.)

34. J. Krassilstschik, Zur Entwicklungsgeschichte der Phyllopteren. (*Zool. Anz.*, 16. Jahrg., 1893.)

35. Idem, Zur vergleichenden Anatomie und Systematik der Phyllopteren. (*Ibidem*, 1893.)

36. Künckel d'Herculais, Recherches sur l'organisation et le développement des Volucelles. Paris, 1875.

37. Leydig, Beiträge zur Kenntniss des thierischen Eies in unbefruchteten Zustande. (*Zool. Jahrb.*, Morph. Abth., Bd. III, pp. 287-432, T. 11-17.)

38. Looss, Ueber die Betheiligung der Leucocyten an dem Zerfall der Gewebe im Froschlarvenschwanze während der Reduction desselben. Ein Beitrag zur Phagocytenlehre. Leipzig, 1889.

39. Idem, Ueber Degenerationserscheinungen, besonders über die Reduction des Froschlarvenschwanzes und die im Verlaufe derselben auftretenden histologischen Processe. (*Mémoire couronné par la Fürstlich Joblonowskischen Gesellschaft* de Leipzig, X, 1889.)

40. Margo, Neue Untersuchungen über die Entwicklung, das Wachsthum, die Neubildung und den feineren Bau der Muskelfasern. (*Sitzungsb. der kais. Akad. der Wissensch. in Wien*, Bd. XXXVI, 1859.)

41. Margo, *Moleschott's Untersuchungen,* Bd. VI, 1860.

42. Idem, *Denkschr. der kais. Akad.,* Bd. XX, 1861.

43. S. Mayer, Zur Histologie des quergestreiften Muskels. (*Biol. Centr.,* Bd. IV, 1885.)

44. Idem, Die sogenannten Sarkoplasten. (*Anat. Anz.,* I, 1886.)

45. Idem, Einige Bemerkungen zur Lehre von der Rückbildung quergestreifter Muskelfasern. (*Zeitschr. f. Heilkunde,* Bd. VIII, 1887.)

46. E. Metchnikoff, Embryologische Studien an Insekten. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.,* Bd. XVI, 1866.)

47. Idem, Untersuchungen über die intracellulare Verdauung bei wirbellosen Thieren. (*Arbeiten aus dem zool. Institute zu Wien,* Bd. V, 1883.)

48. Idem, Untersuchungen über die mesodermalen Phagocyten einiger Wirbelthiere. (*Biol. Centralbl.,* Bd. III, 1883.)

49. Idem, Sur l'atrophie des muscles pendant la transformation des Batraciens. (*Ann. de l'Institut Pasteur,* 1892.)

50. Idem, *Comptes rendus de la Soc. de Biol.,* n° 9, 1892.

51. Idem, Réponse à la critique de M. Bataillon au sujet de l'atrophie musculaire chez les Têtards. (*Ibidem,* n° 11, 1892.)

52. Idem, La lutte pour l'existence entre les diverses parties de l'organisme. (*Revue scientifique,* 10 septembre 1892.)

53. Idem, Leçons sur la pathologie comparée de l'inflammation. Paris, G. Masson, 1892.

54. Paneth, Die Entwicklung von quergestreiften Muskelfasern aus Sarcoplasten. (*Sitzungsb. der kais. Acad. der Wissensch in Wien,* Bd. XCII, 1885.)

55. Idem, Zur Frage nach der Natur der Sarcoplasten. (*Anat. Anz.,* Bd. II, 1887.)

56. Patton, The development of Phryganids with a preliminary note on the development of Blatta germanica. (*Quarterly Journal of microscopical Science,* n. s., vol. XXIV, 1884.)

57. A. Sabatier, Sur la morphologie de l'ovaire chez les Insectes. (*C. r. de l'Acad. des sciences de Paris,* 1866, t. CII.)

58. J. Schaffer, Ueber Sarkolyse beim Menschen. (Vorläufige Mittheilung.) (*Sitzungsb. der kais. Acad. der Wissensch. in Wien*, Bd. CI, 1892.)

59. Idem, Beiträge zur Histologie und Histogenese der quergestreiften Muskelfasern des Menschen und einiger Wirbelthiere. (*Sitzungsb. der kais. Acad. der Wissensch. in Wien*, Bd. CII, 1893.)

60. Ant. Schneider, Die Entwicklung der Geschlechtsorgane der Insekten. (*Zool. Beiträge*, Bd. I, Breslau, 1885.)

61. F. Stuhlmann, Die Reifung des Arthropodeneies nach Beobachtungen an Insekten, Spinnen, Myriapoden und Peripatus. (*Berichte der Naturf. Gesellsch. zu Freiburg*, Bd. I, Breslau, 1886.)

62. Éd. Van Beneden, Embryologie des Mammifères. (*Arch. de Biol.*, t. I, 1880.)

63. J. Van Rees, Over intra-cellulaire spijsverteeringen en over de beteekenis der witte bloedlichaampjes. (*Maandblad voor Natuurwetenschappen*, 1884, Jaarg. II, Aug., Okt. en Nov.)

64. Idem, Over de post-embryonale ontwikkeling van Musca vomitoria. (*Maandblad voor Natuurwetenschappen*, Juli 1885.)

65. Idem, De beteekenis van chorocyten voor den graad der voeding van snelgroeiende weefsels. (*Donders' Feestbundel van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde.*)

66. Idem, Beiträge zur Kenntniss der inneren Metamorphose von Musca vomitoria. (*Zool. Jahrb.*, Abth. f. Anat. und Ontog., Bd. III, 1888.)

67. Viallannes, Recherches sur l'histologie des Insectes et sur les phénomènes qui accompagnent le développement postembryonnaire de ces animaux. (*Ann. des sc. natur.*, Zool., 6°, t. XIV, 1882.)

68. Alf. Voeltzkow, Entwickelung im Ei von Musca vomitoria und Melolontha vulgaris. Ein Beitrag zur Entwickelung im Ei bei Insekten. (*Arb. aus dem Zool.-Zoot. Institute zu Würzburg*, Bd. IX, 1. Heft, 1889.)

69. Weismann, Ueber die Entstehung der vollendeten Insekten in Larve und Puppe. Frankfurt, 1863.

70. Idem, Die nachembryonale Entwickelung der Musciden. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XIV, 1864.)

71. Idem, Zur Embryologie der Insekten. (*Arch. f. Anat. und Phys.*, 1864.)

72. Idem, Die Metamorphose der Corethra plumicornis. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XVI, 1866.)

73. H. Wielowiejski, Zur Kenntniss der Eibildung bei der Feuerwanze. (*Zool. Anz.*, 1885.)

74. Idem, Zur Morphologie des Insektenovariums. (*Zool. Anz.*, 1886.)

75. L. Will, Ueber die Entstehung des Dotters und der Epithelzellen bei den Amphibien und Insekten. (*Zool. Anz.*, 1884.)

76. Idem, Bildungsgeschichte und morphologischer Werth des Eies von Nepa cinerea und Notonecta glauca. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, 1885.)

77. Idem, Oogenetische Studien : Die Entstehung des Eies von Colymbetes fuscus. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, 1886.)

78. Van Bambeke, Contributions à l'histoire de la constitution de l'œuf : II. Élimination d'éléments nucléaires dans l'œuf ovarien de Scorpaena scrofa L. (*Bull. de l'Acad. roy. des sciences de Belgique*, 3e série, t. XXV, n° 4.)

79. Idem, L'oocyte de Pholcus phalangioides Fuessl. (*Anat. Anz.*, Ergänzungsheft zum XIII. Band, 1897.)

80. Lameere, Études sur la reproduction : II. Recherches sur la réduction caryogamique. Bruxelles, H. Lamertin, 1890.

81. Roule, La structure de l'ovaire et la formation des œufs chez les Phallusiadées. (*C. R. de l'Acad. des sciences de Paris*, 9 avril 1883.)

82. Weismann und Ischikawa, Ueber die Paracopulation im Daphnidenei sowie über Reifung und Befruchtung desselben. (*Zool. Jahrb.*, Abth. f. Anat. und Ontog., Bd. IV, 1889.)

83. Batt. Grassi, I progenitori dei Myriapodi e degli Insetti. Memoria VII. Anatomia comparata dei Tisanuri e considerazioni generali sull' organizzazione degli Insetti. (*Atti Accad. Lincei mem.*, vol. IV.)

84. Alb. Sommer, Ueber Macrotoma plumbea. Beiträge zur Anatomie der Poduriden. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XLI, 1885.)

B. MOLLUSQUES.

1. Von Baer, Meckel's-Archiv, 1830.

2. M. Braun, Postembryonale Entwicklung von Anodonta. (*Zool. Anz.*, I, 1878.)

3. Idem, Die postembryonale Entwicklung der Najaden. (*Nachrichtsbl. der deutsch. malak. Gesellsch. Frankfurt a. M.*, XIX, 1887.)

4. C.-G. Carus, Neue Untersuchungen über die Entwicklungsgeschichte unserer Flussmuschel. (*Nov. act. phys. med. Leop.*, Bd. XVI, 1852.)

5. C. De Bruyne, Contribution à l'étude de la phagocytose. (*Mémoires couronnés, in-4°, publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. LIV, avril 1894.)

6. Idem, Phagocytose. (*Handelingen van het III^e Nederl. Natuur- en Geneeskundig Congres*, Utrecht, 1891.)

7. Idem, De la phagocytose et de l'absorption de la graisse dans l'intestin, 1^re, 2^e et 3^e communications préliminaires. (*Bull. de la Soc. de méd. de Gand*, 1891.)

8. Idem, De la phagocytose observée, sur le vivant, dans les branchies des mollusques lamellibranches. (*Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris*, décembre 1892.)

9. V. Faussek, Ueber den Parasitismus der Anodonta-Larven in der Fischhaut. (*Biologisches Centralblatt*, 1895.)

10. Flemming, Ueber die ersten Entwicklungserscheinungen am Ei der Teichmuschel. (*Arch. f. mikrosk. Anat.*, Bd. X, 1873.)

11. Idem, Studien zu der Entwicklungsgeschichte der Najaden. (*Math. Classe Ak. Wien*, Bd. LXXI, 1875.)

12. F.-A. Forel, Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Najaden. (*Sitzungsb. der kais. Acad. der Wissensch. zu Wien*, Math.-Nat. Cl., Bd. LI, 1875.)

13. Henking, Untersuchungen über die ersten Entwicklungsvorgänge in den Eiern der Insekten. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. LIV, 1892.)

14. Von Hessling, Einige Bemerkungen zu D^r Keber's Abhandlung : « De spermatozoorum introitu in ovulo », 1853. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. V.)

15. H. von Jhering, Anodonta und Glabaris. (*Zool. Anz.*, 14. Jahrg., 1891.)

16. De Lacaze-Duthiers, Organes génitaux des Acéphales lamellibranches. (*Ann. des sc. natur.*, t. II, 1854.)

17. Ray Lankester, On green oysters. (*Quarterly Journal of microscopical Science*, vol. XXVI, 1886.)

18. F. Leydig, Mittheilungen über den Parasitismus junger Unioniden an Fischen. 1866.

19. Frank-R. Lillie, The Embryology of the Unionidae. A study of cell-lineage. (*Journal of Morphology*, vol. X, n° 1, 1895.)

20. Lubarsch, Untersuchungen über die Ursachen der angeborenen und erworbenen Immunität. Berlin, 1891.

21. Metchnikoff, Articles dans les *Arbeiten des Zoologischen Instituts zu Wien.*

22. Idem, Pathologie comparée de l'inflammation. Paris, 1892.

23. Rathke, Naturh. Selskabets Skrifter. Kjöbenhavn, 1797.

24. C. Schierholz, Zur Entwicklungsgeschichte der Teich- und Flussmuschel. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XXXI, 1878.)

25. Idem, Ueber Entwicklung der Unioniden. (LV. Band der *Math.-Naturw. Classe der K. Akad. der Wissensch. in Wien*, 1888.)

26. F. Schmidt, Beitrag zur Kenntniss der postembryonalen Entwicklung der Najaden. (*Arch. f. Naturg.*, LI, 1885.)

27. C. Stepanoff, Ueber die Geschlechtsorgane und die Entwicklung von Cyclas cornea. (*Arch. f. Naturg.*, 31. Jahrg., 1865.)

28. E. Ziegler, Die Entwicklung von Cyclas cornea Lam. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XLI, 1885.)

APPENDICE.

Nous avons omis de dire, au chapitre *Oogenèse et nutrition de l'ovule* (p. 83), que dans son travail publié en 1875, W. Flemming [1], revenant sur le sujet, a parfaitement reconnu à cette époque chez l'*Anodonte* la nature épithéliale de la paroi du follicule ovarique qu'il avait désignée antérieurement (1873) sous le nom de syncytium. Nous n'avons pas cité davantage l'opinion de von Jhering [2] et de Stauffacher [3], parce que nous ne connaissions pas leurs travaux à l'époque où le présent mémoire a été déposé; nous avons été plus heureux depuis. Le premier de ces auteurs décrit dans le pédicule qui suspend l'œuf des Najades à la paroi folliculaire, une traînée d'éléments deutoplasmatiques tout préparés. Stauffacher, faisant une étude complète de l'oogenèse chez *Cyclas,* insiste longuement sur le rôle sécrétoire dévolu à l'épithélium folliculaire : il fournit des éléments nutritifs à l'ovule qui, de plus, englobe la partie libre des cellules, le restant, y compris le noyau, allant reconstituer une cellule normale.

Il y aurait donc là une destruction *partielle* des éléments épithéliaux au profit de la cellule-œuf, ce qui rappellerait, *dans une certaine mesure,* le phénomène décrit par nous pour l'ovaire d'*Anodonte.*

Gand, le 15 novembre 1897.

[1] W. Flemming, *Studien zu der Entwicklungsgeschichte der Najaden* (Sitz. d. k. k. Akad. Wien, 3. Abth., Bd. LXXI, 1875).

[2] Von Jhering, *Zur Kenntniss der Eibildung bei den Muscheln* (Zeitschr. f. w. Zool., Bd. XXIX, 1877).

[3] H. Stauffacher, *Eibildung und Furchung bei* Cyclas cornea L. (Jenaische Zeitschr., Bd. XXVIII, 1894. — Communication préliminaire dans le *Vierteljahrschrift der Nat. Ges. Zürich,* Bd. XXXVIII, 1893, pp. 361-370).

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Fig. 1. — *Musca vomitoria.* — Muscles en dégénérescence. On reconnaît aisément une marche progressive de l'hypertrophie nucléaire : le noyau n_1 est quasi normal encore, n_2 est déjà plus grand, n_3 est très développé et le nucléole semble également avoir gagné en dimensions. La substance contractile est colorée par l'hématoxyline, possède encore sa striation et est réduite en faisceaux fibrillaires. A sa partie supérieure, elle s'est transformée en sarcolytes vivement colorés par l'éosine ; il en est de même des sarcolytes déjà libres à la gauche du muscle. Il est facile de voir qu'il y a une transition marquée entre les sarcolytes : elle est suffisamment indiquée par l'action des matières colorantes. Le fragment musculaire *B* montre une dégénérescence assez avancée : les sarcolytes, tout en étant encore quelque peu striés, prennent déjà légèrement la teinte rosée de l'éosine (Zeiss, obj. D, oc. 2).

Fig. 2. — *Idem.* — Quatre myoclastes entourant une trachée en voie d'évolution ; les limites des cellules hypodermiques ne sont guère nettement indiquées. La figure montre clairement que dans chaque myoclaste, les sarcolytes subissent des transformations : ceux qui sont groupés autour du noyau sont les plus grands et ont fortement pris la teinte de l'éosine ; les autres se colorent faiblement à l'hématoxyline, au fur et à mesure qu'ils s'éloignent du centre. Il n'y a d'exception que pour deux grands sarcolytes situés à la périphérie de l'un des myoclastes. — *ph.*, phagocyte contenant un très grand sarcolyte qui en est encore à son premier stade de dégénérescence (Zeiss, obj. D, oc. 2).

Fig. 3 et 4. — *Idem.* — Deux stades de formation d'un myoclaste. La préparation dont ceux-ci ont été copiés, a été obtenue après fixation par la liqueur de Hermann : son acide osmique fait apparaître la graisse, et la safranine a coloré tout ce qui est chromatophile. Nous renvoyons au texte pour l'explication du groupement des sarcolytes, *sl.*, et de leurs divers aspects (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8).

Fig. 5. — *Idem.* — Myoclaste complètement formé. Autour du noyau se distinguent les grands sarcolytes groupés assez régulièrement et de façon radiaire ; au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre, on constate que leurs dimensions diminuent, que la graisse y apparaît, de même que plus loin encore des parties chromatophiles (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8 ; Hermann, safranine). Voir le texte pour de plus amples détails.

Fig. 6. — *Idem.* — Cinq globes granuleux (Körnchenkugeln). Les sarcolytes y renfermés ont perdu l'acuité de leurs arêtes (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8 ; Hermann, safranine).

PLANCHE II.

Fig. 1. — Destruction de glandes salivaires de *Musca vomitoria*. — La cellule *A* est entamée par quatre phagocytes renfermant tous des fragments sarcolytiques; ils sont logés dans une cavité creusée dans le corps cellulaire et qui a| même entamé la membrane nucléaire. A la partie inférieure, la substance cellulaire a disparu presque dans sa totalité. La cellule *B* présente inférieurement une encoche dans laquelle se trouve logé un phagocyte non chargé de débris tissulaires. Le ravage de la cellule est très nettement indiqué à droite et en haut (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8; Hermann, safranine).

Fig. 2, 3, 4 et 5. — Quatre phagocytes de *Tenebrio molitor* renfermant de grosses boules graisseuses dont quelques-unes sont fusionnées deux à deux et sur le point d'être expulsées; les parois des vacuoles sont très nettes. Dans ces figures, comme dans les numéros 6, 7 et 8, on reconnaît très bien les éléments chromatiques des sarcolytes caractéristiques pour l'animal dont il s'agit (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8; Hermann, safranine).

Fig. 9 et 10. — Deux myoclastes de *Bombyx mori* dans lesquels la digestion intracellulaire est déjà assez avancée. Le noyau hypertrophié ne ressemble plus à l'élément nucléaire bâtonnoïde de la fibre musculaire normale (Leitz, obj. 7, oc. 3; Hermann, safranine).

Fig. 11. — Myoclaste de *Musca vomitoria* au moment où il se désagrège à la base d'un épithélium en prolifération; les cellules de celui-ci renferment un grand nombre de produits de la destruction du myoclaste en question (Zeiss, obj. D, oc. 4; Hermann, safranine).

Fig. 12. — Ovule d'*Æschna grandis* entouré de toutes parts par un épithélium folliculaire dont les cellules sécrètent de la graisse (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. 4; Hermann, safranine).

Fig. 13. — Chambre terminale d'un tube ovarique de *Telephore*, dans laquelle on reconnaît nettement l'histolyse de cellules nutritives; à certains niveaux, l'on peut suivre les diverses phases du phénomène (Hermann, safranine).

Fig. 14. — *Periplaneta orientalis*. — Paroi d'un tube ovarique sur laquelle se trouvent accolés deux syncytia. L'un, *a*, est presque complètement épuisé : il ne reste plus guère qu'une cellule à bactéroïdes; l'autre, *b*, est moins résorbé : il possède encore de la graisse dans deux cellules pariétales et deux cellules à bactéroïdes.

Fig. 15. — Autre tube ovarique de *Periplaneta orientalis* sur lequel se trouve accolé un syncytium quasi épuisé.

Cette figure, de même que la précédente, a été dessinée avec Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8. — Hermann, safranine.

PLANCHE III.

Fig. 1. — Section longitudinale de l'ovaire de Dytique. La chambre nutritive surmontant l'unique follicule de la figure renferme six cellules, dont l'une, *a*, déverse son noyau dans la direction de l'ovule; une autre, *b*, ne renferme pas de noyau, mais une traînée claire se trouvant tout à fait en dessous d'elle et se continuant avec un espace *d*, renfermant un noyau, indique que probablement ce dernier lui a appartenu, mais s'est déjà transporté dans l'ovule. La vésicule germinative, *v*, très riche en chromatine, renferme un noyau *c*, y noyé complètement et montre une amiboïdité très grande; dans ses pseudopodes *ps*, elle renferme un autre noyau *e*, déjà presque englobé. Une traînée claire, oblique, venant de la chambre nutritive, s'étend jusqu'à l'intérieur de la vésicule, et sur les coupes sériées on peut la voir se mettre en continuité avec l'espace *d* (Zeiss, obj. D, oc. 2; Hermann, vinaigre de bois, safranine).

Fig. 2. — Chambre nutritive d'ovaire de Dytique. Quatre noyaux de cellules nutritives se fusionnent entre eux et restent absolument distincts de leur cytoplasme (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8; Hermann, vinaigre de bois, safranine).

Fig. 3. — Ovule de Dytique dont la vésicule germinative embrasse dans une excavation *amiboïde* un noyau de cellule nutritive. En un point de sa surface, ce dernier a perdu sa membrane nucléaire et laisse sortir par là des granulations chromatiques qui passent dans la vésicule (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8; Hermann, safranine).

Fig. 4. — Partie d'ovule de Dytique renfermant trois noyaux de cellule nutritive très rapprochés : on ne voit plus trace de leur cytoplasme, qui est complètement fusionné avec le vitellus. Les parties chromatiques, *chr*, correspondent probablement par leur ensemble à la zone claire décrite par Korschelt autour de la vésicule et les traînées claires au pseudopode du même élément (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8; Hermann, safranine).

Fig. 5. — Section transversale faite dans le voisinage immédiat du germigène d'un tube ovarique de Dytique. L'ovule, à ce niveau, est directement entouré par l'épithélium folliculaire sectionné transversalement : celui-ci est en pleine activité sécrétoire et fournit à l'ovule, qui s'en nourrit activement, des boules chromatiques logées dans un substratum non colorable et de dimensions diverses. Un de ces produits de sécrétion se trouve logé dans la vésicule germinative, tandis qu'un autre est situé sur le bord : correspondraient-ils aux bourgeons nucléaires qui, d'après Will, seraient destinés à aller former les noyaux des cellules épithéliales ?

PLANCHE IV.

Fig. 1. — Ovule d'Anodonte dans la branchie de la mère. La membrane présente un très grand nombre d'anfractuosités dans l'une desquelles se trouve un leucocyte. Il y a deux superbes sphères attractives; l'une d'elles, située dans le voisinage immédiat d'un pronucleus, lui appartient probablement (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8; Hermann [un mois], safranine).

Fig. 2. — Ovule d'Anodonte en segmentation. Les macromères *a* et *b* possèdent respectivement un et deux lobopodes; la sphère *c* englobe un leucocyte *l* en dégénérescence; *d*, micromère en division; *ph*, phagocyte dans la lumière branchiale; *ph'*, phagocyte à l'intérieur de la membrane ovulaire (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8; Hermann, safranine).

Le dessin laisse malheureusement beaucoup à désirer.

Fig. 3. — Stade de la première segmentation. *gp*, globule polaire; *x*, élément que nous n'avons pu reconnaître, mais qui pourrait bien représenter une inclusion nutritive; la coupe suivante montre que ce n'est point non plus un globule polaire, et il en est de même pour *ph'*, que nous reconnaissons pour un phagocyte, comme ci-dessus, *ph* (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8; Hermann, safranine).

Fig. 4. — Blastocèle d'Anodonte. Un phagocyte *ph* pénètre à travers la membrane, tandis que d'autres rampent à la surface. Nous n'avons reproduit que la partie la plus intéressante de la coupe (Zeiss, obj. homog., immers. apochromat., oc. compens. 8; Hermann, safranine).

Fig. 5. — Kyste comprenant une partie centrale compacte dans laquelle se reconnaissent des débris de nombreuses coquilles et des points chromatiques; *a*, *b*, *c*, *d*, quatre embryons encore plus ou moins bien conservés; *C*, membrane cystique; *ep*, épithélium branchial; *l*, leucocyte non encore compris dans la membrane (Zeiss, obj. A, oc. 2; Hermann, safranine et violet de gentiane).

PLANCHE V.

Fig. 1. — Un embryon d'Anodonte enfermé dans un kyste, *C*; *b*, byssus. Dans le voisinage immédiat se trouve une accumulation de leucocytes et de phagocytes formant une bourre nutritive. L'épithélium branchial est représenté par la bordure irrégulière grise (Zeiss, obj. D, oc. 2; Hermann, safranine).

Fig. 2. — Section transversale d'une chambre incubatrice de *Cyclas cornea*, dont la lumière est remplie de produits de sécrétion (*s*) des cellules épithéliales, de phagocytes, *ph*, et de leucocytes, *l*. L'épithélium est surbaissé et, çà et là, un leucocyte ou un phagocyte tente de le percer (Zeiss, obj. D, oc. 2; Hermann, safranine).

Fig. 3. — Section longitudinale de tube ovarique de Dytique à la hauteur de la dernière chambre nutritive complètement dégarnie de ses cellules ordinaires, mais remplie de débris histolytiques de l'épithélium (Zeiss, obj. D, oc. 2; Hermann, safranine).

Fig. 4. — Grand amas histolytique provenant de l'épithélium du dernier follicule ovarique descendant dans l'oviducte de *Periplaneta orientalis* (Zeiss, obj. D, oc. 2; Hermann, safranine).

Fig. 5. — Myoclastes en voie de formation dans un muscle intersegmentaire de *Forficula auricularia* : on peut y poursuivre les phases du phénomène (Zeiss, obj. D, oc. 2; Hermann, safranine).

TABLE DES MATIÈRES.

INSECTES.

MÉTHODES ET MATÉRIAUX DE RECHERCHE.

I. Insectes a métamorphoses complètes :

A. *Historique* 4

B. *Dégénérescence et destruction musculaires* 9

Historique. Résultats personnels obtenus chez *Musca vomitoria, Bombyx mori, Tenebrio molitor* et *Phryganea.*

C. *Dégénérescence et destruction des glandes salivaires* 26

(*Musca vomitoria.*)
Discussion des opinions.
Résultats personnels.

D. *Destruction de l'hypoderme larvaire* 31

(*Musca vomitoria, Bombyx mori* et *Tenebrio molitor.*)
Discussion des opinions.
Résultats personnels.

E. *Destruction du corps adipeux* 34

(*Musca vomitoria, Bombyx mori* et *Tenebrio molitor.*)
Discussion des opinions.
Résultats personnels.

II. Insectes a métamorphoses incomplètes (hémimétaboliens) :

A. *Historique* 41

B. *Dégénérescence et destruction musculaire* (Forficula, Nepa *et* Notonecta) . 42

C. *Modifications au sein de l'hypoderme* 45

Discussion et résultats personnels.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES AU SUJET DE LA PHAGOCYTOSE 45

DESTINÉE DES PRODUITS DE DESTRUCTION DES ORGANES LARVAIRES 47

1° Phagocytes proprement dits 47

2° Myoclastes et syncytia 49

3° Leucocytes. 51

Discussion et résultats personnels.

DÉVELOPPEMENT DES ORGANES GÉNITAUX 53

Formation et nutrition de l'ovule.

Nutrition de la vésicule germinative.

Discussion et résultats personnels.

CONSIDÉRATIONS PHYLOGÉNÉTIQUES 67

Complication de la structure de l'ovaire dans la série.

Tableau comparatif et table synoptique du développement phylogénétique de l'ovaire.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES 75

RÉGÉNÉRATION MUSCULAIRE (Annexe). 79

MOLLUSQUES.

Historique 80

MÉTHODES ET MATÉRIAUX DE RECHERCHE :

I. Oogenèse et nutrition de l'ovule. 83

II. Phagocytose dans les chambres incubatrices 84

III. Nutrition de l'embryon 88

CONCLUSIONS GÉNÉRALES 98

BIBLIOGRAPHIE :

A. *Insectes*. 100

B. *Mollusques*. 105

APPENDICE 108

EXPLICATION DES PLANCHES. 109

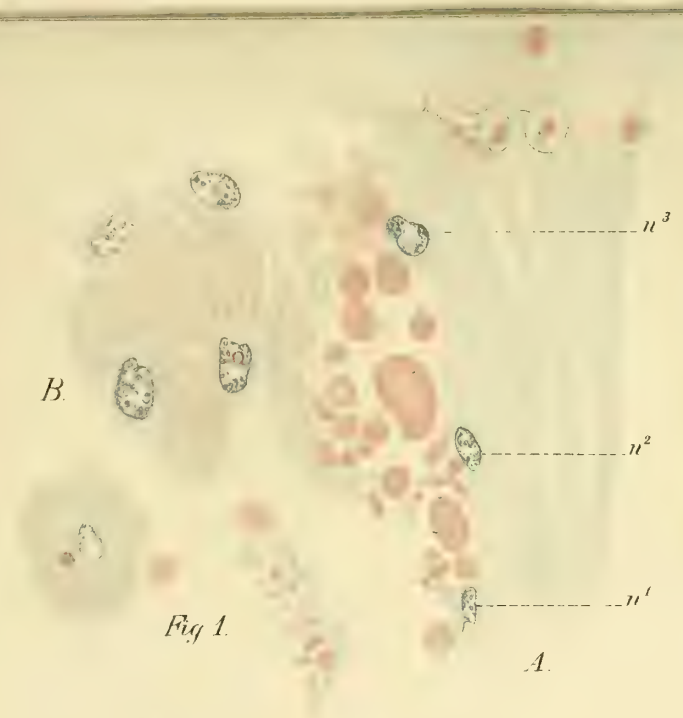


Fig. 1.

Fig. 4.

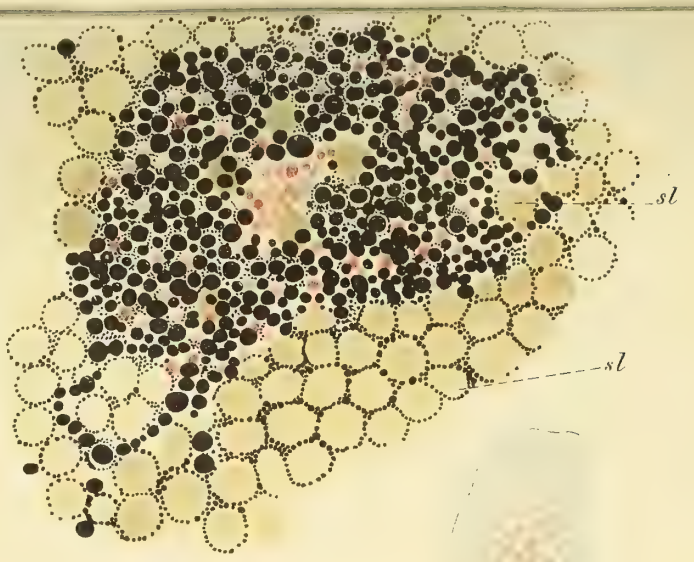


Fig. 3.

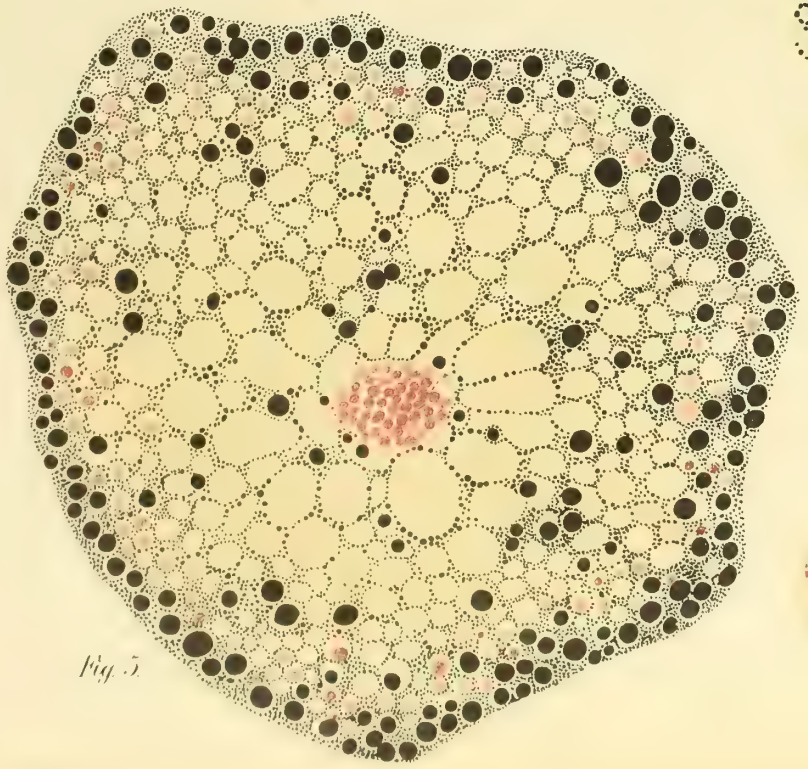


Fig. 5.

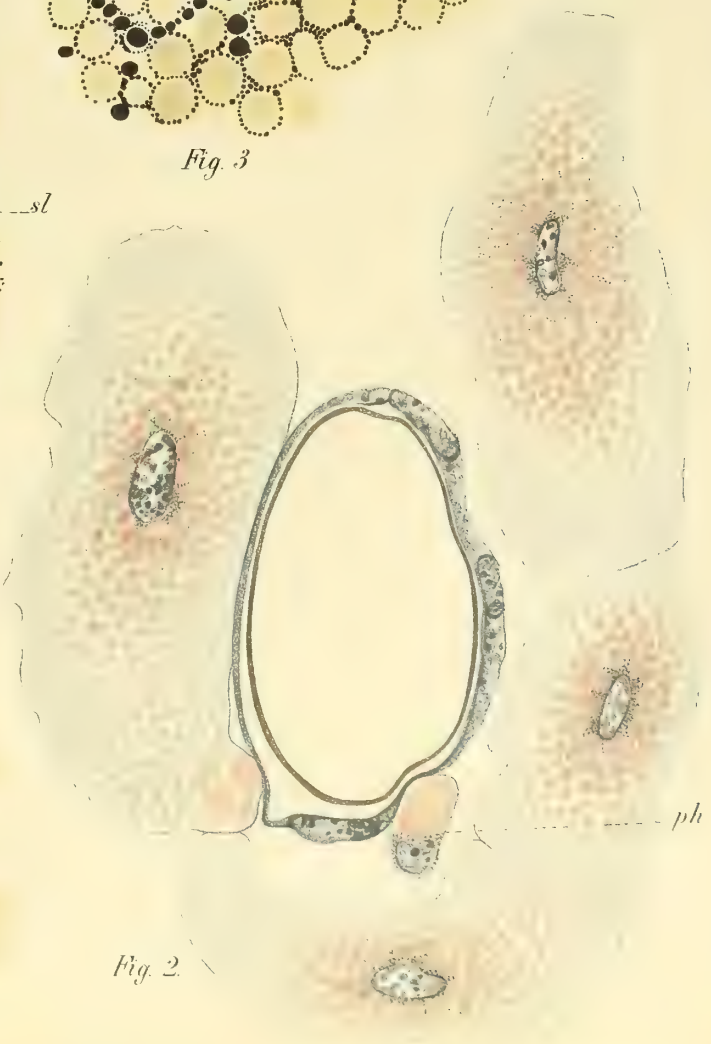


Fig. 2.

Fig. 6.

BRITISH MUSEUM
NATURAL

DE BRUYNE & LEFEVRE, del.

Lith. J.L. GOFFART, Bruxelles

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig 1

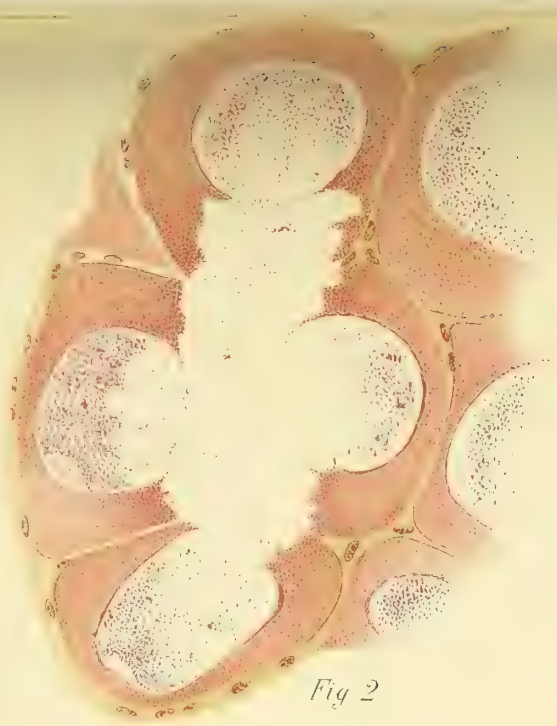


Fig 2

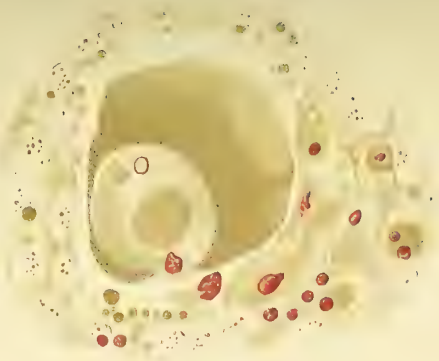


Fig 5

Fig 3

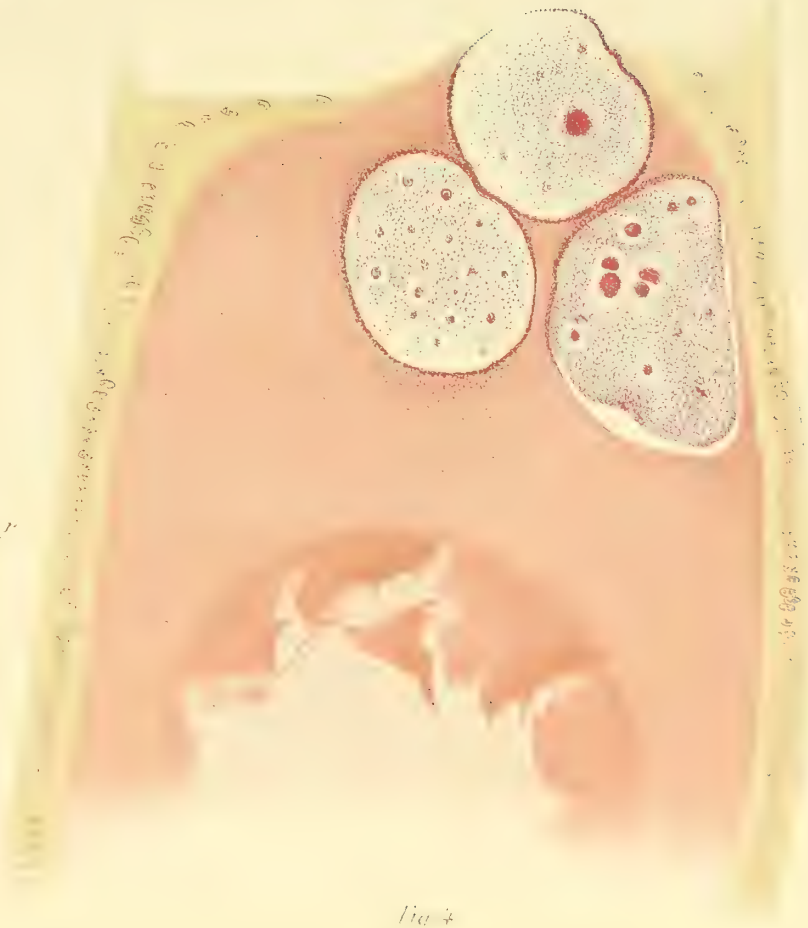


Fig 4

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig. 1

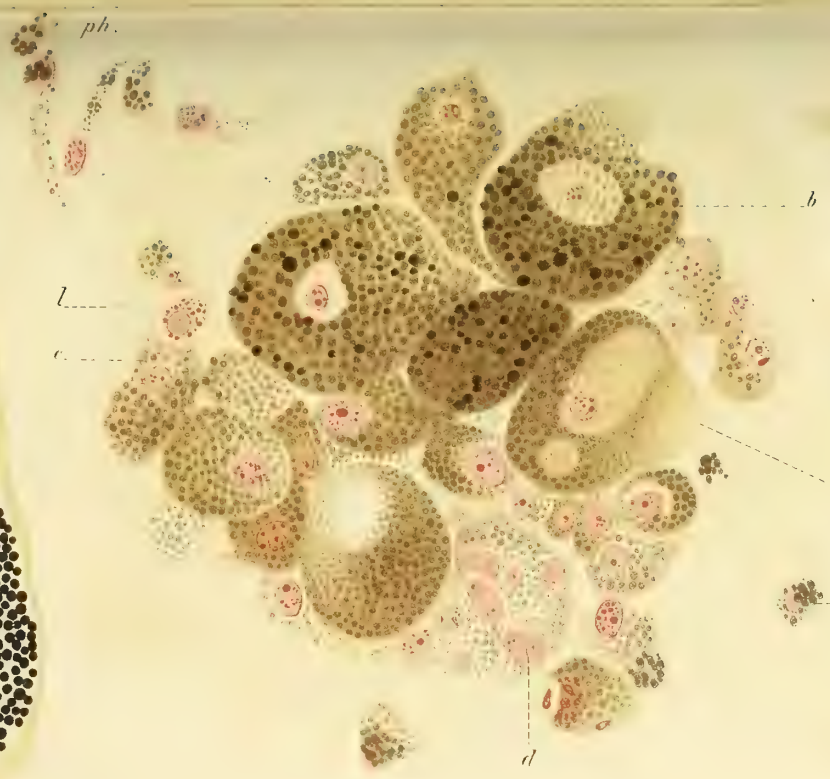


Fig 2

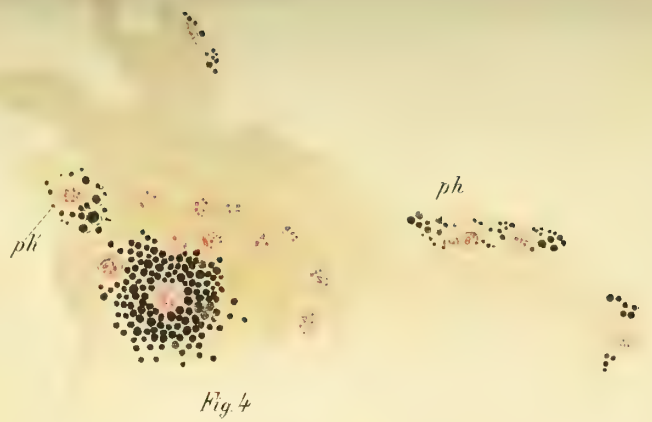


Fig. 4

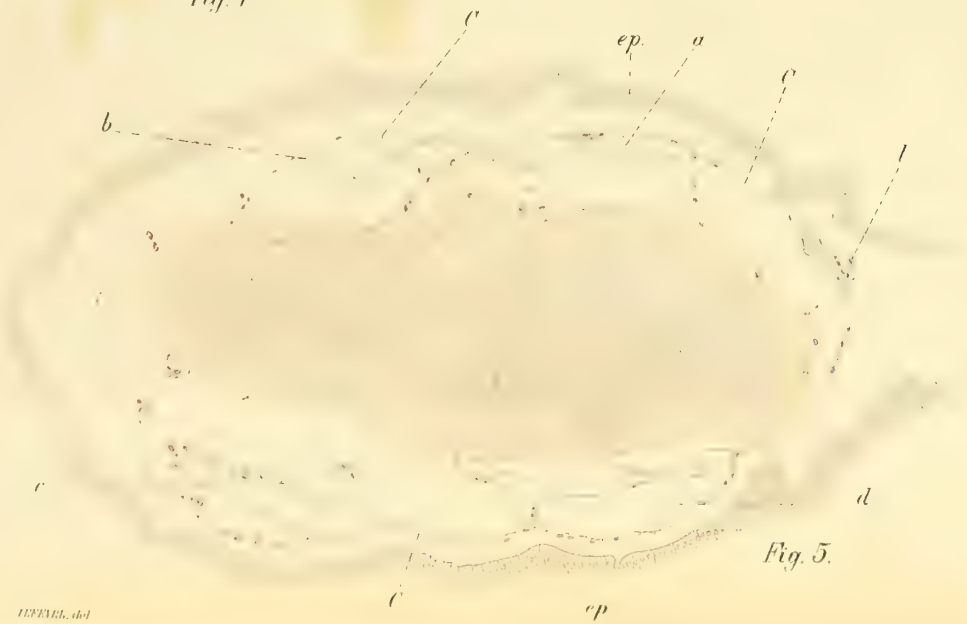


Fig. 5.

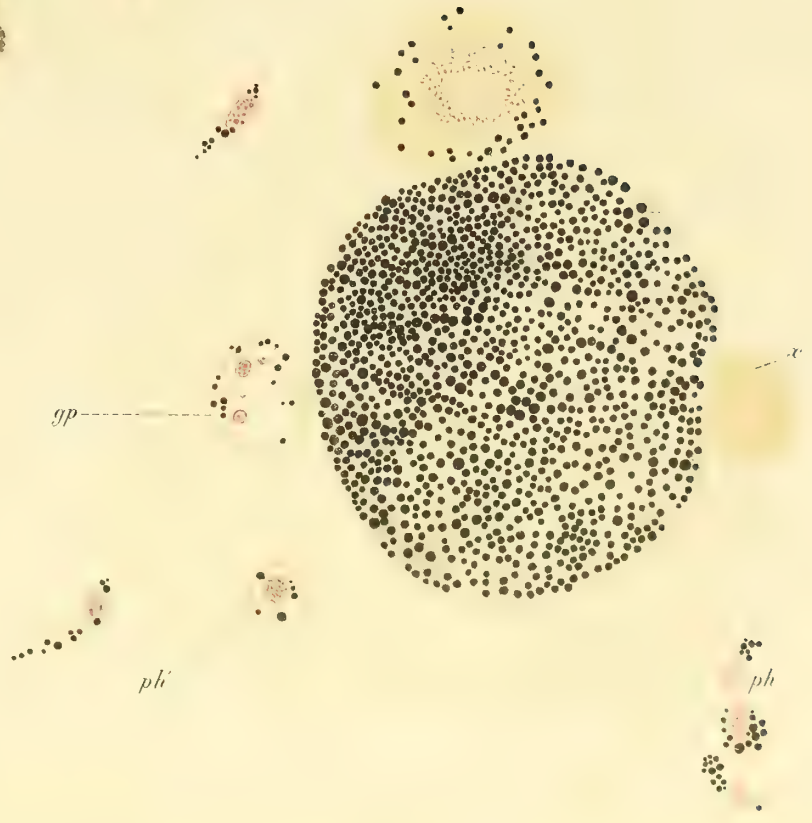


Fig. 3.

BRITISH MUSEUM
NATURAL

Lith. J. L. Goffart, Bruxelles

BRITISH MUSEUM
NATURAL

SUR

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

J. BEAUPAIN

INGÉNIEUR PRINCIPAL AU CORPS DES MINES, DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 4 juillet 1896.)

SUR

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

D'ORDRE SUPÉRIEUR

AVANT-PROPOS.

1. Malgré le bienveillant accueil, fait par l'Académie de Belgique à mes deux *Mémoires sur les fonctions hypergéométriques* (*), je ne me serais pas décidé à publier ce travail, si, au cours de ces recherches, je n'avais rencontré une classe importante d'équations différentielles, qui se rattachent très simplement aux équations hypergéométriques. L'équation la plus générale de cette classe peut être écrite sous la forme :

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} = x^{m+p}\frac{d^m y}{dx^m} + A_1 x^{m+p-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + A_i x^{m+p-i}\frac{d^{m-i} y}{dx^{m-i}} + \cdots + \left(A_m x^p + \frac{A_{m+1}}{x^n}\right) y.$$

$A_1, A_2 \ldots A_{m+1}$ sont des coefficients constants, p est un nombre quelconque et m est égal ou inférieur à n.

L'équation binôme

$$(2).\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^n y}{dx^n} = A x^p y$$

n'est qu'un cas particulier de cette équation.

(*) *Mémoires sur les fonctions hypergéométriques*, t. LIV des Mémoires in-4° de l'Académie royale de Belgique.

Dans les notes ultérieures, la lettre M renverra au premier mémoire; la lettre N, au second mémoire.

Scherk (*), le premier, considéra l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (\alpha + \beta x)\, y.$$

L'habile géomètre observa que, par la substitution

$$\alpha + \beta x = \gamma v$$

et un choix convenable de la constante γ, cette équation est réductible à une équation de la forme (2), où p est égal à l'unité.

Par un procédé, fondé sur le développement de la fonction en série, il parvint à représenter la solution générale de cette équation par une intégrale définie.

Lobatto (**) reprit la question, traitée aussi par Kummer (***) et, sans faire usage de développements en série, exprima directement par des intégrales définies les solutions particulières des équations différentielles :

$$\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + abx^n y = 0.$$

La dernière équation n'est autre que l'équation de Riccati et M. Lommel ([IV]) a montré qu'elle est intégrable par les fonctions de Bessel.

Lobatto, qui n'aborda point l'étude du cas général, termina son travail en proposant l'intégration de l'équation (2) comme un objet de recherches utiles aux progrès de l'analyse.

Par une méthode extrêmement ingénieuse, Kummer ([V]) donna le moyen

(*) Scherk, *Ueber die Integration der Gleichung* $\frac{d^n y}{dx^n} = (\alpha + \beta x) y$ (Journal de Crelle, t. X). — Jacobi, *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Prof. Scherk : über die Integration der Gleichung* $\frac{d^n y}{dx^n} = (\alpha + \beta x) y$ (Journal de Crelle, t. X).

(**) Lobatto, *Sur l'intégration des équations* $\frac{d^n y}{dx^n} xy = 0$, $\frac{d^2 y}{dx^2} + abx^n y = 0$ *par des intégrales définies* (Journal de Crelle, t. XVII).

(***) Kummer, *Journal de Crelle*, t. XII.

([IV]) Lommel, *Zur Theorie der Bessel'schen Functionen* (Mathematische Annalen, t. III).

([V]) Kummer, *Note sur l'intégration de l'équation* $\frac{d^n y}{dx^n} = x^p y$ *par des intégrales définies* (Journal de Crelle, t. XIX).

d'exprimer par une intégrale définie p^{uple} la solution générale de l'équation (2).

L'analyse de l'éminent géomètre exige que p soit un nombre entier positif. D'ailleurs son procédé est pour ainsi dire impraticable.

Le cas, où p, étant un entier négatif, est plus grand que m en valeur absolue, a été traitée par M. Spitzer (*); mais sa méthode ne diffère pas au fond de celle de Kummer. Comme le fait judicieusement observer M. Pochhammer (**), une transformation simple ramène ce cas à celui qui a été étudié par Kummer.

Si

$$p = -m \quad \text{et} \quad n = 2m,$$
$$p = -m - \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad n = 2m + 1,$$

M. Lommel (***) intègre l'équation différentielle binôme par les fonctions de Bessel.

M. Pochhammer (*loc. cit.*) traite l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0$$

par une méthode, qui ne diffère pas essentiellement de celle de Jacobi, de Lobatto et de Petzval (iv). Ce géomètre en la généralisant l'applique à l'équation (2), où l'exposant p est un entier positif. Enfin, M. de Tilly a indiqué une réduction permettant d'obtenir les solutions de l'équation (2) par des intégrales définies; le savant auteur signale en même temps des difficultés pratiques qui se présentent dans l'application de sa méthode (v).

(*) Spitzer, *Ueber die Integration der Differentialgleichung* $x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \pm q$ *durch bestimmte Integrale* (Journal de Crelle, t. LVII).

(**) Pochhammer, *Ueber eine binomische lineäre Differentialgleichung* n^{ter} *Ordnung* (Mathematische Annalen, t. XXXVIII).

(***) Lommel, *Integration der Gleichung* $x^{m+\frac{1}{2}} \frac{d^{2m+1} y}{dx^{2m+1}} \mp y = 0$ *durch Bessel'sche Functionen* (Mathematische Annalen, t. II).

(iv) Petzval, *Integration der lineären Differentialgleichungen, etc.* Wien, Braumüller, 1853.

(v) De Tilly, *Sur l'équation de Ricatti et sa double généralisation* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3e série, t. IX).

2. La première partie de ce mémoire sera consacré à l'étude de l'équation hypergéométrique

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + L_i x^{n-i-1}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} + \cdots + L_{n-1}\frac{dy}{dx} \\ & = x^m\frac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + K_i x^{m-i}\frac{d^{m-i}y}{dx^{m-i}} + \cdots + K_{m-1}x\frac{dy}{dx} + K_m y, \end{aligned} \right.$$

dont les solutions principales particulières sont exprimables par des intégrales définies $(n-1)^{\text{uples}}$, à circuits fermés ou ouverts.

Dans la seconde partie, nous traiterons spécialement l'équation différentielle binôme du n^{me} ordre (2) et nous montrerons qu'une transformation simple permet de représenter les n solutions particulières par des intégrales définies $(n-1)^{\text{uples}}$, quelles que soient les valeurs de p. Cependant nous en excluons certaines valeurs de l'exposant p, pour lesquelles l'équation serait intégrable ou aurait des intégrales logarithmiques.

Par la substitution

$$x = (p+n)^{\frac{n}{p+n}} z^{\frac{1}{p+n}},$$

l'équation (2) est réductible à une équation hypergéométrique de la forme :

$$x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_i x^{n-i-1}\frac{d^{n-i-1}y}{dx^{n-i-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Cette transformation a dû se présenter à l'esprit de plusieurs géomètres; mais elle n'avait aucune utilité, si l'on ne savait intégrer cette équation hypergéométrique par des intégrales définies. Loin de paraître simplifier la question, cette transformation ne semble que la compliquer, tout en provoquant cependant la disparition de l'exposant p, qui peut être un nombre fractionnaire ou même irrationnel.

A un autre point de vue, nos résultats diffèrent encore de ceux des géomètres cités précédemment. L'ordre de multiplicité des intégrales définies sera indépendant du coefficient p; il est égal à celui de l'équation diminué d'une unité. Ce résultat me paraît ainsi plus conforme à la nature des choses.

Nous espérons aborder prochainement l'étude de l'équation générale (1).

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ÉQUATION HYPERGÉOMÉTRIQUE DU n^{me} ORDRE.

3. Dans deux mémoires (*), nous avons prouvé que les intégrales définies

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi_4}^{(0)} e^{(n-m)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m}}} u^{-\rho_4} V_1\, du, \\ \displaystyle\int_{\xi_4}^{(0)} e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}} u^{-\rho_4} V_2\, du \end{array}\right.$$

sont des solutions de l'équation (3), si V_1 et V_2, qui sont des fonctions de u seulement, satisfont respectivement aux équations hypergéométriques :

$$u^{n-2}(u-1)\frac{d^{n-1}V}{du^{n-1}} + u^{n-3}(a_1 u - b_1)\frac{d^{n-2}V}{du^{n-2}} + \cdots + u^{n-i}(a_{i-2}u - b_{i-2})\frac{d^{n-i+1}V}{du^{n-i+1}} + \cdots + (a_{n-2}u - b_{n-2})\frac{dV}{du} + a_{n-1}V = 0,$$

$$u^{n-2}\frac{d^{n-1}V}{du^{n-1}} + u^{n-3}(a'_1 u - b'_1)\frac{d^{n-2}V}{du^{n-2}} + \cdots + u^{n-i}(a'_{i-2}u - b'_{i-2})\frac{d^{n-i+1}V}{du^{n-i+1}} + \cdots + (a'_{n-2}u - b'_{n-2})\frac{dV}{du} + a'_{n-1}V = 0.$$

Notre but est maintenant de chercher les valeurs des coefficients de ces équations auxiliaires, ou plutôt de déterminer la forme des fonctions V. On pourrait exprimer directement les coefficients de ces équations au moyen de ceux de l'équation (3); mais ces calculs, outre leur longueur, n'auraient qu'une utilité contestable. Il nous suffira de trouver la forme de ces fonctions V dans un cas particulier; et, par induction, nous en déduirons la forme générale. Nous montrerons ensuite à posteriori que, si l'on substitue à V ces fonctions, les intégrales (4) représentent effectivement des solutions particulières de l'équation différentielle (3).

(*) M et N.

4. Soit l'équation

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad x^4\frac{d^5y}{dx^5} + A_1x^3\frac{d^4y}{dx^4} + A_2x^2\frac{d^3y}{dx^3} + A_3x\frac{d^2y}{dx^2} + A_4\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + \alpha_1 y,$$

où

$$A_1 = 6 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = 6 + P_1,$$

$$A_2 = 7 + 3(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4 = 7 + 3P_1 + P_2,$$

$$A_3 = 1 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4 + \rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \rho_1\rho_3\rho_4 + \rho_2\rho_3\rho_4 = 1 + P_1 + P_2 + P_3,$$

$$A_4 = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = P_4.$$

Posons

$$y = \int_g^h RV\,du;$$

les limites g et h sont constantes et

$$R = e^{4ux^{\frac{1}{4}}}.$$

Puisque la fonction à intégrer reste finie le long du chemin d'intégration, on a par des différentiations successives :

$$\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{5}{4}}\int_g^h RuV\,du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-\frac{6}{4}}\int_g^h Ru^2V\,du - \frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}\int_g^h RuV\,du,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^{-\frac{9}{4}}\int_g^h Ru^3V\,du - \frac{9}{4}x^{-\frac{10}{4}}\int_g^h Ru^2V\,du + \frac{21}{4^2}x^{-\frac{11}{4}}\int_g^h RuV\,du,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = x^{-\frac{12}{4}}\int_g^h Ru^4V\,du - \frac{18}{4}x^{-\frac{13}{4}}\int_g^h Ru^3V\,du + \frac{111}{4^2}x^{-\frac{14}{4}}\int_g^h Ru^2V\,du - \frac{231}{4^3}x^{-\frac{15}{4}}\int_g^h RuV\,du,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = x^{-\frac{15}{4}}\int_g^h Ru^5V\,du - \frac{30}{4}x^{-\frac{16}{4}}\int_g^h Ru^4V\,du + \frac{345}{4^2}x^{-\frac{17}{4}}\int_g^h Ru^3V\,du - \frac{1785}{4^3}x^{-\frac{18}{4}}\int_g^h Ru^2V\,du + \frac{3465}{4^4}\int_g^h RuV\,du$$

Remplaçons, dans l'équation (5), les coefficients différentiels par leurs valeurs et ordonnons suivant les puissances décroissantes de $x^{\frac{1}{4}}$:

$$x^{\frac{4}{4}}\int_g^h \mathrm{R}u^5\mathrm{V}du + x^{\frac{3}{4}}\left(\mathrm{A}_1 - \frac{30}{4}\right)\int_g^h \mathrm{R}u^4\mathrm{V}du + x^{\frac{2}{4}}\left(\mathrm{A}_2 - \frac{18}{4}\mathrm{A}_1 + \frac{345}{4^2}\right)\int_g^h \mathrm{R}u^3\mathrm{V}du$$
$$+ x^{\frac{1}{4}}\left(\mathrm{A}_3 - \frac{9}{4}\mathrm{A}_2 + \frac{111}{4^2}\mathrm{A}_1 - \frac{1785}{4^3}\right)\int_g^h \mathrm{R}u\mathrm{V}du$$
$$+ \left(\mathrm{A}_4 - \frac{5}{4}\mathrm{A}_3 + \frac{21}{4^2}\mathrm{A}_2 - \frac{231}{4^3}\mathrm{A}_1 + \frac{3465}{4^4}\right)\int_g^h \mathrm{R}u\mathrm{V}du = x^{\frac{4}{4}}\int_g^h \mathrm{R}u\mathrm{V}du + \mathrm{A}_1 x^{\frac{3}{4}}\int_g^h \mathrm{RV}du.$$

Par intégration par parties et un choix des limites g et h, tel que la partie intégrée s'évanouisse, on a

$$\frac{1}{4^4}\frac{d^4(u^5\mathrm{V})}{du^4} - \frac{1}{4^3}\left(\mathrm{A}_1 - \frac{30}{4}\right)\frac{d^3(u^4\mathrm{V})}{du^3} + \frac{1}{4^2}\left(\mathrm{A}_2 - \frac{18}{4}\mathrm{A}_1 + \frac{345}{4^2}\right)\frac{d^2(u^3\mathrm{V})}{du^2}$$
$$- \frac{1}{4}\left(\mathrm{A}_3 - \frac{9}{4}\mathrm{A}_2 + \frac{111}{4^2}\mathrm{A}_1 - \frac{1785}{4^3}\right)\frac{d(u^2\mathrm{V})}{du}$$
$$+ \left(\mathrm{A}_4 - \frac{5}{4}\mathrm{A}_3 + \frac{21}{4^2}\mathrm{A}_2 - \frac{231}{4^3}\mathrm{A}_1 + \frac{3465}{4^4}\right)u\mathrm{V} = \frac{1}{4^4}\frac{d^4(u\mathrm{V})}{du^4} - \frac{\alpha_1}{4^3}\frac{d^3\mathrm{V}}{du^3};$$

ou bien

$$u(u^4 - 1)\frac{d^4\mathrm{V}}{du^4} + [(26 - 4\mathrm{P}_1)u^2 - 4(1 - \alpha_1)]\frac{d^3\mathrm{V}}{du^3} + (217 - 4 \cdot 18\mathrm{P}_1 + 4^2\mathrm{P}_2)u^3\frac{d^2\mathrm{V}}{dk^2}$$
$$+ (671 - 4 \cdot 91\mathrm{P}_1 + 4^2 \cdot 11\mathrm{P}_2 - 4^3\mathrm{P}_3)u^2\frac{d\mathrm{V}}{du} + \left(\frac{5}{4} - \rho_1\right)\left(\frac{5}{4} - \rho_2\right)\left(\frac{5}{4} - \rho_3\right)\left(\frac{5}{4} - \rho_4\right)u\mathrm{V} = 0.$$

Soit maintenant

$$\varphi = u^4;$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{du} = 4u^3,$$
$$\frac{d\mathrm{V}}{du} = 4u^3\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi},$$
$$\frac{d^2\mathrm{V}}{du^2} = 12u^2\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi} + 4^2u^6\frac{d^2\mathrm{V}}{du^2},$$
$$\frac{d^3\mathrm{V}}{du^3} = 2 \cdot 3 \cdot 4u\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi} + 4^2 \cdot 9u^5\frac{d^2\mathrm{V}}{d\varphi^2} + 4^3u^9\frac{d^3\mathrm{V}}{d\varphi^3},$$
$$\frac{d^4\mathrm{V}}{du^4} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi} + 4^2 \cdot 51u^4\frac{d^2\mathrm{V}}{d\varphi^2} + 4^3 \cdot 9u^8\frac{d^3\mathrm{V}}{d\varphi^3} + 4^4u^{12}\frac{d^4\mathrm{V}}{d\varphi^4}.$$

Par substitution de ces valeurs, l'équation précédente devient, après quelques réductions faciles,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi^3(\varphi-1)\dfrac{d^4V}{d\varphi^4}+\varphi^2\left[(11-P_1)\varphi-\left(\dfrac{22}{4}-\alpha_1\right)\right]\dfrac{d^3V}{d\varphi^3}+\varphi\left[\left(\dfrac{502}{4^2}-\dfrac{27}{4}P_1+P_2\right)\varphi-\dfrac{3}{4^2}(29-12\alpha_1)\right]\dfrac{d^2V}{d\varphi^2} \\ +\left[\left(\dfrac{1484}{4^3}-\dfrac{151}{4^2}P_1+\dfrac{14}{4}P_2-P_3\right)\varphi-\dfrac{2}{4}\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{5}{4}-\alpha_1\right)\right]\dfrac{dV}{d\varphi}+\left(\dfrac{5}{4}-\rho_1\right)\left(\dfrac{5}{4}-\rho_2\right)\left(\dfrac{5}{4}-\rho_3\right)\left(\dfrac{5}{4}-\rho_4\right)V=0. \end{array}\right.$$

Si nous la comparons à l'équation du quatrième ordre (*)

$$x^3(x-1)\frac{d^4y}{dx^4}+x^2Q_3(x)\frac{d^3y}{dx^3}+xQ_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q_1(x)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta\gamma\delta y=0,$$

où

$$Q_3(x)=(A_1+6)x-(R_1+3),$$
$$Q_2(x)=(A_2+3A_1+7)x-(R_2+R_1+1),$$
$$Q_1(x)=(A_3+A_2+A_1+1)x-\rho\sigma\tau,$$

$$A_1=\alpha+\beta+\gamma+\delta, \qquad R_1=\rho+\sigma+\tau,$$
$$A_2=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta, \qquad R_2=\rho\sigma+\rho\tau+\sigma\tau,$$
$$A_3=\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta+\alpha\beta\delta,$$

on trouve

$$\alpha=\frac{5}{4}-\rho_1,\quad \beta=\frac{5}{4}-\rho_2,\quad \gamma=\frac{5}{4}-\rho_3,\quad \delta=\frac{5}{4}-\rho_4,\quad \rho=\frac{2}{4},\quad \sigma=\frac{3}{4},\quad \tau=\frac{5}{4}-\alpha_1.$$

Ainsi, moyennant un choix convenable des limites g et h, la fonction auxiliaire est la série hypergéométrique du quatrième ordre

$$F\left(\frac{5}{4}-\rho_1,\ \frac{5}{4}-\rho_2,\ \frac{5}{4}-\rho_3,\ \frac{5}{4}-\rho_4;\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4}-\alpha_1;\ u\right).$$

(*) Pochhammer, *Ueber die Differentialgleichung der Allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten* (Journal de Crelle, t. CII, 1888).

5. Prenons, comme second exemple, l'équation du cinquième ordre :

$$(7)\quad x^4\frac{d^5y}{dx^5}+A_1x^3\frac{d^4y}{dx^4}+A_2x^2\frac{d^3y}{dx^3}+A_3x\frac{d^2y}{dx^2}+A_4\frac{dy}{dx}=x^2\frac{a^2y}{dx^2}+B_1x\frac{dy}{dx}+B_2y.$$

Les coefficients A_1, A_2, A_3 et A_4 ont la même valeur que précédemment et

$$B_1=\alpha_1+\alpha_2+1,\quad B_2=\alpha_1\alpha_2.$$

De

$$y=\int_g^h RV\,du,$$

où

$$R=e^{5ux^{\frac{1}{5}}},$$

on tire successivement :

$$\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{2}{5}}\int_g^h Ru\,V\,du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^{-\frac{4}{5}}\int_g^h Ru^2V\,du-\frac{2}{5}x^{-\frac{5}{5}}\int_g^h RuV\,du,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=x^{-\frac{6}{5}}\int_g^h Ru^3V\,du-2x^{-\frac{7}{5}}\int_g^h Ru^2V\,du+\frac{10}{9}x^{-\frac{8}{5}}\int_g^h RuV\,du,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=x^{-\frac{8}{5}}\int_g^h Ru^4V\,du-\frac{12}{3}x^{-\frac{9}{5}}\int_g^h Ru^3V\,du+\frac{52}{9}x^{-\frac{10}{5}}\int_g^h Ru^2V\,du-\frac{80}{5^3}x^{-\frac{11}{5}}\int_g^h RuV\,du,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=x^{-\frac{10}{5}}\int_g^h Ru^5V\,du-\frac{20}{5}x^{-\frac{11}{5}}\int_g^h Ru^4V\,du+\frac{160}{5^2}x^{-\frac{12}{5}}\int_g^h Ru^3V\,du-\frac{600}{5^3}x^{-\frac{13}{5}}\int_g^h Ru^2V\,du+\frac{880}{3^4}x^{-\frac{14}{5}}\int_g^h RuV\,du.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (7); intégrons par parties et choisissons de nouveau les limites g et h, de telle sorte que la partie intégrée soit identiquement nulle :

$$\frac{1}{5^4}\frac{d^4(u^5V)}{du^4}-\frac{1}{5^3}\left(A_1-\frac{20}{3}\right)\frac{d^3(u^4V)}{du^3}+\frac{1}{5^2}\left(A_2-4A_1+\frac{160}{9}\right)\frac{d^2(u^3V)}{du^2}$$

$$-\frac{1}{5}\left(A_3-2A_2+\frac{52}{9}A_1-\frac{600}{5^3}\right)\frac{d(u^2V)}{du}+\left(A_4-\frac{2}{3}A_3+\frac{10}{9}A_2-\frac{80}{27}A_1+\frac{880}{3^4}\right)uV$$

$$=\frac{1}{5^4}\frac{d^4(u^2V)}{du^4}-\frac{1}{5^3}\left(B_1-\frac{2}{3}\right)\frac{d^3(uV)}{du^3}+\frac{1}{5^2}B_2\frac{d^2V}{du^2};$$

ou bien encore

$$u^2(u^3-1)\frac{d^4V}{du^4}+u[(22-3P_1)u^3-(7-3\alpha_1-3\alpha_2)]\frac{d^3V}{du^3}+[(151-3^2.5P_1+3^2P_2)u^3-3^2(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)]\frac{d^2V}{du^2}$$
$$+3(123-61P_1+3^2P_2-3^2P_3)u^2\frac{dV}{du}+\left(\frac{4}{3}-\rho_1\right)\left(\frac{4}{3}-\rho_2\right)\left(\frac{4}{3}-\rho_3\right)\left(\frac{4}{3}-\rho_4\right)uV=0.$$

Faisons maintenant

$$u^3=\varphi;$$

d'où

$$\frac{dV}{du}=3u^2\frac{dV}{d\varphi},$$
$$\frac{d^2V}{du^2}=6u\frac{dV}{d\varphi}+3^2u^4\frac{d^2V}{d\varphi^2},$$
$$\frac{d^3V}{du^3}=6\frac{dV}{d\varphi}+6.3^2u^5\frac{d^2V}{d\varphi^2}+3^3u^6\frac{d^3V}{d\varphi^3},$$
$$\frac{d^4V}{du^4}=3.6.10u^2\frac{d^2V}{d\varphi^2}+12.3^2u^5\frac{d^3V}{d\varphi^3}+3^4u^8\frac{d^4V}{d\varphi^4}.$$

En conséquence,

$$(8).\quad\left\{\begin{aligned}&\varphi^3(\varphi-1)\frac{d^4V}{d\varphi^4}+\varphi^2\left[\left(\frac{16}{3}-P_1\right)\varphi-\left(\frac{19}{3}-\alpha_1-\alpha_2\right)\right]\frac{d^3V}{d\varphi^3}\\&+\varphi\left[\left(\frac{303}{3^2}-7P_1+P_2\right)\varphi-\left(\frac{71}{3^2}-3\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\right)\right]\frac{d^2V}{d\varphi^2}\\&+\left[\left(\frac{715}{3^3}-\frac{93}{3^2}P_1+\frac{11}{3}P_2-P_3\right)\varphi-\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}-\alpha_1\right)\left(\frac{4}{3}-\alpha_2\right)\right]\frac{dV}{d\varphi}\\&+\left(\frac{4}{3}-\rho_1\right)\left(\frac{4}{3}-\rho_2\right)\left(\frac{4}{3}-\rho_3\right)\left(\frac{4}{3}-\rho_4\right)V=0,\end{aligned}\right.$$

équation, à laquelle satisfait la série hypergéométrique

$$F\left(\frac{4}{3}-\rho_1,\quad\frac{4}{3}-\rho_2,\quad\frac{4}{3}-\rho_3,\quad\frac{4}{3}-\rho_4;\quad\frac{2}{3},\quad\frac{4}{3}-\alpha_1,\quad\frac{4}{3}-\alpha_2;\quad\varphi\right).$$

6. Si nous désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ les m constantes du numérateur et par $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}$, les $n-1$ constantes du dénominateur d'une fonction

hypergéométrique du n^{me} ordre, nous savons que, dans le domaine de l'origine, les n solutions particulières de l'équation différentielle (3) sont

$$\mathrm{F}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m; \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}; x),$$

$$x^{1-\rho_1}\mathrm{F}(\alpha_1-\rho_1+1, \alpha_2-\rho_1+1, \ldots \alpha_m-\rho_1+1; 2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \rho_3-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{1-\rho_i}\mathrm{F}(\alpha_1-\rho_i+1, \alpha_2-\rho_i+1, \ldots \alpha_m-\rho_i+1; 2-\rho_i, \rho_2-\rho_i+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_i+1; x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{1-\rho_{n-1}}\mathrm{F}(\alpha_1-\rho_{n-1}+1, \alpha_2-\rho_{n-1}+1, \ldots \alpha_m-\rho_{n-1}+1; 2-\rho_{n-1}, \rho_2-\rho_{n-1}+1, \ldots \rho_{n-2}-\rho_{n-1}+1; x).$$

Nous supposons que les nombres ρ_k et $\rho_i - \rho_k$ ne sont ni nuls, ni égaux à un nombre entier positif ou négatif. Ces hypothèses excluent l'existence d'intégrales logarithmiques.

Alors l'intégrale

$$\int_g^h e^{(n-m)(\alpha x)^{\frac{1}{n-m}}} u^{-\frac{n-m-1}{n-m}} \mathrm{V}_1 du$$

satisfait à l'équation différentielle (3), si V_1 est une solution, dans le domaine de l'infini, d'une équation hypergéométrique du $(n-1)^{\text{me}}$ ordre, dont les constantes sont respectivement

$$\alpha'_1 = \frac{n-m+1}{n-m} - \rho_1, \ \alpha'_2 = \frac{n-m+1}{n-m} - \rho_2, \ \ldots \ \alpha'_p = \frac{n-m+1}{n-m} - \rho_p, \ \ldots \ \alpha'_{n-1} = \frac{n-m+1}{n-m} - \rho_{n-1},$$

$$\rho'_1 = \frac{n-m+1}{n-m} - \alpha_1, \ \rho'_2 = \frac{n-m+1}{n-m} - \alpha_2, \ \ldots \ \rho'_p = \frac{n-m+1}{n-m} - \alpha_p, \ \ldots \ \rho'_m = \frac{n-m+1}{n-m} - \alpha_m,$$

$$\rho'_{m+1} = \frac{2}{n-m}, \ \ldots \ \rho'_{n-2} = \frac{n-m-1}{n-m}.$$

Une telle solution, appartenant à l'exposant α'_1, par exemple, est

$$u^{-\alpha'_1}\mathrm{F}\left(\alpha'_1, \alpha'_1-\rho'_1+1, \alpha'_2-\rho'_2+1, \ldots \alpha'_1-\rho'_{n-2}+1; \alpha'_1-\alpha'_2+1, \alpha'_1-\alpha'_3+1, \ldots \alpha'_1-\alpha'_{n-1}+1; \frac{1}{u}\right).$$

Maintenant, d'après l'analyse développée dans les deux précédents

mémoires (*), si ε désigne une quantité positive arbitrairement petite et que nous convenions d'adopter, pour valeur du radical $(\varepsilon)^{\frac{1}{n-m}}$, l'une des déterminations, dont la partie réelle est négative, l'intégrale

$$(9). \quad \cdots \int_{\varepsilon x}^{(0)^n} e^{(n-m)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m}}} u^{-\rho_1} V_1 du$$

satisfait à l'équation (3), si V_1 est une série hypergéométrique du $(n-1)^{me}$ ordre, ayant pour éléments au numérateur et au dénominateur

$$\alpha'_1 = \frac{1}{n-m} - \rho_1 + 1, \quad \alpha'_2 = \frac{2}{n-m} - \rho_1 + 1, \ldots \alpha'_{n-m-1} = \frac{n-m-1}{n-m} - \rho_1 + 1,$$

$$\alpha'_{n-m} = \alpha_1 - \rho_1 + 1, \ldots \alpha'_{n-1} = \alpha_m - \rho_1 + 1,$$

$$\rho'_1 = \rho_2 - \rho_1 + 1, \quad \rho'_2 = \rho_3 - \rho_1 + 1, \ldots \rho'_{n-2} = \rho_{n-1} - \rho_1 + 1.$$

Par une méthode exactement semblable à celle que nous venons d'indiquer, on prouverait que l'intégrale

$$(10). \quad \cdots \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}} u^{-\rho_1} V_2 du$$

est aussi une solution de l'équation (3), si V_2 représente la fonction hypergéométrique du $(n-1)^{me}$ ordre, dont les constantes du numérateur sont

$$\alpha'_1 = \frac{1}{n-m-1} - \rho_1 + 1, \quad \alpha'_2 = \frac{2}{n-m-1} - \rho_1 + 1, \ldots \alpha'_{n-m-2} = \frac{n-m-2}{n-m-1} - \rho_1 + 1,$$

$$\alpha'_{n-m-1} = \alpha_1 - \rho_1 + 1, \ldots \alpha'_{n-2} = \alpha_m - \rho_1 + 1.$$

Celles du dénominateur sont les mêmes que dans le premier cas.

Maintenant nous allons montrer que ces intégrales (9) et (10) sont des solutions particulières de l'équation différentielle (3). Pour plus de simpli-

(*) M, p. 20 et N, p. 7.

cité nous ferons encore usage de la notation déjà employée précédemment (*); $[a]_\upsilon^+$ désignera le produit

$$a(a+1)(a+2)\dots(a+\upsilon-1).$$

Si nous appelons I l'intégrale (9),

$$\mathrm{I}=\sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{\left[\frac{1}{n-m}-\rho_1+1\right]_\upsilon^+\cdots\left[\frac{n-m-1}{n-m}-\rho_1+1\right]_\upsilon^+[\alpha_1-\rho_1+1]_\upsilon^+\dots[\alpha_m-\rho_1+1]_\upsilon^+}{1.2.3\dots\upsilon[\rho_2-\rho_1+1]_\upsilon^+[\rho_3-\rho_1+1]_\upsilon^+\dots[\rho_{n-1}-\rho_1+1]_\upsilon^+}\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}e^{(n-m)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m}}}}u^{-\rho_1+\upsilon}du.$$

Soit

$$u=x(n-m)^{n-m}t^{n-m};$$

d'où

$$\mathrm{I}=(n-m)^{(n-m)(1-\rho_1)+1}\sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}x^{1-\rho_1+\upsilon}(n-m)^{(n-m)\upsilon}$$

$$\frac{\left[\frac{1}{n-m}-\rho_1+1\right]_\upsilon^+\cdots\left[\frac{n-m-1}{n-m}-\rho_1+1\right]_\upsilon^+[\alpha_1-\rho_1+1]_\upsilon^+\dots[\alpha_m-\rho_1+1]_\upsilon^+}{1.2.3\dots\upsilon[\rho_2-\rho_1+1]_\upsilon^+\dots[\rho_{n-1}-\rho_1+1]_\upsilon^+}\Gamma[(n-m)(\rho_1-\upsilon-1)].$$

Or

$$\Gamma[(n-m)(\rho_1-\upsilon-1)]=\frac{\Gamma[(n-m)(\rho_1-1)]}{(n-m)^{(n-m)\upsilon}\left[\frac{1}{n-m}-\rho_1+1\right]_\upsilon^+\left[\frac{2}{n-m}-\rho_1+1\right]_\upsilon^+\cdots\left[\frac{n-m-1}{n-m}-\rho_1+1\right]_\upsilon^+[2-\rho_1]_\upsilon^+};$$

donc

$$(11)\quad\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}e^{(n-m)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m}}}}u^{-\rho_1}\mathrm{V}_1du=(n-m)^{(n-m)(1-\rho_1)+1}\Gamma[(n-m)(\rho_1-1)]x^{1-\rho_1}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_1-\rho_1+1,\ \alpha_2-\rho_1+1,\dots\ \alpha_m-\rho_1+1;\\ 2-\rho_1,\quad \rho_2-\rho_1+1,\dots\rho_{n-1}-\rho_1+1;\end{matrix}x\right).$$

On trouverait tout aussi facilement que

$$(12)\quad\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}}}u^{-\rho_1}\mathrm{V}_2du=(n-m-1)^{(n-m-1)(1-\rho_1)+1}\Gamma[(n-m-1)(\rho_1-1)]x^{1-\rho_1}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_1-\rho_1+1,\ \alpha_2-\rho_1+1,\dots\ \alpha_m-\rho_1+1;\\ 2-\rho_1,\quad \rho_2-\rho_1+1,\dots\rho_{n-1}-\rho_1+1;\end{matrix}x\right).$$

(*) M et N.

CHAPITRE III.

EXPRESSION DES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DE L'ÉQUATION (3) PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

7. La série hypergéométrique

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m; \rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-1}; x)$$

est la solution uniforme de l'équation (3). Les coefficients constants de cette équation linéaire du n^{me} ordre sont, comme on le sait, des fonctions entières et symétriques des éléments α et ρ. m est un nombre entier inférieur ou tout au plus égal à $n - 2$.

Pour plus de symétrie et de simplicité dans les notations, nous convenons de représenter symboliquement la quantité $\frac{i}{n-m}$ par α_i et les constantes α_1, α_2, ... α_m par α_{n-m}, α_{n-m+1}, ... α_{n-1}. En outre, nous désignerons les constantes du dénominateur par ρ_2, ρ_3, ... ρ_n. Ces hypothèses admises une fois pour toutes, considérons la fonction

$$\Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x) = e^{(n-m)\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-m}}} v_{n-1}^{-\rho_n} \prod_{i=1}^{i=n-1} (v_{i-1} - v_i)^{\rho_{i+1} - \alpha_i - 1} v_{i-1}^{\alpha_i - \rho_i}.$$

v_0 doit être remplacé par l'unité.

Les $n - 1$ intégrales multiformes de l'équation (3), dans le domaine de l'origine, sont

$$(13). \quad \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1}, 0, \overline{v}_{n-1}, \overline{0})} dv_{n-2} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 0, \overline{v}_{p+1}, \overline{0})} dv_p \int_{c_{p-1}}^{(\infty, 1, \overline{\infty}, \overline{1})} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1}, 1, \overline{v}_{p-1}, \overline{1})} dv_{p-2} \dots \int_{c_1}^{(v_2, 1, \overline{v}_2, \overline{1})} \Phi dv_1,$$

$$(14). \quad \dots \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(\infty, 1, \overline{\infty}, \overline{1})} dv_{n-2} \int_{c_{n-3}}^{(v_{n-2}, 1, \overline{v}_{n-2}, \overline{1})} dv_{n-3} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 1, \overline{v}_{p+1}, \overline{1})} dv_p \dots \int_{c_1}^{(v_2, 1, \overline{v}_2, \overline{1})} \Phi dv_1,$$

$$(15). \quad \dots \dots \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1}, 0, \overline{v}_{n-1}, \overline{0})} dv_{n-2} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 0, \overline{v}_{p+1}, \overline{0})} dv_p \dots \int_{c_1}^{(v_2, 0, \overline{v}_2, \overline{0})} \Phi dv_1.$$

Nous avons modifié légèrement les circuits d'intégration. Dans l'intégrale (13), le circuit, décrit par la variable v_{p-1}, comprend le lacet (1) et le lacet (0′) sur la sphère, parcourus successivement dans le sens direct et dans le sens rétrograde, et nous convenons de désigner ce circuit par la notation $(\infty, 1, \overline{\infty}, \overline{1})$.

Pour déterminer la valeur de cette intégrale, faisons les substitutions :

$$(16)\quad v_1 = \frac{1}{1 - t_1 t_2 \dots t_{p-1}},\quad v_2 = \frac{1}{1 - t_2 t_3 \dots t_{p-1}} \dots v_i = \frac{1}{1 - t_i t_{i+1} \dots t_{p-1}},\quad v_{p-1} = \frac{1}{1 - t_{p-1}}.$$

Examinons d'abord les modifications introduites dans les circuits par ces transformations. Décrire dans le sens direct le lacet (0′) sur la sphère revient à parcourir dans le plan, d'un mouvement rétrograde, un circuit de très grand rayon enveloppant tous les points critiques.

Soit

$$v_{p-1} = \rho e^{i\theta} = \frac{1}{1 - t_{p-1}},$$

ρ étant une quantité très grande.

De cette relation, on déduit

$$t_{p-1} = 1 - \frac{e^{-i\theta}}{\rho}.$$

Ainsi, la variable v_{p-1} décrivant le lacet (0′) dans le sens direct ou le circuit correspondant dans le plan d'un mouvement rétrograde, la nouvelle variable t_{p-1} parcourra le lacet (1) dans le sens positif.

Sur le lacet (1), l'affixe du point mobile v_{p-1} est $1 + \rho e^{i\theta}$; donc

$$t_{p-1} = \rho \frac{e^{i\theta}}{1 + \rho e^{i\theta}}.$$

Aux lacets (0′) et (1) correspondent les lacets (1) et (0) et les variables v_{p-1} et t_{p-1} décrivent ces lacets dans le même sens.

Quant aux lacets (v_i) et (1), nous observons d'abord que les anciennes variables sont liées aux nouvelles par la relation

$$v_i = \frac{1}{1 - t_i \dfrac{(v_{i+1} - 1)}{v_{i+1}}}.$$

Sur les lacets (v_{i+1}) et (1), les affixes du point décrivant étant respectivement $v_{i+1} + \rho e^{i\theta}$, $1 + \rho e^{i\theta}$, on a

$$t_i = 1 + \frac{1}{(v_{i+1} - 1)} \frac{\rho e^{i\theta}}{(v_{i+1} + \rho e^{i\theta})},$$

$$t_i = \frac{v_{i+1}}{v_{i+1} - 1} \frac{\rho e^{i\theta}}{1 + \rho e^{i\theta}}.$$

Aux lacets (v_{i+1}) et (1) correspondent, pour la nouvelle variable t_i, les lacets (1) et (0), parcourus dans le même sens que les anciens.

Au moyen des substitutions (16), on transforme l'intégrale $(p-1)^{\text{uple}}$

$$\int_{c_{p-1}}^{(\infty, 1, \overline{\infty}, \overline{1})} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1}, 1, \overline{v}_{p-1}, \overline{1})} dv_{p-2} \cdots \int_{c_1}^{(v_2, 1, \overline{v}_2, \overline{1})} \Phi dv_2,$$

en la suivante,

$$\int_{c'_{p-1}}^{(1, 0, \overline{1}, \overline{0})} dt_{p-1} \int_{c'_{p-2}}^{(1, 0, \overline{1}, \overline{0})} dt_{p-2} \cdots \int_{c'_1}^{(1, 0, \overline{1}, \overline{0})} \Phi_1 dt_1,$$

où

$$\Phi_1 = (-1)^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_p-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{p-1}+p+1} t_{p-1}^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_p-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{p-1}-1} (1-t_{p-1})^{\alpha_{p-1}-\rho_{p+1}} [1 - v_p(1-t_{p-1})]^{\rho_{p+1}-\alpha_{p-1}}$$
$$\times \prod_{k=1}^{k=p-2} t_k^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_{k+1}-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_k-1} (1-t_k)^{\rho_{k+2}-\alpha_{k+1}-1} (1 - t_k t_{k+1} \ldots t_{p-1})^{\alpha_k-\rho_{k+2}} dt_k.$$

Il est permis de développer le facteur $[1 - v_p(1 - t_{p-1})]^{\rho_{p+1}-\alpha_p-1}$ par la

formule du binôme; alors, si nous désignons par I_1 l'intégrale en question, on aura

$$I_1 = (-1)^{s+\rho_3+\ldots+\rho_p-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{p-1}+p+1} \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{[\alpha_p - \rho_{p+1} + 1]_\upsilon^+}{1.2.3\ldots\upsilon} G_\upsilon H_\upsilon,$$

si, pour abréger, nous posons :

$$G_\upsilon = \int_{c_{p-1}}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} t_{p-1}^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_p-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{p-1}-1}(1-t_{p-1})^{\alpha_{p-1}-\rho_{p+1}+\upsilon}$$

$$\prod_{k=1}^{k=p-2} \int_{c_k}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} t_k^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_{k+1}-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_k-1}(1-t_k)^{\rho_{k+2}-\alpha_{k+1}-1}(1-t_k t_{k+1}\ldots t_{p-1})^{\alpha_k-\rho_{k+2}} dt_k,$$

$$H_\upsilon = \int_{\varepsilon_{\mathcal{L}}}^{(0)^{n-m}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},0,\overline{v}_{n-1},\overline{0})} dv_{n-2} \ldots \int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\overline{v}_{p+1},\overline{0})} \Phi_2 dv_1,$$

où

$$\Phi_2 = e^{(n-m)\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-m}}} v_{n-1}^{-\rho_1} v_p^\upsilon \prod_{k=p+1}^{k=n-1} (v_{k-1}-v_k)^{\rho_{k+1}-\alpha_k-1} v_{k-1}^{\alpha_k-\rho_k}.$$

De la comparaison de G_υ avec l'intégrale (32) (*), on déduit :

$$l_1 = \alpha_{p-1} - \rho_{p+1} + \upsilon + 1, \quad l_2 = \alpha_{p-2} - \rho_p, \quad \ldots \quad l_i = \alpha_{p-i} - \rho_{p-i+2}, \quad \ldots \quad l_{p-1} = \alpha_1 - \rho_3,$$
$$k_1 = \rho_p - \alpha_{p-1}, \quad k_2 = \rho_{p-1} - \alpha_{p-2}, \quad \ldots \quad k_i = \rho_{p-i+1} - \alpha_{p-i}, \quad \ldots \quad k_{p-1} = \rho_2 - \alpha_1.$$

Par suite,

$$G_\upsilon = e^{\pi i[\alpha_{p-1}-\rho_{p+1}+1+p(1-\alpha_1+\rho_2)]} \mathcal{E}(\rho_p - \alpha_{p-1}, \alpha_{p-1} - \rho_{p+1} + 1)$$

$$\prod_{k=2}^{k=p-1} e^{\pi i(k+1)(\rho_{p-k+2}-\alpha_{p-k+1})} \frac{\sin\pi(\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_{p-k+2}-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{p-k+1})}{\sin\pi(\alpha_{p-k}-\rho_{p+1}+1)}$$

$$\times \frac{[\alpha_{p-1}-\rho_{p+1}+1]_\upsilon^+}{[\rho_p-\rho_{p+1}+1]_\upsilon^+} \prod_{k=2}^{k=p-1} \frac{[\alpha_{p-k}-\rho_{p+1}+1]_\upsilon^+}{[\rho_{p-k+1}-\rho_{p+1}+1]_\upsilon^+} \mathcal{E}(\rho_{p-k+1}-\alpha_{p-k}, \alpha_{p-k}-\rho_{p+1}+1).$$

Maintenant, au moyen des substitutions

$$v_p = t_p t_{p+1}, \quad \ldots \quad t_{n-2} v_{n-1}, \quad v_{p+1} = t_{p+1}, \quad \ldots \quad t_{n-2} v_{n-1}, \quad \ldots \quad v_{n-2} = t_{n-2} v_{n-1}, \quad v_{n-1} = (n-m)^{n-m} x t_{n-1}^{n-m},$$

(*) M.

on transformera l'intégrale H_v en une autre, où les variables sont séparées, les nouveaux circuits étant les lacets (1) et (0).

Par suite,

$$H_v = \frac{(n-m)^{(n-m)(1-\rho_{p+1})+1} x^{1-\rho_{p+1}+v} \overline{\Gamma}[(n-m)(\rho_{p+1}-1)]}{[2-\rho_{p+1}]_v^+ \prod_{k=1}^{k=n-m-1} \left[\frac{k}{n-m} - \rho_{p+1} + 1\right]_v^+} \prod_{k=p}^{k=n-2} \frac{e^{\pi i(\alpha_{k+1}-\rho_{p+1})}[\alpha_{k+1}-\rho_{p+1}+1]_v^+}{[\rho_{k+2}-\rho_{p+1}+1]_v^+} \mathcal{E}(\rho_{k+2}-\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1}-\rho_{p+1}+1).$$

Finalement,

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1}, 0, \overline{v}_{n-1}, \overline{0})} dv_{n-2} \cdots \int_{c_{p-1}}^{(\infty, 1, \overline{\infty}, \overline{1})} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1}, 1, \overline{v}_{p-1}, \overline{1})} dv_{p-2} \cdots \int_{c_1}^{(v_2, 1, \overline{v}_2, \overline{1})} \Phi dv_1 \\ = e^{\pi i(\alpha_{p-1}-\rho_{p+1}+p(1-\alpha_1+\rho_2)} (n-m)^{(n-m)(1-\rho_{p+1})+1} \overline{\Gamma}[(n-m)(\rho_{p+1}-1)] \mathcal{E}(\rho_p - \alpha_{p-1}, \alpha_{p-1}-\rho_{p+1}+1) \\ \displaystyle\prod_{k=2}^{k=p-1} e^{\pi i(k+1)(\rho_{p-k+2}-\alpha_{p-k+1})} \frac{\sin\pi(\rho_2+\rho_3+\cdots+\rho_{p-k+2}-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{p-k+1})}{\sin\pi(\alpha_{p-k}-\rho_{p+1}+1)} \mathcal{E}(\rho_{p-k+1}-\alpha_{p-k}, \alpha_{p-k}-\rho_{p+1}+1) \\ \displaystyle\prod_{k=p}^{k=n-2} e^{\pi i(\alpha_{k+1}-\rho_{p+1})} \mathcal{E}(\rho_{k+2}-\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1}-\rho_{p+1}+1) x^{1-\rho_{p+1}} \mathrm{F}\left(\begin{matrix} \alpha_{n-m}-\rho_{p+1}+1, \alpha_{n-m+1}-\rho_{p+1}+1, \ldots \alpha_{n-1}-\rho_{p+1}+1; \\ 2-\rho_{p+1}, \rho_2-\rho_{p+1}+1, \ldots \rho_n-\rho_{p+1}+1; \end{matrix} x\right) \end{array} \right.$$

Cette formule donnera les intégrales multiformes appartenant aux exposants $1-\rho_3$, $1-\rho_4$, ... $1-\rho_n$. Pour obtenir la valeur de l'intégrale appartenant à l'exposant $1-\rho_3$, il suffit, comme on peut s'en assurer directement, de faire $p=2$ dans la formule précédente et de supprimer le premier produit. Ainsi

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1}, 0, \overline{v}_{n-1}, \overline{0})} dv_{n-2} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 0, \overline{v}_{p+1}, \overline{0})} dv_p \cdots \int_{c_2}^{(v_2, 0, \overline{v}_2, \overline{0})} dv_2 \int_{c_1}^{(\infty, 1, \overline{\infty}, \overline{1})} \Phi dv_1 \\ = e^{\pi i(2\rho_2-\rho_3-\alpha_1)} (n-m)^{(n-m)(1-\rho_3)+1} \overline{\Gamma}[(n-m)(\rho_3-1)] \mathcal{E}(\rho_2-\alpha_1, \alpha_1-\rho_3+1) \\ \displaystyle\prod_{k=2}^{k=n-2} e^{\pi i(\alpha_{k+1}-\rho_3)} \mathcal{E}(\rho_{k+2}-\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1}-\rho_3+1) \\ \times x^{1-\rho_3} \mathrm{F}\left(\begin{matrix} \alpha_{n-m}-\rho_3+1, \alpha_{n-m+1}-\rho_3+1, \ldots \alpha_{n-1}-\rho_3+1; \\ 2-\rho_3, \rho_2-\rho_3+1, \rho_4-\rho_3+1, \ldots \rho_n-\rho_3+1; \end{matrix} x\right). \end{array} \right.$$

Au moyen des substitutions

$$v_1 = t_1 t_2 \dots t_{n-2} v_{n-1},\ v_2 = t_2 t_3 \dots v_{n-1},\ \dots\ v_{n-2} = t_{n-2} v_{n-1},$$

et du développement de $(1 - v_1)^{\rho_3 - \frac{1}{n-m} - 1}$ par la formule du binôme, l'intégrale (15) devient

$$I_2 = \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{\left[\frac{1}{n-m} - \rho_1 + 1\right]_\upsilon^+}{1.2.3 \dots \upsilon} H_\upsilon,$$

où

$$H_\upsilon = \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}} e^{(n-m)\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-m}}} v_{n-1}^{-\rho_2+\upsilon} dv_{n-1} \prod_{k=1}^{k=n-2} \int_{c_k}^{(1,\,0,\,\overline{1},\,\overline{0})} t_k^{\alpha_{k+1}-\rho_2+\upsilon} (t_k - 1)^{\rho_{k+2}-\alpha_{k+1}-1} dt_k.$$

En conséquence, en vertu de nos hypothèses et de nos conventions,

$$(19)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},\,0,\,\overline{v}_{n-1},\,\overline{0})} dv_{n-2} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \dots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} \Phi dv_1 \\ = (n-m)^{1+(n-m)(1-\rho_2)}\, \Gamma[(n-m)(\rho_2 - 1)] \prod_{k=1}^{k=n-2} e^{\pi i(\alpha_{k+1}-\rho_2)}\, \mathcal{E}(\alpha_{k+1} - \rho_2 + 1,\ \rho_{k+2} - \alpha_{k+1}) \\ \times x^{1-\rho_2} \mathrm{F}\left(\begin{matrix} \alpha_{n-m} - \rho_2 + 1,\ \alpha_{n-m+1} - \rho_2 + 1,\ \dots\ \alpha_{n-1} - \rho_2 + 1; \\ 2 - \rho_2,\ \rho_3 - \rho_2 + 1,\ \dots\ \rho_n - \rho_2 + 1; \end{matrix} x \right). \end{array} \right.$$

8. Calcul de l'intégrale uniforme.

La solution uniforme est représentée par l'intégrale $(n-1)^{\text{uple}}$

$$\int_{c_{n-1}}^{(\infty,\,1,\,\overline{\infty},\,\overline{1})} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},\,1,\,\overline{v}_{n-1},\,\overline{1})} dv_{n-2} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,1,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{1})} dv_p \dots \int_{c_1}^{(v_2,\,1,\,\overline{v}_2,\,\overline{1})} \Phi_3 dv_1,$$

où

$$\Phi_3 = v_{n-1}^{-\rho_n} \sum_{j=1}^{j=n-m} e^{(n-m)\theta_j \left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-m}}} \prod_{k=1}^{k=n-1} (v_{k-1} - v_k)^{\rho_{k+1}-\alpha_k-1} v_{k-1}^{\alpha_k-\rho_k}.$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-m}$ désignent les $n-m$ racines de l'équation

$$\theta^{n-m} - 1 = 0.$$

Par les transformations

$$v_1 = \frac{1}{1 - t_1 t_2 \ldots t_{n-1}}, \; v_2 = \frac{1}{1 - t_2 t_3 \ldots t_{n-1}}, \; \ldots \; v_i = \frac{1}{1 - t_i t_{i+1} \ldots t_{n-1}}, \; \ldots \; v_{n-1} = \frac{1}{1 - t_{n-1}},$$

et le développement des exponentielles en série, l'intégrale devient

$$(-1)^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{n-1}+n+1}(n-m)\sum_{v=0}^{v=\infty}\frac{(n-m)^{(n-m)v}}{1.2.3\ldots(n-m)^v}\mathrm{H}_v x^v$$

si l'on pose

$$\mathrm{H}_v = \int_{c'_{n-1}}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} t_{n-1}^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{n-1}-1}(1-t_{n-1})^{\alpha_{n-1}+v-1}dt_{n-1}$$

$$\prod_{i=1}^{i=n-2}\int_{c'_i}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} t_i^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_{i+1}-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_i-1}(1-t_i)^{\rho_{i+2}-\alpha_{i+1}-1}(1-t_i t_{i+1}\ldots t_{n-1})^{\alpha_i-\rho_{i+2}}dt_i.$$

Ici

$$l_1 = \alpha_{n-1} + v, \; l_2 = \alpha_{n-2} - \rho_n, \; \ldots \; l_i = \alpha_{n-i} - \rho_{n-i+2}, \; \ldots \; l_{n-1} = \alpha_1 - \rho_3,$$
$$k_1 = \rho_n - \alpha_{n-1}, \; k_2 = \rho_{n-1} - \alpha_{n-2}, \; \ldots \; k_i = \rho_{n-i+1} - \alpha_{n-i}, \; \ldots \; k_{n-1} = \rho_2 - \alpha_1;$$

donc

$$(20)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{c_{n-1}}^{(\infty,1,\overline{\infty},\overline{1})} dv_{n-1}\int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},1,\overline{v}_{n-1},\overline{1})} dv_{n-2}\ldots\int_{c_p}^{(v_{p+1},1,\overline{v}_{p+1},\overline{1})} dv_p\ldots\int_{c_1}^{(v_2,1,\overline{v}_2,\overline{1})}\Phi_5 dv_1 \\ \quad = (n-m)\,e^{\pi i[n+1+\alpha_{n-1}+n(\rho_2-\alpha_1)]}\,\mathcal{E}(\alpha_{n-1},\,\rho_n-\alpha_{n-1}) \\ \displaystyle\prod_{k=2}^{k=n-1} e^{\pi i(k+1)(\rho_{n-k+2}-\alpha_{n-k+1})}\frac{\sin\pi(\rho_2+\rho_5+\cdots+\rho_{n-k+2}-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{n-k+1})}{\sin\pi\alpha_{n-k}}\,\mathcal{E}(\rho_{n-k+1}-\alpha_{n-k},\,\alpha_{n-k}) \\ \quad \times \mathrm{F}(\alpha_{n-m},\,\alpha_{n-m+1},\ldots\alpha_{n-1};\;\rho_2,\,\rho_3\ldots\rho_n;\;x). \end{array}\right.$$

9. Si les constantes $\alpha_{n-m}, \alpha_{n-m+1}, \dots \alpha_{n-1}$ sont positives et que les inégalités

$$\rho_{i+1} - \alpha_i > 0, \quad (i = 1, 2, \dots n-1)$$

$$\alpha_i - \rho_{p+1} + 1 > 0, \quad (i = 1, 2, \dots p-1, p+1, \dots n-1)$$

soient constamment vérifiées, les intégrales à circuits fermés peuvent être remplacées par des intégrales à circuits ouverts.

S'il en est ainsi, les solutions de l'équation (3) seront représentées par les intégrales définies :

$$(20') \quad \left\{ \int_1^{\infty} dv_{n-1} \int_1^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_1^{v_{p+1}} dv_p \dots \int_1^{v_2} \Phi_1 dv_1 \right.$$
$$\left. = (n-m) \prod_{k=1}^{k=n-1} \mathrm{E}(\alpha_{n-k}, \rho_{n-k+1} - \alpha_{n-k})\, \mathrm{F}(\alpha_{n-m}, \alpha_{n-m+1}, \dots \alpha_{n-1}; \rho_2, \rho_3 \dots \rho_n; x), \right.$$

$$(21). \quad \left\{ \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_0^{v_{p-1}} dv_p \int_1^{\infty} dv_{p-1} \int_1^{v_{p-1}} dv_{p-2} \dots \int_1^{v_2} \Phi_2 dv_1 \right.$$
$$= (-1)^{\rho_{p+1} - \alpha_p - 1} (n-m)^{1 + (n-m)(1-\rho_{p+1})}\, \overline{\Gamma}[(n-m)(\rho_{p+1} - 1)]$$
$$\prod_{k=1}^{k=p-1} \mathrm{E}(\rho_{p-k+1} - \alpha_{p-k},\ \alpha_{p-k} - \rho_{p+1} + 1) \prod_{k=p}^{k=n-2} \mathrm{E}(\rho_{k+2} - \alpha_{k+1},\ \alpha_{k+1} - \rho_{p+1} + 1)$$
$$\left. x^{1-\rho_{p+1}}\, \mathrm{F}\left(\begin{matrix} \alpha_{n-m} - \rho_{p+1} + 1,\ \alpha_{n-m+1} - \rho_{p+1} + 1, \dots \alpha_{n-1} - \rho_{p+1} + 1; \\ 2 - \rho_{p+1},\ \rho_2 - \rho_{p+1} + 1,\ \rho_3 - \rho_{p+1} + 1, \dots \rho_n - \rho_{p+1} + 1; \end{matrix} x \right), \right.$$

$$(22) \quad \left\{ \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m}} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_0^{v_p} dv_{p-1} \dots \int_0^{v_2} \Phi_2 dv_2 \right.$$
$$= (-1)^{\rho_2 - \alpha_1 - 1} (n-m)^{1 + (n-m)(1-\rho_2)}\, \overline{\Gamma}[(n-m)(\rho_2 - 1)] \prod_{k=1}^{k=n-2} \mathrm{E}(\rho_{k+2} - \alpha_{k+1},\ \alpha_{k+1} - \rho_2 + 1)$$
$$\left. x^{1-\rho_2}\, \mathrm{F}\left(\begin{matrix} \alpha_{n-m} - \rho_2 + 1,\ \alpha_{n-m+1} - \rho_2 + 1, \dots \alpha_{n-1} - \rho_2 + 1; \\ 2 - \rho_2,\ \rho_3 - \rho_2 + 1,\ \rho_4 - \rho_2 + 1, \dots \rho_n - \rho_2 + 1; \end{matrix} x \right). \right.$$

Nous appelons respectivement Φ_1 et Φ_2 les fonctions

$$v_{n-1}^{-\rho_n} \sum_{j=1}^{j=n-m} e^{(n-m)\theta_j \left(\frac{x}{n-m}\right)^{\frac{1}{n-m}}} \prod_{k=1}^{k=n-1} (v_k - v_{k-1})^{\rho_{k+1}-\alpha_{k-1}} v_{k-1}^{\alpha_k-\rho_k},$$

$$e^{(n-m)\left(\frac{x}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-m}}} v_{n-1}^{-\rho_n} \prod_{k=1}^{k=n-1} (v_k - v_{k-1})^{\rho_{k+1}-\alpha_{k-1}} v_{k-1}^{\alpha_k-\rho_k}.$$

10. Application. — Choisissons, comme exemple, l'équation traitée par M. Pochhammer (*) :

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (\rho + \sigma + 1)\, x \frac{d^2y}{dx^2} + (\rho\sigma - x) \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0.$$

Ici

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \alpha, \quad \rho_2 = \rho \quad \text{et} \quad \sigma = \rho_3.$$

D'après les formules (17), (19) et (20) :

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\varepsilon x}^{(0)^2} e^{2\sqrt{\frac{x}{v_2}}} v_2^{-\sigma} dv_2 \int_{c_1}^{(\infty, 1, \overline{\infty}, \overline{1})} v_1^{\alpha-\rho} (1 - v_1)^{\rho-\frac{1}{2}-1} (v_1 - v_2)^{\sigma-\alpha-1} dv_2 \\ &= e^{\pi i(2\rho-\sigma-\frac{1}{2})} 2^{3-2\sigma} \overline{\Gamma}(2\sigma - 2)\, \mathcal{E}\left(\rho - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \sigma\right) x^{1-\sigma} \mathrm{F}(\alpha - \sigma + 1;\ 2 - \sigma,\ \rho - \sigma + 1;\ x). \end{aligned} \right.$$

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\varepsilon x}^{(0)^2} e^{2\sqrt{\frac{x}{v_2}}} v_2^{-\sigma} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2, 0, \overline{v}_2, \overline{0},)} v_1^{\alpha-\rho} (1 - v_1)^{\rho-\frac{1}{2}-1} (v_1 - v_2)^{\sigma-\alpha-1} dv_2 \\ &= 2^{3-2\rho} e^{\pi i(\alpha-\rho)} \overline{\Gamma}(2\rho_2 - 2)\, \mathcal{E}(\alpha - \rho + 1,\ \sigma - \alpha)\, x^{1-\rho} \mathrm{F}(\alpha - \rho + 1;\ 2 - \rho,\ \sigma - \rho + 1;\ x), \end{aligned} \right.$$

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{c_2}^{(\infty, 1, \overline{\infty}, \overline{1})} \left(e^{2\sqrt{\frac{x}{v_2}}} + e^{-2\sqrt{\frac{x}{v_2}}}\right) v_2^{-\sigma} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2, 1, \overline{v}_2, \overline{1})} v_1^{\alpha-\rho} (1 - v_1)^{\rho-\frac{1}{2}-1} (v_1 - v_2)^{\sigma-\alpha-1} dv_2 \\ &= 2e^{\pi i\left(3\rho+3\sigma-2\alpha-\frac{5}{2}\right)} \sin \pi \left(\rho + \sigma - \alpha - \frac{1}{2}\right) \mathcal{E}(\sigma - \alpha, \alpha)\, \mathcal{E}\left(\rho - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \mathrm{F}(\alpha;\ \rho,\ \sigma;\ x). \end{aligned} \right.$$

(*) Pochhammer, *Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen dritter Ordnung* (Mathematische Annalen, t. XLVI, 1895.)

Si les constantes satisfont aux inégalités :

$$\alpha > 0, \quad \rho - \frac{1}{2} > 0, \quad \sigma - \alpha > 0, \quad \frac{3}{2} - \sigma > 0, \quad \alpha - \rho + 1 > 0,$$

on a, en vertu des formules (20), (21) et (22) :

$$(26)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_1^{\infty} \left(e^{2\sqrt{\frac{x}{v_2}}} + e^{-2\sqrt{\frac{x}{v_2}}} \right) v_2^{-\sigma} dv_2 \int_1^{v_2} v_1^{\alpha-\rho} (v_1 - 1)^{\rho-\frac{1}{2}-1} (v_2 - v_1)^{\sigma-\alpha-1} dv_1 \\ \qquad = 2\mathrm{E}(\alpha,\ \sigma-\alpha)\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{2},\ \rho-\frac{1}{2}\right)\mathrm{F}(\alpha;\ \rho,\ \sigma;\ x), \end{array} \right.$$

$$(27)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)x} e^{2\sqrt{\frac{x}{v_2}}} v_2^{-\sigma} dv_2 \int_1^{\infty} v_1^{\alpha-\rho} (v_1 - 1)^{\rho-\frac{1}{2}-1} (v_2 - v_1)^{\sigma-\alpha-1} dv_1 \\ = (-1)^{\sigma-\alpha-1} 2^{3-2\sigma} \Gamma(2\sigma-2)\mathrm{E}\left(\rho-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}-\sigma\right) x^{1-\sigma}\mathrm{F}(\alpha-\sigma+1;\quad 2-\sigma,\quad \rho-\sigma+1;\ x), \end{array} \right.$$

$$(28)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)x} e^{2\sqrt{\frac{x}{v_2}}} v_2^{-\sigma} dv_2 \int_0^{v_2} v_1^{\alpha-\rho} (v_1 - 1)^{\rho-\frac{1}{2}-1} (v_2 - v_1)^{\sigma-\alpha-1} dv_1 \\ = (-1)^{\rho-\frac{1}{2}-1} 2^{3-2\rho} \Gamma(2\rho-2)\mathrm{E}(\sigma-\alpha,\ \alpha-\rho+1) x^{1-\rho}\mathrm{F}(\alpha-\rho+1;\quad 2-\rho,\quad \sigma-\rho+1;\ x). \end{array} \right.$$

Application II. — L'équation est du cinquième ordre. Les constantes du dénominateur sont $\rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$; celles du numérateur, α_3 et α_4. Ces quantités satisfont aux relations (19), savoir :

$$\rho_{i+1} - \alpha_i > 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$
$$\alpha_i - \rho_{p+1} + 1 > 0, \quad (i = 1, 2, \ldots p-1, \quad p+1, \ldots 4).$$

On a

$$\Phi_1 = v_1^{-\rho_5} \left[e^{\theta_4 \left(\frac{x}{v_4}\right)^{\frac{1}{3}}} + e^{\theta_2 \left(\frac{x}{v_4}\right)^{\frac{1}{3}}} + e^{\theta_3 \left(\frac{x}{v_4}\right)^{\frac{1}{3}}} \right] (v_1 - 1)^{\rho_2-\alpha_1-1} v_1^{\alpha_2-\rho_2} (v_2 - v_1)^{\rho_3-\alpha_2-1} v_2^{\alpha_3-\rho_3} (v_3 - v_2)^{\rho_4-\alpha_3-1} v^{\alpha_4-\rho_4} (v_4 - v_3)^{\rho_5-\alpha_4-1},$$

$$\Phi_2 = v_1^{-\rho_5} e^{\left(\frac{x}{v_4}\right)^{\frac{1}{3}}} (v_1 - 1)^{\rho_2-\alpha_1-1} v_1^{\alpha_2-\rho_2} (v_2 - v_1)^{\rho_3-\alpha_2-1} v_2^{\alpha_3-\rho_3} (v_3 - v_2)^{\rho_4-\alpha_3-1} v_3^{\alpha_4-\rho_4} (v_4 - v_3)^{\rho_5-\alpha_4-1}.$$

En vertu des formules (20), (21) et (22) :

$$\int_1^{\infty} dv_4 \int_1^{v_4} dv_3 \int_1^{v_3} dv_2 \int_1^{v_2} \Phi_1 dv_1 = 3\mathrm{E}\left(\rho_2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \mathrm{E}\left(\rho_3 - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \mathrm{E}(\rho_4 - \alpha_3, \alpha_3)\,\mathrm{E}(\rho_5 - \alpha_4, \alpha_4)$$

$$\mathrm{F}(\alpha_3, \alpha_4 ; \quad \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 ; \quad x),$$

$$\int_{\varepsilon x}^{(0)3} dv_4 \int_0^{v_4} dv_3 \int_0^{v_2} dv_2 \int_1^{\infty} \Phi_2 dv_1 = (-1)^{\rho_3 - \alpha_2 - 1} 3^{4+3(1-\rho_3)}\, \overline{\Gamma}(3\rho_3 - 3)\, \mathrm{E}\left(\rho_2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \rho_3 + 1\right)$$

$$\mathrm{E}(\alpha_3 - \rho_3 + 1, \rho_4 - \alpha_3)\, \mathrm{E}(\rho_5 - \alpha_4, \alpha_4 - \rho_3 + 1)\, x^{1-\rho_3} \mathrm{F}(\alpha_3 - \rho_3 + 1, \alpha_4 - \rho_3 + 1 ; 2 - \rho_3, \rho_2 - \rho_3 + 1, \rho_4 - \rho_3 + 1, \rho_5 - \rho_3 + 1 ; x),$$

$$\int_{\varepsilon x}^{(0)3} dv_4 \int_0^{v_4} dv_3 \int_1^{\infty} dv_2 \int_1^{v_2} \Phi_2 dv_1 = (-1)^{\rho_4 - \alpha_3 - 1} 3^{4+3(1-\rho_4)}\, \overline{\Gamma}(3\rho_4 - 3)\, \mathrm{E}\left(\rho_2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \rho_4 + 1\right)$$

$$\mathrm{E}\left(\rho_3 - \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - \rho_4 + 1\right) \mathrm{E}(\rho_5 - \alpha_4, \alpha_4 - \rho_4 + 1)\, x^{1-\rho_4} \mathrm{F}(\alpha_3 - \rho_4 + 1, \alpha_4 - \rho_4 + 1 ; 2 - \rho_4, \rho_2 - \rho_4 + 1, \rho_3 - \rho_4 + 1, \rho_5 - \rho_4 + 1 ; x),$$

$$\int_{\varepsilon x}^{(0)3} dv_4 \int_1^{\infty} dv_3 \int_1^{v_3} dv_2 \int_1^{v_2} \Phi_2 dv_1 = (-1)^{\rho_5 - \alpha_4 - 1} 3^{4+3(1-\rho_5)}\, \overline{\Gamma}(3\rho_5 - 3)\, \mathrm{E}\left(\rho_2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \rho_5 + 1\right)$$

$$\mathrm{E}\left(\rho_3 - \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - \rho_5 + 1\right) \mathrm{E}(\rho_4 - \alpha_3, \alpha_3 - \rho + 1)\, x^{1-\rho_5} \mathrm{F}(\alpha_3 - \rho_5 + 1, \alpha_4 - \rho_5 + 1 ; 2 - \rho_5, \rho_2 - \rho_5 + 1, \rho_3 - \rho_5 + 1, \rho_4 - \rho_5 + 1 ; x),$$

$$\int_{\varepsilon x}^{(0)3} dv_4 \int_0^{v_4} dv_3 \int_0^{v_3} dv_2 \int_0^{v_2} \Phi_2 dv_1 = (-1)^{\rho_2 - \alpha_1 - 1} 3^{4+3(1-\rho_2)}\, \overline{\Gamma}(3\rho_2 - 3)\, \mathrm{E}\left(\rho_3 - \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - \rho_2 + 1\right)$$

$$\mathrm{E}(\rho_4 - \alpha_3, \alpha_1 - \rho_2 + 1)\, \mathrm{E}(\rho_5 - \alpha_4, \alpha_4 - \rho_2 + 1)\, x^{1-\rho_2} \mathrm{F}(\alpha_3 - \rho_2 + 1, \alpha_4 - \rho_2 + 1 ; 2 - \rho_2, \rho_3 - \rho_2 + 1, \rho_4 - \rho_2 + 1, \rho_5 - \rho_2 + 1 ; x).$$

11. Au commencement de ce travail, nous avons supposé que les nombres ρ_i et $\rho_i - \rho_k$ n'étaient ni nuls ni égaux à un nombre entier positif ou négatif. S'il en était autrement, les formules (17) et (19) ne donneraient plus n solutions distinctes et l'équation différentielle aurait des intégrales logarithmiques. Examinons les cas où ρ_{p+1}, par exemple, est égal à un nombre entier, positif ou négatif.

PREMIER CAS. — Si ρ_{p+1} est égal à un nombre entier positif, que j'appelle q, H_ν contient le facteur $\overline{\Gamma}[(n-m)(\rho_{p+1}-\nu-1)]$; par suite, H_0, H_1, ..., H_{q-2} s'évanouissent, puisque ces quantités renferment les fonctions $\overline{\Gamma}[(n-m)(q-1)]$, $\overline{\Gamma}[(n-m)(q-2)]$ ... $\overline{\Gamma}(n-m)$, qui sont identiquement nulles.

Soit

$$\nu = q - 1 + \mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Pour l'intégrale G_ν, les constantes l_i et k_i deviennent

$$l_1 = \alpha_{p-1} + \mu, \quad l_2 = \alpha_{p-2} - \rho_p, \ldots l_i = \alpha_{p-i} - \rho_{p-i+2}, \ldots l_{p-1} = \alpha_1 - \rho_3,$$

$$k_1 = \rho_p - \alpha_{p-1}, \quad k_2 = \rho_{p-1} - \alpha_{p-2}, \ldots k_i = \rho_{p-i+1} - \alpha_{p-i}, \ldots k_{p-1} = \rho_2 - \alpha_1.$$

Donc

$$G_\nu = e^{\pi i(\alpha_{p-1}+\mu+p+1+p\rho_2-p\alpha_1)}\,\mathcal{E}(\alpha_{p-1}+\mu, \rho_p-\alpha_{p-1})\prod_{k=2}^{k=p-1} e^{\pi i(k+1)(\rho_{p-k+2}-\alpha_{p-k+1})}$$

$$\frac{\sin\pi(\rho_2+\rho_3+\cdots+\rho_{p-k+2}-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{p-k+1})}{\sin\pi(\alpha_{p-k+}+\mu)}\,\mathcal{E}(\rho_{p\ k+1}-\alpha_{p-k},\quad \alpha_{p-k}+\mu)$$

Quant à l'intégrale H_ν,

$$H_\nu = (n-m)^{1+\mu(n-m)}x^\mu\,\overline{\Gamma}[-\mu(n-m)]\prod_{k=p}^{k=n-2} e^{\pi i(\alpha_{k+1}+\mu-1)}\,\mathcal{E}(\alpha_{k+1}+\mu,\quad \rho_{k+2}-\alpha_{k+1}).$$

Or

$$\overline{\Gamma}[-\mu(n-m)] = \frac{2\pi i}{1.2.3\ldots(n-m)\mu};$$

et

$$H_\nu = \frac{2(n-m)\pi i x^\mu}{\left[\frac{1}{n-m}\right]_\mu^+\left[\frac{2}{n-m}\right]_\mu^+\cdots\left[\frac{n-m-1}{n-m}\right]_\mu^+ 1.2.3\ldots\mu}\prod_{k=p}^{k=n-2} e^{\pi i(\alpha_{k+1}-1)}\frac{[\alpha_{k+1}]_\mu^+}{[\rho_{k+2}]_\mu^+}\,\mathcal{E}(\alpha_{k+1},\rho_{k+2}-\alpha_{k+1})$$

Finalement la valeur de l'intégrale (17) devient

$$2(n-m)\pi i\,\frac{(\alpha_p-1)(\alpha_p-2)\dots(\alpha_p-q+1)}{1.2.3\dots(q-1)}\,e^{\pi i(\alpha_{p-1}+p+1+p\rho_2-p\alpha_1)}\,\mathcal{E}(\alpha_{p-1},\ \rho_p-\alpha_{p-1})$$

$$\times\prod_{k=2}^{k=p-1} e^{\pi i(k+1)\rho_{p-k+2}\ \alpha_{p-k+1}}\,\frac{\sin\pi(\rho_2+\rho_3+\dots+\rho_{p-k+2}-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{p-k+1})}{\sin\pi\alpha_{p-k}}\,\mathcal{E}(\rho_{p-k+1}-\alpha_{p-k},\alpha_{p-k})$$

$$\prod_{k=p}^{k=n-2} e^{\pi i(\alpha_{k+1}-1)}\,\mathcal{E}(\alpha_{k+1},\rho_{k+2}-\alpha_{k+1})\,\mathrm{F}(\alpha_{n-m},\alpha_{n-m+1},\dots\alpha_{n-1};\ \rho_2,\rho_3\dots\rho_p,\rho_{p+1},\dots\rho_n;\ x).$$

Dans le cas où ρ_{p+1} est égal à un nombre entier q, l'intégrale (17) ne diffère de l'intégrale (20) que par une constante.

Deuxième cas. — $\rho_{p+1}=-q$, q étant un nombre entier.

Si l'on cherche à déterminer la valeur de l'intégrale (20), on trouve que H_υ contient le facteur $\mathcal{E}(\rho_{p+1}-\alpha_p,\ \alpha_p+\upsilon)$, qui est égal à

$$2i\sin\pi(\upsilon-q)\,\frac{\overline{\Gamma}(-q-\alpha_p)\,\overline{\Gamma}(\alpha_p+\upsilon)}{\overline{\Gamma}(\upsilon-q)}.$$

Cette quantité est nulle, tant que υ est inférieur ou égal à q.

L'intégrale holomorphe est égale à

$$(n-m)\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{(n-m)^{q+\mu+1}x^{q+\mu+1}}{1.2.3\dots(q+\mu+1)(n-m)}\,e^{\pi i[\alpha_{n+1}+n(\rho_2-\alpha_1)+n+q]}\,\mathcal{E}(\rho_n-\alpha_{n-1},\ \alpha_{n-1}+q+1)$$

$$\prod_{k=2}^{k=n-1} e^{\pi i(k+1)(\rho_{n-k+2}\ \alpha_{n-k+1})}\,\frac{\sin\pi(\rho_2+\rho_3+\dots+\rho_{n-k+2}-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{n-k+1})}{\sin\pi(\alpha_{n-k}+q+1)}\,\mathcal{E}(\rho_{n-k+1}-\alpha_{n-k},\alpha_{n-k}+q+1)$$

$$\times\frac{[\alpha_1+q+1]_\mu^+[\alpha_2+q+1]_\mu^+\dots[\alpha_{n-1}+q+1]_\mu^+}{[\rho_2+q+1]_\mu^+[\rho_3+q+1]_\mu^+\dots[\rho_n+q+1]_\mu^+};$$

c'est-à-dire égale à

$$\frac{(n-m)\,e^{\pi i(\alpha_{n+1}+n\rho_2-n\alpha_1+n+q)}}{1.2.3\dots(q+1)(n-m)}\,\mathcal{E}(\rho_n-\alpha_{n-1},\alpha_{n-1}+q+1)\prod_{k=2}^{k=n-1} e^{\pi i(k+1)(\rho_{n-k+2}-\alpha_{n-k+2})}$$

$$\frac{\sin\pi(\rho_2+\rho_3+\dots+\rho_{n-k+2}-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{n-k+1})}{\sin\pi(\alpha_{n-k}+q+1)}\,\mathcal{E}(\rho_{n-k+1}-\alpha_{n-k},\ \alpha_{n-k}+q+1)$$

$$x^{1+q}\mathrm{F}(\alpha_{n-m}+q+1,\ \alpha_{n-m+1}+q+1,\dots\alpha_{n-1}+q+1;\ 2+q,\rho_2+q+1,\ \rho_3+q+1,\dots\rho_n+q+1;\ x).$$

Dans ce cas encore, deux des solutions, représentées par le système d'intégrales définies, ne sont plus distinctes. On sait alors que l'équation différentielle a des solutions logarithmiques. Nous avons d'ailleurs exclu formellement ces cas de notre analyse.

Si l'un des éléments du dénominateur, ρ_{p+1}, par exemple, satisfait à la condition

$$\rho_{p+1} = {}_{n-m} + q,$$

p étant un entier inférieur à $(n-m)$, la formule (17) devient illusoire.

H_υ, contenant le facteur $\overline{\Gamma}\left[(n-m)\left(\frac{p}{n-m}+q-\upsilon-1\right)\right]$, est nul, tant que υ est inférieur ou égal à $q-1$. Or le facteur $[1-v_p(1-t_{p-1})]^{q-1}$ contient v_p à une puissance tout au plus égale à $q-1$; donc la formule (17) est identiquement nulle.

Cette considération nous amène naturellement à parler du second mode de représentation des solutions de l'équation (3) par des intégrales définies.

CHAPITRE IV.

12. Comme je l'ai montré (*), la résolution de l'équation (3) par des intégrales définies dépend aussi des solutions d'une équation différentielle du $(n-1)^{\text{me}}$ ordre, lesquelles sont des séries hypergéométriques, dont les constantes du numérateur sont en nombre égal à celles du dénominateur.

Désignons encore par α_i la fraction $\frac{i}{n-m-1}$ et par α_{n-m-1}, α_{n-m}, ... α_{n-2}, les m constantes α_1, α_2, ... α_m et appelons ρ_2 la constante du dénominateur, dont la partie réelle est la plus grande.

Soient

$$\Phi_1 = e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}} v_{n-1}^{-\rho_n} e^{v_1} \prod_{k=1}^{k=n-2} (v_{k+1}-v_k)^{\rho_{k+2}-\alpha_k-1} v_k^{\alpha_k-\rho_{k+1}},$$

$$\Phi_2 = v_{n-1}^{-\rho_n} e^{v_1} \sum_{j=1}^{j=n-m-1} e^{(n-m-1)\theta_j\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}} \prod_{k=1}^{k=n-2} (v_{k+1}-v_k)^{\rho_{k+2}-\alpha_k-1} v_k^{\alpha_k-\rho_{k+1}},$$

(*) N.

$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-m-1}$ étant les racines de l'équation

$$\theta^{n-m-1} - 1 = 0.$$

Les solutions de l'équation (3) seront

$$(29) \quad \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},0,\overline{v}_{n-1},\overline{0})} dv_{n-2} \ldots \int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\overline{v}_{p+1},\overline{0})} dv_p \int_{-\infty}^{(0,v_p)} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1},0,\overline{v}_{p-1},\overline{0})} dv_{p-2} \ldots \int_{c_1}^{(v_2,0,\overline{v}_1,\overline{0})} \Phi_1 dv_1,$$

$$(30) \quad \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},0,\overline{v}_{n-1},\overline{0})} dv_{n-2} \ldots \int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\overline{v}_{p+1},\overline{0})} dv_p \int_{c_{p-1}}^{(v_p,0,\overline{v}_p,\overline{0})} dv_{p-1} \ldots \int_{c_1}^{(v_2,0,\overline{v}_2,\overline{0})} \Phi_1 dv_1,$$

$$(31) \quad \int_{-\infty}^{(0)} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},0,\overline{v}_{n-1},\overline{0})} dv_{n-2} \ldots \int_{c_{p-1}}^{(v_p,0,\overline{v}_p,\overline{0})} dv_{p-1} \ldots \int_{c_1}^{(v_2,0,\overline{v}_2,\overline{0})} \Phi_2 dv_1.$$

Pour abréger l'écriture, appelons ces intégrales I_1, I_2 et I_3.

Dans l'intégrale (29), la variable v_{p-1} décrivant un circuit qui entoure l'origine et le point d'affixe v_p, il est permis de développer le facteur $(v_p - v_{p-1})^{\rho_{p+1}-\alpha_{p-1}-1}$ par la formule du binôme. Alors

$$I_1 = (-1)^{\rho_{p+1}-\alpha_{p-1}-1} \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{[\alpha_{p-1} - \rho_{p+1} + 1]_\upsilon^+}{1.2.3 \ldots \upsilon} G_\upsilon H_\upsilon;$$

$$G_\upsilon = \int_{-\infty}^{(0)} v_{p-1}^{\rho_{p+1}-\rho_p-\upsilon-1} dv_{p-1} \prod_{k=1}^{k=p-2} \int_{c_k}^{(v_{k+1},0,\overline{v}_{k+1},\overline{0})} (v_{k+1} - v_k)^{\rho_{k+2}-\alpha_k-1} v_k^{\alpha_k-\rho_{k+1}} e^{v_1} dv_k,$$

$$H_\upsilon = \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},0,\overline{v}_{n-1},\overline{0})} dv_{n-2} \ldots \int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\overline{v}_{p+1},\overline{0})} \Phi_3 dv_p,$$

$$\Phi_3 = e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}} v_{n-1}^{-\rho_n} v_p^{\upsilon} \prod_{k=p}^{k=n-2} (v_{k+1} - v_k)^{\rho_{k+2}-\alpha_k-1} v_k^{\alpha_k-\rho_{k+1}}.$$

En vertu de la formule (22) (*) :

$$a = \rho_2 - \rho_{p-1} + \upsilon + 1, \quad c_1 = \rho_3 - \alpha_1, \; c_2 = \rho_4 - \alpha_2, \ldots c_k = \rho_{k+2} - \alpha_k, \ldots c_{p-2} = \rho_p - \alpha_{p-2},$$

$$b_1 = \alpha_1 - \rho_2, \; b_2 = \alpha_2 - \rho_2, \ldots b_k = \alpha_k - \rho_2, \ldots b_{p-2} = \alpha_{p-2} - \rho_2,$$

et

$$G_\upsilon = \overline{\Gamma}(\rho_{p+1} - \rho_2 - \upsilon) \prod_{k=1}^{k=p-2} e^{\pi i(\rho_{k+2} - \rho_2)} \frac{\sin \pi(\alpha_k - \rho_2)}{\sin \pi(\alpha_k - \rho_{p+1} + \upsilon + 1)} \mathcal{E}(\alpha_k - \rho_{p+1} + \upsilon + 1, \rho_{k+2} - \alpha_k).$$

Au moyen des transformations

$$v_p = t_p t_{p+1} \ldots t_{n-2} v_{n-1}, \; v_{p+1} = t_{p+1} t_{p+2} \ldots t_{n-2} v_{n-1}, \ldots v_{n-2} = t_{n-2} v_{n-1}, \; v_{n-1} = (n-m-1)^{n-m-1} x t_{n-1}^{n-m-1},$$

$$H_\upsilon = (n-m-1)^{1+(n-m-1)(1-\rho_{p+1}+\upsilon)} x^{1-\rho_{p+1}+\upsilon} \overline{\Gamma}[(n-m-1)(\rho_{p+1}-\upsilon-1)] \prod_{k=p}^{k=n-2} e^{\pi i(\rho_{k+2}-\rho_{p-1}+\upsilon-1)} \mathcal{E}(\alpha_k - \rho_{p+1} + 1, \rho_{k+2} - \alpha_k).$$

Finalement,

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},0,\overline{v}_{n-1},\overline{0})} dv_{n-2} \ldots \int_{-\infty}^{(0,v_p)} dv_{p-1} \int_{p-2}^{(v_{p-1},0,\overline{v}_{p-1},\overline{0})} dv_{p-2} \ldots \int_{c_1}^{(v_2,0,\overline{v}_2,\overline{0})} \Phi_1 dv_1 \\ \quad = e^{\pi i(\rho_{p+1} - \alpha_{p-1} + n)} (n-m-1)^{1+(n-m-1)(1-\rho_{p+1})} \overline{\Gamma}[(n-m-1)(\rho_{p+1}-1)] \overline{\Gamma}(\rho_{p+2} - \rho_2) \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{k=p-2} e^{\pi i(\rho_{k+2}-\rho_2)} \frac{\sin \pi(\alpha_k - \rho_2)}{\sin \pi(\alpha_k - \rho_{p+1})} \mathcal{E}(\alpha_k - \rho_{p+1} + 1, \rho_{k+2} - \alpha_\mu) \prod_{k=p}^{k=n-2} e^{\pi i(\rho_{k+2}-\rho_{p+1})} \mathcal{E}(\alpha_k - \rho_{p+1} + 1, \rho_{k+2} - \alpha_k) \\ \quad x^{1-\rho_{p+1}} \mathrm{F}\left(\begin{matrix} \alpha_{n-m-1} - \rho_{p+1} + 1, \; \alpha_{n-m} - \rho_{p+1} + 1, \ldots \alpha_{n-2} - \rho_{p+1} + 1 \\ 2 - \rho_{p+1}, \; \rho_2 - \rho_{p+1} + 1, \; \rho_3 - \rho_{p+1} + 1, \ldots \rho_n - \rho_{p+1} + 1 \end{matrix}; x \right). \end{array} \right.$$

Si nous développons e^{v_1} par la série exponentielle, on trouve que

$$I_2 = \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{1}{1.2 \ldots \upsilon} \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}} v_{n-1}^{-\rho_2+\upsilon} dv_{n-1} \prod_{k=1}^{k=n-2} \int_{c_k}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} t_k^{\alpha_k - \rho_2 + \upsilon} (1-t_k)^{\rho_{k+2} - \alpha_k - 1} dt_k.$$

(*) N.

Par suite,

$$(33)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},\,0,\,\overline{v}_{n-1},\,\overline{0})} dv_{n-2} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \cdots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} \Phi dv_1 \\ = (n-m-1)^{1+(n-m-1)(1-\rho_2)}\,\overline{\Gamma}[(n-m-1)(\rho_2-1)] \prod_{k=1}^{k=n-2} e^{\pi i(\rho_{k+2}-\rho_2+1)}\,\mathcal{E}(\alpha_k-\rho_2+1,\,\rho_{k+2}-\alpha_k) \\ x^{1-\rho_2}\,\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_{n-m-1}-\rho_2+1,\ \alpha_{n-m}-\rho_2+1,\ \ldots\ \alpha_{n-2}-\rho_2+1;\\ 2-\rho_2,\ \rho_3-\rho_2+1,\ \rho_4-\rho_2+1,\ \ldots\ \rho_n-\rho_2+1;\end{matrix} x\right). \end{array} \right.$$

Pour déterminer la valeur de I_3, on remplacera les exponentielles par leur développement en séries; et, par comparaison avec les formules (22) (*), on trouve :

$$a = \rho_2 + \upsilon,$$

$$b_1 = \alpha_1 - \rho_2,\quad b_2 = \alpha_2 - \rho_2,\ \ldots\ b_\mu = \alpha_\mu - \rho_2,\ \ldots\ b_{n-2} = \alpha_{n-2} - \rho_2,$$

$$c_1 = \rho_3 - \alpha_1,\quad c_2 = \rho_4 - \alpha_2,\ \ldots\ c_\mu = \rho_{\mu+2} - \alpha_\mu,\ \ldots\ c_{n-2} = \rho_n - \alpha_{n-2}.$$

Si la partie réelle de ρ_2 est supérieure à l'unité,

$$(34)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{(0)} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},\,0,\,\overrightarrow{v}_{n-1},\,\overrightarrow{0})} dv_{n-2} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overrightarrow{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \cdots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overrightarrow{v}_2,\,\overline{0})} \Phi_2 dv_1 \\ = (n-m-1)\,\overline{\Gamma}(1-\rho_2) \prod_{\mu=1}^{\mu=n-2} e^{\pi i(\rho_{\mu+2}-\rho_2}\,\frac{\sin\pi(\alpha_\mu-\rho_2)}{\sin\pi\alpha_\mu}\,\mathcal{E}(\alpha_\mu,\,\rho_{\mu+2}-\alpha_\mu)\,\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_{n-m-1},\alpha_{n-m},\ \ldots\ \alpha_{n-2};\\ \rho_2,\ \rho_3,\ \ldots\ \rho_n;\end{matrix} x\right). \end{array} \right.$$

13. Si les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-2}$ sont positives, si ρ_2, dont la partie réelle est supposée supérieure à l'unité, est la plus grande des quantités ρ_2, $\rho_3, \ldots \rho_n$, si enfin les divers éléments satisfont aux inégalités :

$$\alpha_k - \rho_2 + 1 > 0,\quad \rho_{k+2} - \alpha_k > 0,\quad (k = 1, 2, 3 \ldots n-2),$$

(*) N.

on pourra remplacer les intégrales précédentes par les suivantes :

$$(34^{bis})\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3}\cdots\int_{-\infty}^{(0,v_p)} dv_{p-1}\int_0^{v_{p-1}} dv_{p-2}\cdots\int_0^{v_2}\Phi_1 dv_1 \\ = e^{\pi i(\rho_{p+1}-\alpha_{p-1}+1)}(n-m-1)^{1+(n-m-1)(1-\rho_{p+1})}\overline{\Gamma}[n-m-1)(\rho_{p+1}-1]\overline{\Gamma}(\rho_{p+1}-\rho_2)\prod_{k=1}^{k=p-2}\mathrm{E}(\alpha_k-\rho_{p+1}+1,\ \rho_{k+2}-\alpha_k) \\ \times\prod_{k=p}^{k=n-2}\mathrm{E}(\alpha_k-\rho_{p+1}+1,\ \rho_{k+2}-\alpha_k)\,x^{1-\rho_{p+1}}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_{n-m-1}-\rho_{p+1}+1,\ \alpha_{n-m}-\rho_{p+1}+1,\ \ldots\ \alpha_{n-2}-\rho_{p+1}+1;\\ 2-\rho_{p+1},\quad \rho_2-\rho_{p+1}+1,\ \ldots\ \rho_n-\rho_{p+1}+1;\end{matrix}\ x\right); \end{array}\right.$$

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\cdots\int_0^{v_p} dv_{p-1}\cdots\int_0^{v_2}\Phi_1 dv_1 = (n-m-1)^{1+1(n-m-1)(1-\rho_2)}\overline{\Gamma}[(n-m-1)(\rho_2-1)] \\ \prod_{k=1}^{k=n-2}\mathrm{E}(\alpha_k-\rho_2+1,\ \rho_{k+2}-\alpha_k)\,x^{1-\rho_2}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_{n-m-1}-\rho_2+1,\ \alpha_{n-m}-\rho_2+1,\ \ldots\ \alpha_{n-2}-\rho_2+1;\\ 2-\rho_2,\ \rho_3-\rho_2+1,\ \rho_4-\rho_2+1\ \ldots\ \rho_n-\rho_2+1;\end{matrix}\ x\right). \end{array}\right.$$

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{(0)} dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\cdots\int_0^{v_p} dv_{p-1}\cdots\int_0^{v_2}\Phi_2 dv_1 = (n-m-1)\overline{\Gamma}(1-\rho_2) \\ \prod_{\mu=1}^{\mu=n-2}\mathrm{E}(\alpha_\mu,\ \rho_{\mu+2}-\alpha_\mu)\,\mathrm{F}(\alpha_{n-m-1},\ \alpha_{n-m-2},\ \ldots\ \alpha_{n-2};\ \rho_2,\ \rho_3\cdots\rho_n;\ x). \end{array}\right.$$

Application. — Reprenons l'équation du cinquième ordre. Ici $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ et

$$\Phi_1 = v_4^{-\rho_5} e^{2\sqrt{\frac{x}{v_4}}} e^{v_1}\prod_{k=1}^{k=5}(v_{k+1}-v_k)^{\rho_{k+2}-\alpha_k-1}v_k^{\alpha_k-\rho_{k+1}},$$

$$\Phi_2 = v_4^{-\rho_5}\left(e^{2\sqrt{\frac{x}{v_4}}}+e^{-2\sqrt{\frac{x}{v_4}}}\right)e^{v_1}\prod_{k=1}^{k=5}(v_{k+1}-v_k)^{\rho_{k+2}-\alpha_k-1}v_k^{\alpha_k\ \rho_{k+1}}.$$

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{(0)} dv_4\int_0^{v_4} dv_3\int_0^{v_3} dv_2\int_0^{v_2}\Phi_2 dv_1 = 2\overline{\Gamma}(1-\rho_2)\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{2},\ \rho_3-\frac{1}{2}\right)\mathrm{E}(\alpha_2,\ \rho_4-\alpha_2)\,\mathrm{E}(\alpha_3,\rho_5-\alpha_3)$$

$$\mathrm{F}(\alpha_2,\ \alpha_3;\quad \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4,\ \rho_5;\quad x),$$

$$\int_{\varepsilon x}^{(0)^2} dv_4 \int_0^{v_4} dv_3 \int_0^{v_3} dv_2 \int_{-\infty}^{(0,v_2)} \Phi_4 dv_4 = e^{\pi i(\rho_3+\frac{1}{2})} 2^{3-2\rho_3} \overline{\Gamma}(2\rho_3-2)\overline{\Gamma}(\rho_3-\rho_2)\mathrm{E}(\rho_4-\alpha_2,\alpha_2-\rho_3+1)$$

$$\mathrm{E}(\rho_5-\alpha_3,\alpha_3-\rho_3+1)\,x^{1-\rho_3}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_2-\rho_3+1,\ \alpha_3-\rho_3+1;\\ 2-\rho_3,\ \rho_2-\rho_3+1,\ \rho_4-\rho_3+1,\ \rho_5-\rho_3+1;\end{matrix} x\right),$$

$$\int_{\varepsilon x}^{(0)^2} dv_4 \int_0^{v_4} dv_3 \int_{-\infty}^{(0,v_3)} dv_2 \int_0^{v_2} \Phi_4 dv_4 = e^{\pi i(\rho_4-\alpha_2+1)} 2^{3-2\rho_4}\overline{\Gamma}(2\rho_4-2)\overline{\Gamma}(\rho_4-\rho_2)\mathrm{E}(\rho_3-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}-\rho_4+1)$$

$$\mathrm{E}(\rho_5-\alpha_3,\alpha_3-\rho_4+1)\,x^{1-\rho_4}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_2-\rho_4+1,\ \alpha_3-\rho_4+1;\\ 2-\rho_4,\ \rho_2-\rho_4+1,\ \rho_3-\rho_4+1,\ \rho_5-\rho_4+1;\end{matrix} x\right),$$

$$\int_{\varepsilon x}^{(0)^2} dv_4 \int_{-\infty}^{(0,v_4)} dv_3 \int_0^{v_3} dv_2 \int_0^{v_2} \Phi_4 dv_4 = e^{\pi i(\rho_5-\alpha_3+1)} 2^{3-2\rho_5}\overline{\Gamma}(2\rho_5-2)\overline{\Gamma}(\rho_5-\rho_2)\mathrm{E}(\rho_3-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}-\rho_5+1)$$

$$\mathrm{E}(\rho_4-\alpha_2,\alpha_2-\rho_5+1)\,x^{1-\rho_5}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_2-\rho_5+1,\ \alpha_3-\rho_5+1;\\ 2-\rho_5,\ \rho_2-\rho_5+1,\ \rho_3-\rho_5+1,\ \rho_4-\rho_5+1;\end{matrix} x\right),$$

$$\int_{\varepsilon x}^{(0)^2} dv_4 \int_0^{v_4} dv_3 \int_0^{v_3} dv_2 \int_0^{v_2} \Phi_4 dv_4 = 2^{3-2\rho_2}\overline{\Gamma}(2\rho_2-2)\mathrm{E}(\rho_3-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}-\rho_2+1)\mathrm{E}(\rho_4-\alpha_2,\alpha_2-\rho_2+1)$$

$$\mathrm{E}(\rho_5-\alpha_3,\alpha_3-\rho_2+1)\,x^{1-\rho_2}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\alpha_2-\rho_2+1,\ \alpha_3-\rho_2+1;\\ 2-\rho_2,\ \rho_3-\rho_2+1,\ \rho_4-\rho_2+1,\ \rho_5-\rho_2+1;\end{matrix} x\right).$$

Remarque. — Selon les valeurs des constantes α et ρ, un ou plusieurs des circuits doubles dans les intégrales (32), (33) et (34) peuvent être remplacés par des circuits simples ou des circuits ouverts. Ainsi, si toutes les constantes α sont positives, on peut représenter la solution uniforme par l'intégrale définie

$$(37)\quad \left\{ \int_{-\infty}^{(0)} dv_{n-1} \int_0^{(v_{n-1})} dv_{n-2} \cdots \int_0^{(v_p} dv_{p-1} \cdots \int_0^{(v_2)} \Phi_2 dv_1 = (-1)^n (n-m-1)\overline{\Gamma}(1-\rho_2) \right.$$
$$\left. \prod_{\mu=1}^{\mu=n-2} e^{\pi i(\rho_{\mu+2}-\alpha_\mu)} \overline{\mathrm{E}}(\alpha_\mu,\rho_{\mu+2}-\alpha_\mu)\, \mathfrak{F}(\alpha_{n-m-1},\alpha_{n-m},\cdots\alpha_{n-2};\rho_2,\rho_3,\cdots\rho_{n-m};x). \right.$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, si les coefficients b ont leur partie réelle positive, la formule (22) sera remplacée par la suivante :

$$K_{m+1} = (-1)^m \overline{\Gamma}(1-a) \prod_{\mu=1}^{\mu=m} e^{\pi i c_\mu} \overline{E}(a + b_\mu, c_\mu).$$

APPLICATION. — $n = 3$ et $m = 1$, $\rho_2 = \rho$, $\rho_3 = \sigma$ et $\alpha_1 = \alpha$.

$$(38) \int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v_2}} v_2^{-\sigma} dv_2 \int_0^{(v_2)} e^{v_1} v_1^{\alpha-\rho} (v_2 - v_1)^{\sigma-\alpha-1} dv_1 = e^{\pi i(\sigma-\alpha+1)} \overline{\Gamma}(1-\rho_2) \overline{E}(\alpha, \sigma-\alpha) \mathcal{F}(\alpha; \rho, \sigma; x),$$

résultat conforme à celui de M. Pochhammer (*).

CHAPITRE V.

14. L'équation

$$(39) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = x^p y$$

n'est pas moins générale que l'équation

$$(\alpha) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = A x^p y;$$

car, par la substitution

$$x = ku$$

et un choix convenable de la constante k, l'équation (α) peut être ramenée à l'équation (39).

(*) POCHHAMMER, *Ueber die Differentialgleichungen der F.-Reihen dritter Ordnung.* (MATHEMATISCHE ANNALEN, t. XLVI, p. 598, 1895.)

Je dis maintenant que l'équation différentielle binôme (39) est réductible à l'équation hypergéométrique

$$z^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + A_1 z^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \cdots + A_i z^{n-i-1}\frac{d^{n-i-1}y}{dz^{n-i-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Les coefficients A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1} sont des fonctions entières et symétriques des quantités ρ_2, ρ_3, ... ρ_n, qui sont les racines d'une équation algébrique du $(n-1)^e$ degré. Les valeurs de ces racines sont respectivement

$$\frac{p+1}{p+n}, \frac{p+2}{p+n}, \ldots \frac{p+n-1}{p+n}.$$

Soit, pour fixer les idées, l'équation du quatrième ordre

$$\frac{d^4y}{dx^4} = x^p y;$$

et posons

$$x = (p+4)^{\frac{4}{p+4}} z^{\frac{4}{p+4}};$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} = (p+4)^{\frac{p}{p+4}} z^{\frac{p+3}{p+4}},$$

et

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (p+4)^{\frac{4p}{p+4}}\left[\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+4)^3} z^{\frac{p}{p+4}}\frac{dy}{dz} + \frac{(p+3)(7p+17)}{(p+4)^2} z^{\frac{2p+4}{p+4}}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{6(p+3)}{p+4} z^{\frac{3p+8}{p+4}}\frac{d^3y}{dz^3} + z^{\frac{4(p+3)}{p+4}}\frac{d^4y}{dz^4}\right].$$

Donc

$$(40)\quad z^3\frac{d^4y}{dz^4} + \frac{6(p+3)}{p+4} z^2\frac{d^3y}{dz^3} + \frac{(p+3)(7p+17)}{(p+4)^2} z\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+4)^3}\frac{dy}{dz} - y = 0.$$

Si nous comparons cette équation à l'équation hypergéométrique du quatrième ordre

$$x^3\frac{d^4y}{dx^4} + (\rho_1+\rho_2+\rho_3+3)x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3+\rho_1+\rho_2+\rho_3+1)x\frac{d^2y}{dx^2} + \rho_1\rho_2\rho_3\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

nous trouvons que

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 3\frac{p+2}{p+4},$$

$$\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 = \frac{3p^2+12p+11}{(p+4)^2},$$

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+4)^3}.$$

Par suite, ρ_1, ρ_2, ρ_3 satisfont à l'équation du troisième degré

$$X^3 - \frac{3(p+2)}{p+4}X^2 + \frac{3p^2+12p+11}{(p+4)^2}X - \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+4)^3} = 0,$$

dont les racines sont

$$\frac{p+1}{p+4}, \quad \frac{p+2}{p+4}, \quad \frac{p+3}{p+4}.$$

Généralement, si l'on fait

$$x = (p+n)^{\frac{n}{p+n}} z^{\frac{1}{p+n}},$$

on trouve sans difficulté aucune que

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (p+n)^{\frac{np}{p+n}}\left[\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{(p+n)^{n-1}}z^{\frac{p}{n+p}}\frac{dy}{dz} + A_1 z^{\frac{n+2p}{n+p}}\frac{d^2y}{dz^2} + \cdots + A_i z^{\frac{(i-1)n+ip}{n+p}}\frac{d^i y}{dz^i} + \cdots + z^{\frac{(n-1)n+np}{n+p}}\frac{d^n y}{dz^n}\right],$$

et que par suite l'équation (39) est réductible à la suivante :

$$(41)\quad z^{n-1}\frac{d^n y}{dz^n} + A_{n-1}z^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \cdots + A_i z^{i-1}\frac{d^i y}{dx^i} + \cdots + \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{(p+n)^{n-1}}\frac{dy}{dz} - y = 0.$$

D'après la forme du coefficient de $\frac{dy}{dx}$, il est permis de supposer que les

éléments ρ de la série hypergéométrique, qui satisfait à cette équation (41), sont égaux respectivement à

$$\frac{p+1}{p+n}, \quad \frac{p+2}{p+n}, \ldots \frac{p+n-1}{p+n}.$$

Admettons pour un instant qu'il en soit ainsi. Les n solutions de l'équation (41) sont

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}; x),$$

$$x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x),$$

. . . . . .

$$x^{1-\rho_i}\mathcal{F}(2-\rho_i, \rho_2-\rho_i+1, \rho_3-\rho_i+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_i+1; x),$$

. . . . . .

$$x^{1-\rho_{n-1}}\mathcal{F}(2-\rho_{n-1}, \rho_1-\rho_{n-1}+1, \rho_2-\rho_{n-1}+1, \ldots \rho_{n-2}-\rho_{n-1}+1; x).$$

Les n solutions de l'équation différentielle binôme seront représentées par la formule unique

$$(42) \quad \ldots \ldots \quad \mathfrak{Z}_{n-i} = x^{n-i} \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{x^{(p+n)\upsilon}}{(p+n)^{n\upsilon} \prod_{k=1}^{k=n} \left[1 + \frac{k-i}{p+n}\right]_\upsilon^+},$$

i prenant successivement les valeurs 1, 2, 3, ... n (*).

La série I_{n-i} satisfait effectivement à l'équation différentielle (38).

Par différentiations successives, on a

$$\frac{d^n \mathfrak{Z}_{n-i}}{dx^n} = \sum_{\upsilon=1}^{\upsilon=\infty} \frac{[\upsilon(p+n)+n-i][\upsilon(p+n)+n-i-1]\ldots[\upsilon(p+n)+1-i]}{(p+n)^{n\upsilon} \prod_{k=1}^{k=n} \left[1 + \frac{k-i}{p+n}\right]_\upsilon^+} x^{\upsilon(p+n)-i},$$

ou

$$\frac{d^n \mathfrak{Z}_{n-i}}{dx^n} = \sum_{\upsilon=1}^{\upsilon=\infty} \frac{x^{\upsilon(p+n)-i}}{(p+n)^{n(\upsilon-1)} \prod_{k=1}^{k=n} \left[1 + \frac{k-i}{p+n}\right]_{\upsilon-1}^+}.$$

(*) La notation $|a|_\upsilon^+$ représente symboliquement la factorielle $a(a+1)(a+2)\ldots(a+\upsilon-1)$.

Il est visible que le terme général de cette série est égal au terme de rang $v-1$ dans le produit $x^p y$; donc, par la substitution de $\mathfrak{z}_{n-i}$ à y, les deux membres de l'équation différentielle binôme s'identifient terme à terme.

Jusqu'ici, nous n'avons fait aucune hypothèse sur l'exposant p, qui peut être un nombre, positif ou négatif, entier, fractionnaire ou même complexe. Notre procédé ne souffre aucune restriction.

L'équation différentielle binôme peut avoir, dans certains cas, des intégrales logarithmiques. Si la solution de l'équation hypergéométrique (41), transformée de l'équation (39), ne contient pas de termes logarithmiques, il est nécessaire et suffisant que les nombres ρ_i et $\rho_i - \rho_k$ ne soient ni nuls, ni égaux à un nombre entier positif ou négatif. Si p est positif ou inférieur à $-2n$, les intégrales de l'équation (39) seront toutes de la forme (42). La valeur de p doit donc être comprise entre 0 et $-2n$.

Cette hypothèse admise et a étant entier, p doit satisfaire à la relation

$$p = -n \pm \frac{k}{a}, \quad (k = 1,2 \ldots n-1)$$

pour que certaines solutions de l'équation (39) renferment des termes logarithmiques.

Remarque. — Si $p = -n$, la transformation est illusoire; mais on sait alors que l'intégration de l'équation (39) dépend de la résolution d'une équation algébrique du n^e degré.

15 La réduction de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(x^p + \frac{B}{x^n}\right) y \qquad (43)$$

s'opère avec la même facilité.

Par la transformation, dont il a été fait usage plus haut, cette équation devient

$$z^{n-1}\frac{d^n y}{dz^n} + A_1 z^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_i z^{n-i-1}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{B}{(n+p)^n x}\right) y.$$

Si l'on pose maintenant

$$y = z^{\tau} V,$$

et que l'on choisisse τ de façon que le coefficient de V, dans l'équation transformée, s'évanouisse, il viendra :

$$z^{n-1}\frac{d^n V}{dz^n} + B_1 z^{n-2}\frac{d^{n-1} V}{dz^{n-1}} + \cdots + B_{n-1}\frac{dV}{dz} - V = 0.$$

Application. — Considérons l'équation du deuxième ordre :

$$(44). \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\pm x^p + \frac{a^2}{x^2}\right) y.$$

Elle devient

$$z\frac{d^2 V}{dz^2} + \left(2\tau + \frac{p+1}{p+2}\right)\frac{dV}{dz} \pm y = 0,$$

si l'on pose

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2(p+2)}.$$

Monsieur Le Paige, le savant professeur de l'Université de Liége, a montré que cette équation est intégrable dans les seuls cas, où

$$2\tau + \frac{p+1}{p+2} = \frac{1}{2} \pm m. \quad (m \text{ entier.})$$

Ainsi l'équation différentielle (44), pour être intégrable, doit avoir la forme :

$$(43^{bis}). \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\pm x^p + \frac{(2m-1)^2 (p+2)^2}{4^2} - \frac{1}{4}\right] y. \quad (m \text{ entier.})$$

(*) Le paige, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t, I.

L'intégrale générale de cette équation est

$$y = z^{\frac{2m-1}{4}+\frac{1}{2(p+2)}} \frac{d^m}{dz^m}\left(Ae^{2\sqrt{z}} + Be^{-2\sqrt{z}}\right),$$

ou

$$y = z^{\frac{2m-1}{4}+\frac{1}{2(p+2)}} \frac{d^m}{dz^m}\left(A \sin 2\sqrt{z} + B \cos 2\sqrt{z}\right),$$

selon que le terme $x^p y$ est précédé du signe $+$ ou du signe $-$. La variable auxiliaire z est liée à x par la relation

$$x = (p+2)^{\frac{2}{p+2}} z^{\frac{1}{p+2}}.$$

D'après M. Lommel (*), l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(-\alpha(\alpha+1) + x^{2\beta}\right) y = 0$$

est

$$y = x^{\frac{1}{2}}\left[A\mathfrak{J}^{\frac{2\alpha+1}{2(\beta+1)}}\left(\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}\right) + B\mathfrak{J}^{-\frac{2\alpha+1}{2(\beta+1)}}\left(\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}\right)\right];$$

donc l'intégrale de l'équation (43^{bis}) sera

$$y = x^{\frac{1}{2}}\left[A\mathfrak{J}^{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{p+2}x^{\frac{p}{2}+1}\right) + B\mathfrak{J}^{-m+\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{p+2}x^{\frac{p}{2}+1}\right)\right].$$

Entre trois intégrales particulières, il existe une relation linéaire :

$$\mathfrak{J}^{m-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x}) = x^{\frac{2m-1}{4}}\left(A_1\frac{d^m(\cos 2\sqrt{x})}{dx^m} + A_2\frac{d^m(\sin 2\sqrt{x})}{dx^m}\right),$$

$$\mathfrak{J}^{-m+\frac{1}{2}}(2\sqrt{x}) = x^{\frac{2m-1}{4}}\left(B_1\frac{d^m(\cos 2\sqrt{x})}{dx^m} + B_2\frac{d^m(\sin 2\sqrt{x})}{dx^m}\right).$$

(*) Lommel, *Mathematische Annalen*, t. III.

Les développements de $\mathfrak{J}^{m+\frac{1}{2}}(2\sqrt{x})$ et de $\mathfrak{J}^{-m+\frac{1}{2}}(2\sqrt{x})$ ne contenant que les puissances de la variable, $x^{q+\frac{2m-1}{4}}$ et $x^{q+\frac{1-2m}{4}}$, q étant un nombre entier, on a

$$\mathfrak{J}^{m-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x}) = A_1 x^{\frac{2m-1}{4}} \frac{d^m \cos 2\sqrt{x}}{dx^m},$$

$$\mathfrak{J}^{-m+\frac{1}{2}}(2\sqrt{x}) = A_2 x^{\frac{2m-1}{4}} \frac{d^m \sin 2\sqrt{x}}{dx^m}.$$

Pour déterminer la constante A_1, j'observe que, d'une part, le coefficient du premier terme dans $\mathfrak{J}^{m-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x})$ est $\frac{2m}{\sqrt{\pi}\,1.3\ldots(2m-1)}$ et que, d'autre part, le même coefficient dans le développement du second membre est égal à

$$(-1)^m \frac{2^{2m}\,1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots 2m} A_1.$$

Donc

$$(45)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{J}^{m-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x}) = \dfrac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{2m-1}{4}} \dfrac{d^m \cos 2\sqrt{x}}{dx^m}, \\ \text{et} \\ \mathfrak{J}^{-m+\frac{1}{2}}(2\sqrt{x}) = \dfrac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\pi}}\, x^{\frac{2m-1}{4}} \dfrac{d^m \sin 2\sqrt{x}}{dx^m}. \end{array}\right.$$

Si maintenant l'on fait attention que

$$\frac{d^m \cos 2\sqrt{x}}{dx^m} = -\frac{d^{m-1}(x^{-\frac{1}{2}} \sin 2\sqrt{x})}{dx^{m-1}},$$

$$\frac{d^m \sin 2\sqrt{x}}{dx^m} = \frac{d^{m-1}(x^{-\frac{1}{2}} \cos 2\sqrt{x})}{dx^m},$$

on aura les deux formules :

$$(46)\quad \mathfrak{J}^{-m-\frac{1}{2}}(u) = (-1)^m u^{-m} \sum_{q=0}^{q=m} (-1)^q \frac{1.3.5\ldots(2m-2q-1)m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2.3\ldots q} u^q \mathfrak{J}^{q-\frac{1}{2}}(u),$$

$$(47)\quad \mathfrak{J}^{m+\frac{1}{2}}(u) = (-1)^{m+1} u^{-m} \sum_{q=0}^{q=m} (-1)^q \frac{1.3.5\ldots(2m-2q-1)m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2.3\ldots q} u^q \mathfrak{J}^{-q+\frac{1}{2}}.$$

La formule (46) donne pour $m = 2$:

$$\mathfrak{J}^{-\frac{5}{2}}(u) = \frac{6\cos u}{u^2\sqrt{2\pi u}} - \frac{4\sin u}{u\sqrt{2\pi u}} - \frac{2\cos u}{\sqrt{2\pi u}},$$

résultat conforme à celui de M. Lommel (*).

16. Réciproquement, toute équation hypergéométrique du n^{me} ordre,

$$(48) \quad \ldots x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_i x^{n-i-1}\frac{d^{n-i-1}y}{dx^{n-i-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} \mp y = 0,$$

dont les constantes satisfont aux conditions

$$\rho_1 = \frac{p+1}{p+n} \pm q, \quad \rho_2 = \frac{p+2}{p+n} \pm q, \ldots \rho_k = \frac{p+k}{p+n} \pm q, \ldots \rho_{n-1} = \frac{p+n-1}{p+n} \pm q,$$

q étant un nombre entier, est réductible à la forme :

$$\frac{d^n y}{dx^n} \mp x^n y = 0.$$

Si q est affecté du signe —, par q différentiations successives et la substitution

$$\frac{d^q y}{dx^q} = V,$$

on ramène l'équation (48) à une autre de même forme, dont les constantes sont égales respectivement à

$$\frac{p+1}{p+n}, \quad \frac{p+2}{p+n}, \quad \ldots \quad \frac{p+n-1}{p+n}.$$

(*) Lommel, *Stüdien über die Bessel'schen Functionen.*

Or, par la transformation

$$x = \frac{z^{p+n}}{(p+n)^n},$$

celle-ci est réductible à la forme (39).

Si donc l'on connaît les solutions de cette dernière équation, le problème de la résolution de l'équation (48) est ramené aux quadratures.

Si q est affecté du signe plus, il est manifeste que l'on déduira les solutions de l'équation (48) par m différentiations successives des solutions de l'équation (39).

Application I. — Les constantes $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_m$ d'une équation hypergéométrique du $2m^{me}$ ordre sont

$$\rho_1 = \left(\frac{1}{m} - 1\right) + q, \quad \rho_2 = \left(\frac{1}{m} - 1\right) + q, \quad \dots \quad \rho_m = q, \quad \rho_{m+1} = \frac{1}{m} + q, \quad \dots \quad \rho_{2m-1} = \frac{m-1}{m} + q.$$

D'après M. Lommel (*), l'intégrale générale de l'équation

$$z^m \frac{d^{2m} y}{dx^m} \mp y = 0$$

est

$$y = z^{\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{p=m-1} [A_p \mathfrak{J}^m(2i\sqrt{\alpha_p z}) + B_p Y^m(2i\sqrt{\alpha_p z})];$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ sont les racines de l'équation

$$\alpha^m = \pm 1,$$

et A_p et B_p sont $2m$ constantes arbitraires.

L'intégrale complète de l'équation hypergéométrique du $2m^{me}$ ordre aura pour expression

$$y = \frac{d^q}{dx^q}\left[\sqrt{x}^{\,p=m-1} \sum_{p=0}^{} \left\{ A_p \mathfrak{J}^m\left(\frac{2i\sqrt{\alpha_p x^{\frac{1}{m}}}}{m}\right) + B_p Y^m\left(\frac{2i\sqrt{\alpha_p x^{\frac{1}{m}}}}{m}\right)\right\}\right].$$

(*) Lommel, *Mathematische Annalen*, t. II.

Application II. — Les constantes de l'équation hypergéométrique du $(2m+1)^{me}$ ordre

$$(49)\quad \ldots\ldots\quad x^{2m}\frac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}} + A_1 x^{2m-1}\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}} + \cdots + A_{2m-1}\frac{dy}{dx} \pm y = 0$$

sont

$$\rho_1 = \left(\frac{2}{2m+1} - 1\right) + q, \quad \rho_2 = \left(\frac{4}{2m+1} - 1\right) + q, \quad \ldots \quad \rho_m = \left(\frac{2m}{2m+1} - 1\right) + q,$$

$$\rho_{m+1} = \frac{1}{2m+1} + q, \quad \rho_{m+2} = \frac{3}{2m+1} + q, \quad \ldots \quad \rho_{2m} = \frac{2m-1}{2m+1} + q.$$

D'après M. Lommel (*), l'intégrale générale de l'équation

$$z^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^{2m+1}y}{dz^{2m+1}} \mp y = 0$$

est

$$y = z^{\frac{2m+1}{4}} \sum_{p=0}^{p=2m} c_p [\mathfrak{J}^{-m-\frac{1}{2}}(2\alpha_p\sqrt{x}) + i\mathfrak{J}^{m+\frac{1}{2}}(2\alpha_p\sqrt{x})];$$

donc l'intégrale complète de l'équation (49) sera

$$y = \frac{d^q}{dx^q}\left[\sqrt{x}\sum_{p=0}^{p=2m} c_p \left\{ \mathfrak{J}^{-m-\frac{1}{2}}\left((2m+1)\alpha_p x^{\frac{1}{2m+1}}\right) + i\mathfrak{J}^{m+\frac{1}{2}}\left((2m+1)\alpha_p x^{\frac{1}{2m+1}}\right) \right\}\right].$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2m}$ sont les $2m+1$ racines de l'équation $\alpha^{2m+1} = \mp i$ et $C_0, C_1, C_2 \ldots C_{2m}$, $2m+1$ constantes arbitraires. On sait d'ailleurs que les fonctions $\mathfrak{J}^{-m-\frac{1}{2}}$ et $\mathfrak{J}^{m+\frac{1}{2}}$ s'expriment sous forme finie. C'est un cas d'intégrabilité de l'équation (45) à ajouter à ceux qui ont été trouvés par mon ancien et savant professeur, M. Le Paige (*loc. cit.*).

17. Revenons maintenant à l'équation différentielle binôme du n^{me}

(*) *Loc. cit.*

ordre et cherchons à exprimer les solutions particulières par des intégrales définies. Nous supposons qu'aucune des solutions de cette équation ne contient de termes logarithmiques. Trois hypothèses sont possibles : 1° p est positif ou inférieur à $-n^2$; 2° p est négatif et compris entre 0 et $-2n$; 3° p est négatif et compris entre $-2n$ et $-n^2$.

Nous ne traiterons que le premier cas, qui est le plus intéressant; pour l'étude des deux derniers cas, nous renvoyons à nos deux mémoires sur les fonctions hypergéométriques. Les solutions particulières de l'équation différentielle (39) sont alors exprimables par des intégrales définies à circuits fermés. Au surplus, le troisième cas est réductible au premier; car, par la transformation indiquée par M. Pochhammer (*), on ramène l'équation différentielle binôme à une autre de même forme, où le nouvel exposant p est positif.

PREMIER CAS. — $p > o$ ou $p < -n^2$. Soient

$$\rho_2 = \frac{p+n-i+1}{p+n},\quad \rho_3 = \frac{p+n-i+2}{p+n},\quad \dots\ \rho_k = \frac{p+n-i+k-1}{p+n},\quad \dots\ \rho_i = \frac{p+n-1}{p+n},$$

$$\rho_{i+1} = \frac{p+n+1}{p+n},\quad \rho_{i+2} = \frac{p+n+2}{p+n},\quad \dots\ \rho_n = \frac{p+2n-i}{p+n},$$

et

$$\Phi = v_{n-1}^{-\rho_n} \sum_{j=1}^{j=n} e^{\frac{n}{p+n}\theta_j \left(\frac{x^{p+n}}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} \prod_{k=0}^{k=n-2} (v_{k+1} - v_k)^{\rho_{k+2} - \frac{k+1}{n} - 1} v_k^{\frac{k+1}{n} - \rho_{k+1}}.$$

$\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$, sont les n racines de l'unité et nous convenons que v_0 doit être remplacé par 1. Considérons l'intégrale :

$$I = \int_1^{\infty} dv_{n-1} \int_1^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_1^{v_{m+1}} dv_m \dots \int_1^{v_2} \Phi dv_1.$$

(*) POCHHAMMER, *Mathematische Annalen*, t. XXXVIII.

Par les substitutions

$$v_1 = \frac{1}{1 - t_1 t_2 \dots t_{n-1}}, \quad v_2 = \frac{1}{1 - t_2 \dots t_{n-1}}, \quad \dots \quad v_{n-1} = \frac{1}{1 - t_{n-1}},$$

et le développement des exponentielles en série, on a

$$1 = n \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{n^{n\upsilon}}{(p+n)^{n\upsilon}} \frac{x^{(p+n)\upsilon}}{1.2.3 \dots n\upsilon} \int_0^1 t_{n-1}^{\rho_2+\rho_3+\dots+\rho_n-\frac{1+2+3+\dots+n-1}{n}-1} (1 - t_{n-1})^{\frac{n-1}{n}+\upsilon-1} dt_{n-1}$$

$$\times \prod_{i=1}^{i=n-2} \int_0^1 t_i^{\rho_2+\rho_3+\dots+\rho_{i+1}\ \frac{1+2+3+\dots+i}{n}-1} (1 - t_i)^{\rho_{i+2}-\frac{i+1}{n}-1} (1 - t_i t_{i+1} \dots t_{n-1})^{\frac{i}{n}-\rho_{i+2}} dt_i .$$

Ici,

$$l_1 = \frac{n-1}{n} + \upsilon, \ l_2 = \frac{n-2}{n} - \rho_n, \ \dots \ l_i = \frac{n-i}{n} - \rho_{n-i+2}, \ \dots \ l_{n-2} = \frac{2}{n} - \rho_n, \ l_{n-1} = \frac{1}{n} - \rho_3;$$

$$k_1 = \rho_n - \frac{n-1}{n}, \ k_2 = \rho_{n-1} - \frac{n-2}{n}, \ \dots \ k_i = \rho_{n-i+1} - \frac{n-i}{n}, \ \dots \ k_{n-2} = \rho_3 - \frac{1}{n}, \ k_{n-1} = \rho_2 - \frac{1}{n}.$$

Donc

$$1 = n \prod_{k=1}^{k=i-1} \mathrm{E}\left(\frac{p+n-i+k}{p+n} - \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right) \prod_{k=i+1}^{k=n} \mathrm{E}\left(\frac{p+n-i+k}{p+n} - \frac{k-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right) \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{x^{(p+n)\upsilon}}{(p+n)^{n\upsilon} \prod_{k=1}^{k=n} \left[1 + \frac{k-i}{p+n}\right]_\upsilon^+}.$$

Finalement

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{n-i} \int_\infty^1 dv_{n-1} \int_1^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_1^{v_{m+1}} dv_m \dots \int_1^{v_2} \Phi dv_1 \\ = n \mathfrak{I}_{n-i} \prod_{k=1}^{k=i-1} \mathrm{E}\left(\frac{p+n-i+k}{p+n} - \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right) \prod_{k=i+1}^{k=n} \mathrm{E}\left(\frac{p+n-i+k}{p+n} - \frac{k-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right) \end{array} \right.$$

Si $i = n$, les valeurs de $\rho_2, \rho_3 \dots \rho_n$ sont respectivement

$$\frac{p+1}{p+n}, \quad \frac{p+2}{p+n}, \quad \dots \quad \frac{p+n-1}{p+n}.$$

Par conséquent,

$$(51)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\infty}^{1} dv_{n-1} \int_{1}^{v_{n-1}} dv_{n-2} \cdots \int_{1}^{v_{m+1}} dv_m \cdots \int_{1}^{v_2} \Phi_1 dv_1 = n\mathfrak{J}_0 \prod_{k=1}^{k=n-1} \mathrm{E}\left(\frac{p+k}{p+n} - \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right). \\ \Phi_1 = v_{n-1}^{-\frac{p+n-1}{p+n}} \sum_{j=1}^{j=n} e^{\frac{p+n}{n}\theta_j \left(\frac{x^{p+n}}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} \prod_{k=0}^{k=n-2} (v_{k+1} - v_k)^{\frac{p+k+1}{p+n} - \frac{k+1}{n} - 1} v_k^{\frac{k+1}{n} - \frac{p+k}{p+n}}. \end{array} \right.$$

Ainsi l'intégrale générale de l'équation différentielle (39) sera

$$(52)\quad \ldots\ldots\quad y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i x^{n-i} \int_{\infty}^{1} dv_{n-1} \int_{1}^{v_{n-1}} dv_{n-2} \cdots \int_{1}^{v_{m+1}} dv_m \cdots \int_{1}^{v_2} \Phi dv_1,$$

$C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$ désignant n constantes arbitraires.

La détermination des valeurs-limites de p, entre lesquelles l'intégrale (52) subsiste, résulte de l'inspection même de la formule. Si p est positif, les arguments des deux produits, contenus dans l'équation (50), sont tous positifs. Si p est négatif et plus grand que n en valeur absolue, les éléments du premier produit restent positifs, mais tous ceux du second ne le sont qu'à la condition que l'on ait l'inégalité, après le changement de p en $-p$,

$$\frac{p-2n+1}{p-n} - \frac{n-1}{n} > 0,$$

ou

$$p > n^2.$$

Nous venons de montrer que les solutions particulières de l'équation différentielle binôme sont égales au produit d'une certaine puisance de x et d'une intégrale définie $(n-1)^{\text{uple}}$ à circuits ouverts. La fonction à intégrer diffère dans chacune des intégrales, dont les limites sont invariables. Nous savons qu'on peut aussi représenter $n-1$ de ces solutions par des intégrales, dont les limites seules varient, la fonction à intégrer restant la même. Pour fixer les idées, nous supposerons que p est positif et nous choisirons la fonction,

dont l'intégration conduit à la solution $\mathfrak{Z}_0$; seulement nous remplacerons la fonction holomorphe

$$\sum_{j=1}^{j=n} e^{\frac{n}{p+n}\theta_j\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

par la fonction multiforme

$$e^{\frac{n}{p+n}\left(\frac{x^{p+n}}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Les solutions, appartenant aux exposants 1, 2, 3, ... $n-1$, seront représentées par les intégrales définies :

$$(53)\quad \ldots \int_{\varepsilon x}^{(0)^n} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \ldots \int_0^{v_{m+1}} dv_m \int_1^{\infty} dv_{m-1} \int_1^{v_{m-1}} dv_{m-2} \ldots \int_1^{v_2} \Phi dv_1,$$

$$(54)\quad \ldots \int_{\varepsilon x}^{(0)^n} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \ldots \int_0^{v_{m+1}} dv_m \int_0^{v_{m-1}} dv_{m-1} \ldots \int_0^{v_2} \Phi dv_1,$$

où

$$\Phi = v_{n-1}^{-\frac{p+n-1}{p+n}} e^{\frac{n}{p+n}\left(\frac{x^{p+n}}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} \prod_{k=0}^{k=n-2} (v_{k+1} - v_k)^{\frac{p+k+1}{p+n} - \frac{k+1}{n} - 1} v_k^{\frac{k+1}{n} - \frac{p+k}{p+n}}.$$

En suivant la marche déjà indiquée plusieurs fois et en faisant usage des substitutions

$$v_1 = \frac{1}{1 - t_1 t_2 \ldots t_{m-1}}, \quad v_2 = \frac{1}{1 - t_2 t_3 \ldots t_{m-1}}, \quad \ldots \quad v_{m-1} = \frac{1}{1 - t_{m-1}},$$

$$v_m = t_m t_{m+1} \ldots v_{n-1}, \; v_{m+1} = t_{m+1} v_{m+2} \ldots v_{n-1}, \; \ldots \; v_{n-2} = t_{n-2} v_{n-1}, \; v_{n-1} = x^{p+n} \left(\frac{n}{p+n}\right)^n t_{n-1}^n,$$

on trouve sans aucune difficulté :

$$G_\upsilon = \int_0^1 t_{m-1}^{\frac{(p+1)+(p+2)+\dots+(p+m-1)}{p+n} - \frac{1+2+3+\dots+m-1}{n} - 1} (1 - t_{m-1})^{\upsilon - \frac{p+m}{p+n} + \frac{m-1}{n}} dt_{m-1}$$

$$\times \prod_{k=1}^{k=m-2} \int_0^1 t_k^{\frac{(p+1)+(p+2)+\dots+(p+k)}{p+n} - \frac{1+2+3+\dots+k}{n} - 1} (1 - t_k)^{\frac{p+k+1}{p+n} - \frac{k+1}{n} - 1} (1 - t_k \dots t_{m-1})^{\frac{k}{n} - \frac{p+k+1}{p+n}} dt_k,$$

$$H_\upsilon = n \left(\frac{n}{n+p}\right)^{n\left(\upsilon - \frac{p+m}{p+n} + 1\right)} \frac{x^{n-m+p+n)\upsilon}}{1.2.3 \dots \upsilon} \int_{\frac{p+n}{n}\varepsilon}^{1(0)} \frac{1}{e^{t_{n-1}}} t_{n-1}^{n\left(\upsilon - \frac{p+m}{p+n} + 1\right) - 1} dt_{n-1}$$

$$\times \prod_{k=m}^{k=n-2} \int_0^1 t_k^{\frac{k+1}{n} - \frac{p+k}{p+n} + \upsilon} (1 - t_k)^{\frac{p+k+1}{p+n} - \frac{k+1}{n} - 1} dt_k.$$

En vertu de la formule (29) (*) :

$$l_1 = \frac{m-1}{n} - \frac{p+m}{p+n} + \upsilon + 1, \; l_2 = \frac{m-2}{n} - \frac{p+m-1}{p+n}, \; \dots \; l_i = \frac{m-i}{n} - \frac{p+m-i+1}{p+n}, \; \dots \; l_{m-1} = \frac{1}{n} - \frac{p+2}{p+n},$$

$$k_1 = \frac{p+m-1}{p+n} - \frac{m-1}{n}, \; k_2 = \frac{p+m-2}{p+n} - \frac{m-2}{n}, \; \dots \; k_i = \frac{p+m-i}{p+n} - \frac{m-i}{n}, \; \dots \; k_{m-1} = \frac{p+1}{p+n} - \frac{1}{n};$$

et

$$(55) \left\{ \begin{array}{l} \int_{Ex}^{(0)^n} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_0^{v_{m+1}} dv_m \int_1^{\infty} dv_{m-1} \int_1^{v_{m-1}} dv_{m-2} \dots \int_1^{v_2} \Phi dv_1 = \\ = (-1)^{\frac{\nu(n-m)}{n(n+p)}+1} n \left(\frac{n}{n+p}\right)^{\frac{n(n-m)}{n+p}} \Gamma\left[\frac{n(m-n)}{n+p}\right] \prod_{i=1}^{i=m-1} E\left(\frac{p+i}{p+n} - \frac{i}{n}, \frac{i}{n} - \frac{p+m}{p+n} + 1\right) \prod_{i=m}^{i=n-2} E\left(\frac{p+i+1}{p+n} - \frac{i+1}{n}, \frac{i+1}{n} - \frac{p+m}{p+n} + 1\right) \mathfrak{J}_{n-m} \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{J}_{n-m} = x^{n-m} \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{x^{(p+n)\upsilon}}{(p+n)^{n\upsilon} \prod_{i=1}^{i=n} \left[1 + \frac{i-m}{p+n}\right]_\upsilon^+}$$

(*) M.

Quant à l'intégrale (54), elle représente la solution appartenant à l'exposant $n - 1$. Effectivement, par les substitutions

$$r_1 = t_1 t_2 \dots t_{n-2} v_{n-1},\ v_2 = t_2 t_3 \dots t_{n-2} v_{n-1},\ \dots\ v_{n-2} = t_{n-2} v_{n-1},\ v_{n-1} = x^{p+n} \left(\frac{n}{n+p}\right)^n t_{n-1}^n$$

et le développement du facteur $(1 - t_1 t_2 \dots t_{n-2} v_{n-1})^{\frac{p+1}{p+n} - \frac{1}{n} - 1}$ par la formule du binôme, on trouve :

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\varepsilon x}^{(0)^n} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_0^{v_m} dv_{m-1} \dots \int_0^{v_2} \Phi dv_1 \\ &= (-1)^{\frac{p(n-1)}{n(p+n)}+1} n \left(\frac{n}{n+p}\right)^{\frac{n(n-1)}{n+p}} \Gamma\left[\frac{n(1-n)}{n+p}\right] \prod_{k=1}^{k=n-2} \mathrm{E}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{p+1}{p+n} + 1, \frac{p+i+1}{p+n} - \frac{i+1}{n}\right) \mathfrak{I}_{n-1}, \\ &\mathfrak{I}_{n-1} = x^{n-1} \sum_{v=0}^{v=\infty} \frac{x^{(p+n)v}}{(p+n)^v \prod_{i=1}^{i=n} \left[1 + \frac{i-1}{p+n}\right]_v^+}. \end{aligned} \right.$$

18. Au commencement de ce chapitre, nous avons supposé que la constante A était égale à l'unité. Cette hypothèse n'est pas nécessaire. On trouve facilement les formules qui donnent les n solutions particulières de l'équation différentielle dans sa forme la plus générale.

Soit, pour fixer les idées,

$$(57). \quad \dots \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \mathrm{A} x^p y.$$

Les n séries

$$\mathfrak{I}_{n-i} = x^{n-i} \sum_{v=0}^{v=\infty} \frac{\mathrm{A}^v x^{(p+n)v}}{(p+n)^v \prod_{k=1}^{k=n} \left[1 + \frac{k-i}{p+n}\right]_v^+}$$

satisfont à cette équation.

Si nous désignons encore par $\rho_2, \rho_3 \dots \rho_n$ les quantités

$$\rho_2 = \frac{p+n-i+1}{p+n},\ \rho_3 = \frac{p+n-i+2}{p+n},\ \dots\ \rho_k = \frac{p+n-i+k-1}{p+n},\ \rho_i = \frac{p+n-1}{p+n},$$

$$\rho_{i+1} = \frac{p+n+1}{p+n},\ \rho_{i+2} = \frac{p+n+2}{p+n},\ \dots\ \rho_n = \frac{p+2n-i}{p+n},$$

dans l'hypothèse où p est positif ou inférieur à $-n^2$, l'intégrale générale de l'équation différentielle (57) sera

$$(58). \quad \ldots \quad y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i x^{n-1} \int_1^{\infty} dv_{n-1} \int_1^{v_{n-1}} dv_{n-2} \ldots \int_1^{v_m} dv_{m-1} \ldots \int_1^{v_2} \Phi_1 dv_1,$$

où

$$\Phi_1 = v_n^{-\rho_1} \sum_{j=1}^{j=n} e^{\frac{n\sqrt{A}}{n+\mu}\theta_j\left(\frac{x^{p+n}}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} \sum_{k=0}^{k=n-2} (v_{k+1} - v_k)^{\rho_{k+2} - \frac{k+1}{n} - 1} v^{\frac{k+1}{n} - \rho_{k+1}}.$$

Application. — Soit l'équation du deuxième ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ax^p y.$$

L'intégrale complète sera

$$y = C_1 \int_1^{\infty} \left(e^{\frac{2\sqrt{A}}{p+2}\sqrt{\frac{x^{p+2}}{v_1}}} + e^{-\frac{2\sqrt{A}}{p+2}\sqrt{\frac{x^{p+2}}{v_1}}} \right) v_1^{-\frac{p+1}{p+2}} (v_1 - 1)^{\frac{p+1}{p+2} - \frac{3}{2}} dv_1 + C_2 x \int_1^{\infty} \left(e^{\frac{2\sqrt{A}}{p+2}\sqrt{\frac{x^{p+2}}{v_1}}} + e^{-\frac{2\sqrt{A}}{p+2}\sqrt{\frac{x^{p+2}}{v_1}}} \right) v_1^{-\frac{p+3}{p+2}} (v_1 - 1)^{\frac{p+3}{p+2} - \frac{3}{2}} dv_1;$$

ou, si l'on pose

$$v_1 = \frac{1}{u^2},$$

$$y = C_1 \int_0^1 \left(e^{\frac{2u\sqrt{A}}{p+2}x^{\frac{p}{2}+1}} + e^{-\frac{2u\sqrt{A}}{p+2}x^{\frac{p}{2}+1}} \right) (1-u^2)^{-\frac{p+4}{2p+4}} du + C_2 x \int_0^1 \left(e^{\frac{2u\sqrt{A}}{p+2}x^{\frac{p}{2}+1}} + e^{-\frac{2u\sqrt{A}}{p+2}x^{\frac{p}{2}+1}} \right) (1-u^2)^{-\frac{p}{2p+4}} du.$$

Si $A = c^2$, on retrouve l'intégrale de Lobatto (*); et, si $A = -ab$, l'intégrale générale de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + abx^p y = 0$$

sera

$$y = C_1 \int_0^1 \cos\left(\frac{2u\sqrt{ab}}{p+2} x^{\frac{p}{2}+1}\right) (1-u^2)^{-\frac{p+4}{2p+4}} du + C_2 x \int_0^1 \cos\left(\frac{2u\sqrt{ab}}{p+2} x^{\frac{p}{2}+1}\right) (1-u^2)^{-\frac{p}{2p+4}} du,$$

intégrale de Kummer (**).

(*) Lobatto, *Journal de Crelle*, t. XVII.
(**) Kummer, *Journal de Crelle*, t. XII.

BRITISH MUSEUM NATURAL

SUR

LE SYSTÈME NERVEUX DE L'AMPHIOXUS

ET EN PARTICULIER

SUR LA CONSTITUTION ET LA GENÈSE DES RACINES SENSIBLES

PAR

MM. J.-F. HEYMANS ET O. VAN DER STRICHT

(Couronné par la Classe des sciences dans la séance du 15 décembre 1896.)

(MÉMOIRE DÉPOSÉ LE 31 JUILLET 1896.)

BRITISH MUSEUM NATURAL

SUR

LE SYSTÈME NERVEUX DE L'AMPHIOXUS

ET EN PARTICULIER

SUR LA CONSTITUTION ET LA GENÈSE DES RACINES SENSIBLES

PREMIÈRE PARTIE

GENÈSE DES RACINES DORSALES ET DES RACINES VENTRALES.

Malgré le grand nombre de recherches sur l'embryologie de l'Amphioxus, la question de l'origine des racines nerveuses n'a été entamée par aucun embryologiste. Ce fait trouve son explication dans les difficultés très sérieuses que présente cette étude et résultant avant tout de la petitesse des parties constituantes du système nerveux central et de l'ébauche du système nerveux périphérique. Sous ce rapport, les larves d'Amphioxus constituent un matériel très peu favorable. De plus, si l'on tient compte des difficultés que les embryologistes rencontrent dans l'étude du développement des nerfs, portant cependant sur des matériaux choisis et éminemment favorables, on comprendra facilement que ce genre de recherches chez l'Amphioxus constitue une des questions les plus ardues de l'embryologie.

Grâce aux méthodes techniques perfectionnées de fixation et de coloration, grâce aux grossissements convenables dont on dispose aujourd'hui, il nous a été possible d'entamer cette étude si intéressante chez le vertébré le plus inférieur et de trouver les différentes phases de la genèse du système nerveux périphérique.

Afin de faire mieux ressortir les différences qui existent à ce point de vue entre l'Amphioxus et les autres vertébrés, nous avons étudié comparativement le développement des nerfs de l'Amphioxus et des Sélaciens, tout en tenant compte des résultats auxquels nos prédécesseurs sont arrivés.

Nous donnerons donc d'abord une revue historique, aussi courte que possible, des différents travaux parus sur cette question.

Genèse des ganglions spinaux. — La première ébauche du système nerveux périphérique et spécialement des racines dorsales est intimement liée à celle des ganglions spinaux. On peut classer les auteurs qui se sont occupés de cette étude, en deux grandes catégories.

D'après une première série d'embryologistes, les ganglions spinaux ont une origine mésoblastique. Autrefois Bidder et von Kuppfer [1] (1), Götte (2), Hahn (3), von Kölliker (4), Salensky (5), Forster et Balfour (6) et Remak (7) à leur tête défendaient cette opinion. Cette ancienne manière de voir a été reprise récemment par Sedgwick (8). Il arrive à cette conclusion que les bandelettes nerveuses des auteurs n'engendrent point les nerfs et les ganglions, mais uniquement des noyaux, pénétrant dans un réticulum mésoblastique. Les fibres nerveuses ne correspondent pas à des prolongements de cellules, mais sont le résultat d'une différenciation du réticulum mésoblastique.

Une seconde catégorie d'auteurs admettent la nature ectodermique du tissu nerveux. Parmi les défenseurs de cette opinion, il y a lieu d'établir une distinction : pour les uns, la première ébauche ganglionnaire naît directement aux dépens de ce feuillet, en dehors de la plaque nerveuse et avant la fermeture du canal central; pour les autres, elle en naît d'une manière indirecte, par l'intermédiaire du canal médullaire, un dérivé du feuillet externe.

L'*origine ectodermique* directe de l'ébauche ganglionnaire est admise par His (9), Hertwig (10), Beard (11), von Kuppfer (12), Götte (13), O. Schultze (14), Owsjanikow (15), Houssay (16), Golovine (17), Goldberg (18), Houssay (19), von Kuppfer (20), von Lenhossék (21), etc.

[1] *N. B.* Voir bibliographie, p. 19.

Avant la transformation de la plaque médullaire en canal, *His* (9) distingue au niveau de la région médiane du feuillet externe, trois segments : *a*) la plaque médullaire; *b*) les deux plaques des cordons intermédiaires; *c*) le feuillet corné. La plaque des futurs cordons intermédiaires se recourbe en sillon et engendre le sillon intermédiaire, siégeant entre le feuillet corné et la plaque médullaire. Le sillon intermédiaire engendre le cordon intermédiaire, qui se place, au moment de la fermeture du canal médullaire, entre ce dernier et le feuillet corné dont il se détache. Cette disposition se retrouve chez le poulet, les plagiostomes, les grenouilles, la truite et le chat. Le cordon intermédiaire constitue, d'après His, l'ébauche des ganglions spinaux cérébraux et médullaires. Contrairement aux idées émises par Balfour et Marshall, les nerfs des racines postérieures apparaissent sous forme de prolongements sans noyau des cellules ganglionnaires du névraxe. Plus tard, His (22) change sa manière de voir et fait dériver les racines postérieures de prolongements de cellules nerveuses des ganglions spinaux pénétrant à l'intérieur de la moelle épinière.

Beard (11) décrit l'ébauche ganglionnaire sous forme d'une différenciation cellulaire au sein de la couche interne de l'épiblaste, précisément à la limite latérale des plaques neurales. Elle se détache de l'épiblaste et il persiste alors à cet endroit le cordon intermédiaire de His, qui n'intervient pas dans la genèse des ganglions. Le sillon intermédiaire de His n'existe pas. Lors de la fermeture du tube neural, les ébauches ganglionnaires se déplacent du côté dorsal et s'insèrent au niveau de la ligne médiane, entre les lèvres de la plaque neurale recourbée et incomplètement soudées. L'interstice entre les deux lèvres est occupé par l'ébauche ganglionnaire. Celle-ci prolifère bientôt en dehors de cette fente, en se développant sur les parties latérales du canal nerveux, dont elle reste toujours distincte et séparée par une ligne de démarcation bien apparente. Plus tard, quand elle a acquis un certain développement, elle atteint ses premières et seules connexions avec le névraxe, probablement par la genèse des fibres prenant leur point de départ dans les ganglions pour gagner le système nerveux central.

Von Kuppfer (12), *Owsjanikow* (15), *Houssay* (16 et 19) arrivent à des résultats analogues pour ce qui concerne les ganglions cérébraux.

Von Lenhossék (21), en étudiant un embryon humain, trouve l'ébauche

ganglionnaire sous forme d'une strie ectodermique, attenante à la plaque médullaire. Lors de la fermeture du canal médullaire, les deux ébauches latérales se fusionnent au niveau de la ligne médiane en un cordon unique interposé entre les deux rebords de soudure, pour fermer ainsi le canal neural. Cette disposition n'est pas définitive. Bientôt les parties constituantes de cette ébauche médiane prolifèrent et émigrent en dehors du tube médullaire, en engendrant deux ébauches latérales, par le fait que la disposition bilatérale primitive revient à ses droits. Von Lenhossék arrive à cette conclusion que lors de la fermeture du canal médullaire, le cordon ganglionnaire rentre comme partie constituante dans le toit du système nerveux central. L'ébauche est primitive, paire et latérale.

Cette manière de voir concorde avec celle de *von Kuppfer* (**20**), dont les études ont porté sur l'origine des nerfs de la tête de *Petromyzon*. Après que les ébauches paires se sont détachées de l'ectoderme, elles se réunissent au niveau de la ligne médiane en une ébauche unique, la « dorsale Hirnplatte », formant le toit dorsal du système nerveux central. La plaque dorsale prolifère ensuite latéralement et engendre des bandelettes, que l'auteur désigne sous le nom de bandelettes radiculaires, l'origine des nerfs et des ganglions.

L'*origine ectodermique* INDIRECTE de l'ébauche ganglionnaire est défendue par : Balfour (**23**), Hensen (**24**), Marshall (**25**), von Kölliker (**26**), Sagemehl (**27**), Ónodi (**29**), Bedot (**28**), Scott (**30**), Shipley (**31**), Katschenko (**32**), Mitrophanow (**33**), Lahousse (**34**), Rabl (**35**), Chiarugi (**36**), Mitrophanow (**37**), C.-K. Hoffmann (**38**), Chiarugi (**39**), etc.

Tous ces auteurs attribuent l'ébauche des ganglions nerveux à une prolifération cellulaire de la partie dorsale ou du toit du tube médullaire. Ce bourgeonnement cellulaire engendre, de chaque côté des parties supérieures et latérales de ce canal, une bandelette cellulaire continue, qui se segmente plus tard en autant de segments qu'il existe de protovertèbres. Dès l'origine, l'ébauche ganglionnaire serait paire, une de chaque côté de la ligne médiane. Toutefois Balfour, Ónodi décrivent comme toute première origine une bandelette ganglionnaire impaire au niveau de la ligne médiane de la partie dorsale du névraxe. Ónodi admet que les ganglions des nerfs de la tête du poulet se forment par un bourgeonnement cellulaire de l'ectoblaste avoisinant directement la plaque médullaire.

D'après Chiarugi, les ganglions crâniens ne viennent ni du cordon intermédiaire de His ni de l'ectoderme, mais d'une prolifération cellulaire des rebords de la plaque médullaire.

Généralement on considère l'ébauche ganglionnaire comme une masse, ou une bandelette pleine. C.-K. Hoffmann, au contraire, la décrit comme creuse. D'après lui, les nerfs crâniens se forment par une sorte d'évagination creuse du tube neural et se comportent sous ce rapport comme le nerf optique.

Löwe (40) avait exprimé une idée analogue en 1880 pour les nerfs cérébraux, alors que les nerfs spinaux apparaissent sous forme de simples filaments, qui plus tard se décomposent en une racine postérieure et en une racine antérieure.

Lahousse fait dériver le cordon intermédiaire directement de l'ectoderme (poulet), mais il lui semble douteux que cette corde soit appelée plus tard, comme le croit His, à former des ganglions spinaux. Une fois détachée de l'ectoderme, « elle perd sa forme prismatique et les cellules épithéliales dont elle se composait se trouvent irrégulièrement éparpillées au milieu des cellules parablastiques du mésoderme ». Les ganglions postérieurs ne commencent à se développer qu'à partir de l'apparition de l'excroissance supéro-externe du tube médullaire. Les ganglions doivent probablement leur origine, en partie ou en totalité, aux cellules de cette excroissance.

Goronowitsch (41) et *Pollard* (42) sont plus affirmatifs encore au sujet de la destinée de la bandelette nerveuse et de la transformation de ses parties constituantes en éléments mésodermiques. Les cellules ganglionnaires se forment en partie aux dépens des cellules mésodermiques du tissu de charpente et en partie aux dépens des cellules du tube cérébral.

Avant d'aller plus loin, nous ajouterons que plusieurs embryologistes décrivent des ganglions crâniens dans la formation desquels interviennent des parties constituantes de l'épiblaste, délimitant les régions latérales de l'extrémité céphalique de l'embryon. Nous devons citer ici : Beard (43), Spencer (44), Froriep (45), Johnsohn et Lilian Sheldon (46), Shipley (31), Beard (11), Götte (13), Ostroumoff (47), A. Dohrn (48), Froriep (49), von Kuppfer (20 et 50), etc.

Genèse des racines nerveuses. — S'il existe des opinions contradictoires au point de vue de l'origine de l'ébauche ganglionnaire, il n'en existe pas moins pour ce qui regarde l'origine des racines nerveuses dorsales et ventrales.

Racines dorsales. — D'après les uns, les racines dorsales apparaissent sous forme de prolongements des cellules nerveuses du névraxe. Sigmund Freud (51), His (9), etc., ont défendu cette manière de voir. Mais les résultats plus récents auxquels sont arrivés depuis His (22), Götte (13), Martin (52) et d'autres, tendent à prouver que ces racines doivent leur origine aux prolongements cellulaires provenant de l'ébauche ganglionnaire elle-même, qui pénètrent à l'intérieur de la moelle épinière. D'après von Kuppfer (20), les *bandelettes radiculaires* engendrant les nerfs et les ganglions apparaissent sous forme de cordons cellulaires continus.

Les *racines ventrales* se forment sous l'aspect de bourgeons (« Auswüchse ») cellulaires de la partie ventrale et latérale du système nerveux central, conformément aux résultats obtenus par Balfour (23), Marshall (25), Beard (11), Golovine (17), Lahousse (34), etc.

D'après d'autres, les ébauches des racines motrices sont constituées par des filaments partant de la partie ventrale et latérale de la moelle ou par des prolongements des cellules du segment ventral du névraxe. Cette opinion est partagée par His (9 et 25), Sagemehl (27), His (54), Ónodi (29), His (22), Götte (13), Dohrn (55), His (56), Martin (53), etc.

Première ébauche ganglionnaire. — Afin de faire une étude minutieuse et comparative de la genèse du système nerveux périphérique de l'Amphioxus, nous la ferons précéder d'un aperçu très succinct des résultats obtenus chez des embryons des Sélaciens (*Pristiurus, Scyllium* et *Torpedo*).

Les préparations ont été fixées par la liqueur de Flemming ou bien par la liqueur de Hermann et colorées par la safranine.

Chez un embryon de *Scyllium stellare* très jeune, où le tube médullaire est encore largement ouvert dans toute son étendue, on trouve latéralement par rapport à la plaque médullaire légèrement recourbée en gouttière, une seconde dépression ou un sillon correspondant au sillon intermédiaire de

His. Ce sillon, qui vers la région postérieure de l'embryon se rapproche du sillon marginal latéral, dont il reste nettement séparé, ne présente aucune particularité au point de vue de la structure des cellules ectodermiques. N'ayant pu constater aucun rapport entre ce sillon intermédiaire et les ébauches ganglionnaires, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Aussi longtemps que la gouttière médullaire reste ouverte dans toute sa longueur, on ne remarque aucune particularité que l'on pourrait interpréter dans le sens d'une ébauche ganglionnaire, à l'endroit où la plaque médullaire se continue avec le feuillet cutané de l'épiblaste. On peut faire la même remarque pour les embryons plus âgés où le tube médullaire est fermé partiellement. Ni dans la région antérieure, où le tube médullaire est encore ouvert, ni dans la région où il est déjà fermé ou sur le point de se fermer, on ne trouve aucune trace de l'ébauche ganglionnaire. Nous nous contenterons de faire observer qu'à ce stade de développement les cellules constituantes de la gouttière médullaire et du canal médullaire sont riches en granulations vitellines plus ou moins volumineuses, dans toute l'étendue de la section transversale de l'ébauche du système nerveux central. Les cellules du feuillet corné en continuité avec la gouttière médullaire ou bien détachées déjà du canal médullaire renferment des granulations vitellines analogues.

Chez des embryons de *Scyllium canicula* plus âgés, de 2 à 3 millimètres, où le canal médullaire est détaché de l'épiblaste, on distingue deux régions : l'une postérieure, où ce canal est complètement fermé, et une antérieure, où les deux lèvres de soudure sont encore séparées et où la soudure ne s'est pas encore opérée. La gouttière médullaire s'est détachée de l'ectoderme dans toute son étendue. Il existe un canal neurentérique. Les vésicules optiques existent à l'état d'ébauche.

Dans la partie distale de la région antérieure, on trouve la toute première ébauche ganglionnaire, sous un aspect qui a échappé aux embryologistes. A un examen superficiel, le tube médullaire, incomplètement soudé, n'offre rien de particulier. Mais en étudiant les préparations à l'aide d'un objectif apochromatique de Zeiss, on constate des particularités très intéressantes au point de vue du contenu des cellules siégeant au rebord de la

gouttière neurale. Sur les deux lèvres, on aperçoit de chaque côté quelques éléments renfermant un grand nombre de boules vitellines volumineuses, identiques à celles signalées déjà chez des embryons plus jeunes. Elles existent encore, mais en très petit nombre, dans les autres cellules du tube médullaire. De plus, les éléments riches en granulations forment un petit amas relativement distinct des parties voisines. C'est la toute première ébauche ganglionnaire (fig. 1, *éb,* pl. I). Elle est paire et elle correspond à une différenciation des cellules, limitant les lèvres de soudure de la gouttière médullaire. Ces éléments conservent plus longtemps que les autres leur caractère embryonnaire, marqué par la présence de boules vitellines, renfermant des matières nutritives indispensables à une prolifération cellulaire très active. Cette ébauche n'est pas continue à son origine : elle est interrompue en plusieurs endroits. Elle revêt donc probablement un caractère métamérique, disparaissant plus tard.

Au niveau de la région proximale de la partie postérieure, on aperçoit en plusieurs endroits une ébauche ganglionnaire impaire, correspondant au toit du canal neural (fig. 2, *éb'*, pl. I). Elle y est formée par des cellules analogues à celles de l'ébauche paire et elle doit son origine à la fusion des deux ébauches latérales primitives, au moment de la soudure des lèvres de la gouttière médullaire.

Il résulte de ces données que l'ébauche ganglionnaire, d'abord paire, puis impaire, se comporte à peu près comme von Lenhossék l'a décrit chez l'embryon humain et von Kuppfer chez le *Petromyzon,* avec cette différence que, d'après nous, elle dérive non pas de l'ectoderme, mais de la plaque neurale. Sous ce rapport, nos résultats concordent avec ceux de Chiarugi.

A l'ébauche paire succède donc une ébauche impaire correspondant au stade de la plaque dorsale cérébrale de von Kuppfer (« dorsale Hirnplatte »). Cette phase présente un très grand intérêt au point de vue de l'étude du névraxe de l'Amphioxus; car nous verrons plus loin qu'elle persiste pendant toute la vie chez le vertébré le plus inférieur.

Au stade de l'ébauche ganglionnaire impaire succède celui de la bandelette ganglionnaire paire ou la bandelette radiculaire de von Kuppfer. Les cellules de la paroi dorsale du canal nerveux, c'est-à-dire de l'ébauche impaire,

prolifèrent latéralement et engendrent bientôt une bandelette continue, interrompue seulement à de rares intervalles. Il y a une discontinuité avant et après la fente auditive. Cette bandelette est formée par des cellules analogues à celles de l'ébauche primitive. Elle renferme des granulations vitellines nombreuses et volumineuses. C'est grâce à cette particularité que nous avons pu retrouver la toute première origine ganglionnaire et étudier la manière dont elle se comporte pendant les diverses phases de son développement. Sur des préparations non traitées par l'essence de térébenthine et où les granulations graisseuses ont conservé leur aspect noirâtre, on constate qu'il existe à l'intérieur des cellules épendymaires, du côté de leur extrémité interne, attenante à la lumière du canal, des grains nombreux, formant une zone noirâtre continue tout autour de la lumière du canal central. Quelques granulations graisseuses, beaucoup plus rares, siègent également dans des couches plus périphériques de la paroi du système nerveux central. Mais elles sont aussi très nombreuses au niveau de l'ébauche ganglionnaire paire primitive, au niveau de l'ébauche ganglionnaire impaire et au niveau des bandelettes radiculaires. Les parties constituantes de ces bandelettes radiculaires se comportent donc, sous le rapport de la présence de la graisse, de la même manière que les cellules épendymaires du canal central (fig. 3, pl. III).

Il est à remarquer que chez des embryons de *Torpedo marmorata,* de *Scyllium canicula* et de *Pristiurus melanostomum* de 4 à 5 millimètres, l'ébauche ganglionnaire paire primitive engendre des bandelettes radiculaires avant que la soudure se soit produite au niveau de la ligne médiane et avant que la fusion en une ébauche ganglionnaire impaire se soit opérée. Il faut l'attribuer à une prolifération cellulaire plus intense du côté latéral que du côté médian. Sous ce rapport, on peut distinguer deux régions dans le névraxe : une antérieure correspondant à la région cérébrale, où l'ébauche ganglionnaire primitive paire engendre directement les bandelettes radiculaires latérales, et une région postérieure, la future moelle épinière, où l'ébauche ganglionnaire paire se fusionne en une ébauche impaire. Il est à remarquer cependant qu'on rencontre au niveau du cerveau, notamment à la partie tout antérieure, des préparations où la plaque dorsale cérébrale de von Kuppfer est nettement visible et, inversement, à la région proximale de la moelle épi-

nière, des préparations où des bandelettes existent sans qu'il y ait soudure au niveau de la ligne médiane et apparition d'une ébauche impaire. Les figures 4 et 5 (pl. II) représentent des images où la fusion en une ébauche impaire médiane est à peine apparente.

Les bandelettes radiculaires s'étendent graduellement pour les nerfs cérébraux entre l'épiblaste d'un côté et le mésoblaste de l'autre, pour les nerfs spinaux entre le mésoblaste et le canal neural et la corde dorsale. Au niveau de chaque segment de la région du tronc, elles s'épanouissent à sa partie inférieure en une masse ovalaire, correspondant au futur ganglion spinal (fig. 4, *ebg* et fig. 5, pl. II), qui reste en rapport de continuité avec le système nerveux central par l'intermédiaire de la bandelette radiculaire proprement dite. Celle-ci se segmente et engendre autant de cordons cellulaires qu'il existe de ganglions spinaux. De cette manière naissent les travées cellulaires radiculaires, futures racines dorsales.

Origine des racines spinales dorsales et des racines spinales ventrales. — Nous avons rencontré sur des préparations de *Scyllium canicula* et *Scyllium stellare* les premières ébauches des *racines dorsales,* au stade où la bandelette nerveuse radiculaire engendre les premiers épaississements des futurs ganglions. On peut donc dire que les racines dorsales apparaissent en même temps que les ganglions spinaux. Les cellules des travées radiculaires s'allongent, leur noyau s'étire et leur protoplasme prend un aspect fibrillaire. Il nous serait difficile de dire quelle part prend chacune de ces cellules dans la genèse des différentes parties constituantes de la fibre nerveuse. Pour résoudre cette question, la méthode de Golgi nous paraît indispensable. Ayant été dans l'impossibilité de l'employer, nous nous contenterons de dire que les racines dorsales sont formées à l'origine par des cordons de cellules provenant du canal médullaire. Les fibres nerveuses proviennent probablement des prolongements des cellules ganglionnaires qui pénètrent du ganglion à l'intérieur de la partie dorso-latérale de la moelle épinière.

Quant aux *racines antérieures,* elles apparaissent sous forme de prolongements cellulaires, de structure fibrillaire, nettement striés, sortant de la partie ventrale et latérale de la moelle épinière (fig. 4 et 5, *ebv*). Ce sont

évidemment les futurs cylindres-axes de la fibre nerveuse. Autour de ce prolongement prolifèrent des cellules provenant de la paroi du canal médullaire. De sorte que les ébauches des racines ventrales sont formées par des prolongements fibrillaires des cellules nerveuses centrales (des neuroblastes de His), entourés d'éléments de même origine, mais de signification différente, les spongioblastes de His. Dohrn (57) est arrivé à des résultats analogues.

GENÈSE DES RACINES NERVEUSES DORSALES ET DES RACINES VENTRALES CHEZ L'AMPHIOXUS.

La première origine des racines nerveuses dorsales et des racines ventrales se montre au moment de l'apparition des premières fibres musculaires striées. A ce moment, le système nerveux central représente un canal limité par une membrane propre à double contour, tapissée d'une rangée de cellules très petites, à noyau ovalaire (fig. 9, *n*, pl. I). Celles-ci entourent le canal central, ordinairement plus rapproché de la surface dorsale du névraxe que de la surface ventrale. L'épiblaste qui recouvre la partie dorsale du système nerveux central est constitué par des cellules allongées, très petites, toujours nettement délimitées, par rapport aux éléments constituants du névraxe. Les segments primordiaux, détachés des plaques latérales, se sont différenciés en une lame latérale cutanée (fig. 6, *l*, pl. I) et une lame médiale (fig. 6, *m*, pl. I), la lame musculaire, séparée de la lame cutanée par la cavité du myocèle (fig. 6).

Origine des nerfs dorsaux. — La première ébauche des racines dorsales est formée par une prolifération cellulaire dorsale et latérale du névraxe (fig. 10, *r*, pl. I). Elle est donc paire primitivement, de même que chez les Sélaciens, avec cette différence que chez ces derniers la prolifération s'opère au niveau des lèvres de soudure de la gouttière neurale. Chez l'Amphioxus, cette gouttière est fermée et les cellules qui délimitent latéralement la ligne de soudure se multiplient pour engendrer de chaque côté une travée cellulaire, la première ébauche des nerfs dorsaux (fig. 7, *r* et fig. 8, *r*, pl. I).

A côté de ces éléments situés immédiatement à la partie latérale dorsale du névraxe, on en voit d'autres naissant des parties latérales (fig. 8, *r'*, pl. I) se joindre aux premiers et s'engager avec eux latéralement entre l'épiblaste et les segments primordiaux. Ces cordons ne forment point de bandelette continue et diffèrent sous ce rapport des bandelettes ganglionnaires des autres vertébrés. Ils sont constitués par des éléments très petits, ovalaires ou allongés, renfermant un petit noyau entouré d'une mince couche de cytoplasme compact. Ils ressemblent sous ce rapport aux parties constituantes du névraxe lui-même. Sous l'épiblaste, on trouve, à côté de ces ébauches des racines dorsales, d'autres cellules plus aplaties et très minces, appartenant soit à la partie supérieure de la lame musculaire du segment primordial, soit à la partie supérieure de la lame latérale cutanée. Il est souvent difficile de les différencier des éléments propres à la première ébauche des racines dorsales. Toutefois ces derniers sont moins aplatis et sont entourés d'une couche de cytoplasme compact. Ils présentent un aspect analogue à celui des cellules du névraxe. De plus, on rencontre des images semblables à celles des figures 7, 8 et 9, où la cellule est encore à moitié engagée dans le système nerveux central et à moitié située en dehors du névraxe. Il ne peut donc y avoir le moindre doute quant à la signification de ces éléments.

Dès l'origine, il existe donc une ébauche double pour chaque racine dorsale; car, on vient de le voir, son apparition est liée à une prolifération des cellules dorso-latérales et à une prolifération des cellules latérales du névraxe. On pourrait douter de la signification et de la portée de cette double ébauche. Mais dans la suite du développement embryonnaire, cette image s'accentue encore davantage lors de l'apparition de la substance blanche. Celle-ci se montre d'abord sous forme d'un cordon siégeant au niveau de la partie ventrale et latérale de la moelle épinière (fig. 11, *cv*, pl. I). Il apparaît ainsi un cordon ventral gauche et un cordon ventral droit de chaque côté de la ligne médiane, occupant toute la largeur du segment ventral du cordon médullaire. Au début, ces deux faisceaux sont séparés au niveau de la ligne médiane par une travée de cellules épendymaires, mais bientôt ils arrivent en contact et se fusionnent en refoulant les cellules nerveuses et le canal central du côté dorsal (fig. 12, *cv*). Bientôt après se montre un second cordon de substance blanche, un cordon latéral, au niveau des parties

latérales du névraxe. Sur les coupes transversales, il apparaît sous forme d'un cercle clair (fig. 11, *cl*, pl. I), arrondi, très étroit, au milieu des cellules latérales et dorsales de la moelle épinière. Ce faisceau s'épaissit et refoule les cellules nerveuses voisines du côté du canal central; mais il persiste toutefois une travée cellulaire dorsale, séparant le cordon latéral de la surface dorsale du névraxe, et une crête cellulaire ventrale qui le sépare du cordon ventral voisin (fig. 12). Sur une section transversale, on aperçoit alors dans le système nerveux central deux masses distinctes : une partie centrale cellulaire entourant le canal épendymaire, l'ébauche de la substance grise, et une partie périphérique, libre de toute cellule, l'ébauche de la substance blanche. Le cordon latéral apparaît à l'intérieur des parties latérales de l'ébauche de la substance grise. Celle-ci présente sur une section transversale, de chaque côté, deux éminences ou deux cornes, une ventrale et une dorsale (fig. 11 et 12). Au moment de l'apparition du faisceau latéral, les deux cornes sont réunies à la périphérie de la moelle et elles se continuent à cet endroit avec des cellules qui prolifèrent en dehors du névraxe sous l'épiblaste, pour former l'ébauche des racines dorsales. Plus tard, à la suite de l'augmentation en épaisseur du cordon latéral, les cornes cellulaires s'écartent, et, après avoir été pendant un certain temps en rapport avec la périphérie de la moelle, la corne ventrale s'en sépare à la suite d'une fusion du cordon latéral avec le cordon ventral. A ce moment, la corne ventrale occupe à peu près le milieu de la région latérale du névraxe, c'est-à-dire qu'elle est séparée de la surface ventrale de la moelle par une couche de substance blanche aussi épaisse que la couche de substance grise qui la sépare de la surface dorsale.

A ce stade, l'ébauche de chaque racine dorsale paraît manifestement double. Sur certaines coupes, on trouve à la hauteur de la corne ventrale une racine très mince, formée par une réunion de fibrilles partant du pourtour de cette corne. Elle traverse l'enveloppe de la moelle et s'engage à l'intérieur de l'espace séparant deux myotomes voisins (fig. 14, *r*, pl. II); pour arriver au-dessous de l'épiblaste. Sur d'autres préparations, on aperçoit encore une travée cellulaire partant de la corne dorsale et qui s'engage sous l'épiblaste, pour s'y unir à la racine de la corne ventrale (fig. 13, *rd*, pl. II).

L'ébauche dorsale de la racine nerveuse est reconnaissable aussi long-

temps qu'elle est formée de cellules. Plus tard, les fibres nerveuses apparaissent et il devient alors extrêmement difficile d'étudier les diverses phases de sa fusion avec l'ébauche ventrale.

Si l'on examine très attentivement les diverses parties constituantes, aux différents stades de leur développement, de cette double ébauche radiculaire, nulle part on ne constate une trace d'ébauche ganglionnaire. L'étude de l'Amphioxus adulte, à l'aide de la méthode de Golgi, à l'aide du bleu de méthylène et à l'aide des méthodes ordinaires, ne révèle l'existence d'aucune cellule ganglionnaire proprement dite sur le trajet des racines dorsales, mais dévoile leur présence à l'intérieur du névraxe lui-même. Nous croyons donc pouvoir en conclure qu'il n'existe point de ganglions spinaux ni de ganglions crâniens sur le parcours des racines dorsales chez l'Amphioxus.

La première ébauche des racines nerveuses, que nous venons de décrire, ne correspond donc point à celle des Sélaciens et des autres vertébrés. Elle correspond aux cordons cellulaires qui, chez ces derniers, prolifèrent des ganglions spinaux vers les organes où les nerfs sensitifs se terminent. Il n'existe point de véritable racine dorsale, si l'on attribue à ce mot sa signification propre et restreinte, c'est-à-dire si l'on veut désigner la partie du nerf qui réunit le système nerveux central au ganglion spinal. L'ébauche ganglionnaire ne se détache point du névraxe; elle persiste à l'intérieur de ce dernier. Chez des larves de 5 millimètres, on voit apparaître les véritables cellules ganglionnaires du côté dorsal et de chaque côté de la ligne médiane. C'est donc à cet endroit qu'apparaît l'ébauche ganglionnaire correspondant à l'ébauche ganglionnaire primitive des Sélaciens. Ce stade primitif persiste donc chez le vertébré le plus inférieur pendant toute la vie.

Comme nous le verrons plus loin, la fusion de cette ébauche paire primitive en une ébauche impaire s'opère dans le cours du développement larvaire en trois endroits différents de la région antérieure du névraxe. On peut donc dire qu'à ces trois endroits l'Amphioxus s'est arrêté au stade de l'ébauche ganglionnaire impaire, c'est-à-dire au stade de la plaque dorsale médullaire, correspondant pour le cerveau au stade de la plaque dorsale cérébrale de von Kuppfer (« dorsale Hirnplatte »).

Au point de vue de leur parcours, on voit que dès l'origine, les nerfs dorsaux s'engagent entre les segments primordiaux et le feuillet externe.

Ils se comportent sous ce rapport comme une catégorie de rameaux des nerfs crâniens, les rameaux branchiaux de von Kuppfer des nerfs de la région branchiale antérieure (*Petromyzon*).

La double origine des nerfs dorsaux, dont l'une part du segment ventral et l'autre du segment dorsal de l'ébauche de la substance grise, nous rend compte de leur nature mixte, sensible et motrice. Il nous est évidemment impossible de distinguer au microscope les fibres motrices des fibres sensitives. Mais si l'on compare la proéminence ventrale de l'ébauche de substance grise à la corne dorsale ou postérieure, sensitive, on est porté à admettre que, des deux racines des nerfs dorsaux de l'Amphioxus, l'une, en rapport avec la proéminence dorsale, est probablement sensitive; l'autre, ventrale, en rapport avec la proéminence ventrale, est probablement motrice. De plus, si l'on admet que les cellules ganglionnaires, donnant naissance chez les autres vertébrés au cylindre-axe de la fibre nerveuse sensitive, n'ont pas quitté le système nerveux central, mais sont restées en place et se sont développées au niveau du segment dorsal de la moelle épinière, il est évident que chez l'Amphioxus ces fibres sensitives se développent aux dépens de ces cellules, par conséquent à partir du névraxe, pour pénétrer de là dans le nerf dorsal.

Nous avons vu plus haut qu'à un moment donné du développement embryonnaire, la racine du nerf dorsal quitte la moelle épinière, non pas au niveau de la partie dorsale de la moelle, comme c'est le cas pour les autres vertébrés, mais au niveau de la partie latérale (fig. 14, *r*, pl. II).

Cette disposition est évidemment en rapport avec l'origine double de ces nerfs, et elle persiste en réalité pendant toute la vie. En effet, au début, la section transversale de la moelle épinière est à peu près arrondie, elle représente un cercle aplati de haut en bas (du dos vers l'abdomen).

Plus tard, quand les cordons de substance blanche apparaissent, elle se rapproche d'un cercle parfait, pour devenir ensuite ovalaire, l'axe de l'ovale étant dirigé du dos vers la corde dorsale. C'est à ce moment que la racine dorsale se détache de la surface latérale de la moelle. Cette phase est en apparence transitoire. Chez l'adulte, la section de la moelle épinière est plutôt angulaire (les angles sont arrondis). Elle correspond à un quadrila-

tère dont l'axe le plus court est dirigé du dos vers la corde dorsale. Les nerfs dorsaux se détachent latéralement au niveau de l'angle dorsal (arrondi). Ce déplacement est plus apparent que réel, car dans le cours du développement, la moelle épinière s'aplatit de haut en bas et la distance qui sépare les deux racines d'une même paire nerveuse dorsale à leur sortie de la moelle, reste la même.

Dans la région postérieure de la moelle adulte, la disposition primitive est conservée pour les dernières paires nerveuses dorsales. Elles sortent de la moelle au niveau de la surface latérale, dans le voisinage immédiat des racines ventrales.

Origine des nerfs ventraux. — Avant l'apparition de la substance blanche nerveuse et au moment de l'apparition de la première ébauche des racines dorsales et des premières fibres striées, apparaît l'ébauche de la racine ventrale sous forme de quelques fibrilles d'une ténuité extrême (fig. 9, *v* et fig. 10, *v*, pl. I). Ces fibrilles se détachent des cellules ventrales du tube médullaire et rejoignent les bandelettes musculaires des myotomes voisins. Celles-ci apparaissent d'abord dans le voisinage immédiat du point d'émergence de ces fibrilles nerveuses et se développent ensuite dans les parties plus périphériques de la cellule musculaire, là où siège le noyau. Dès l'origine, les lamelles musculaires ont une disposition radiaire par rapport au point de sortie du nerf ventral.

Au début, le strié correspondant à des fibrilles très ténues, est continu, c'est-à-dire n'est pas interrompu au niveau de la membrane qui entoure le névraxe. Plus tard (fig. 13, *v*, pl. II), quand la substance blanche a pris un certain développement, on ne poursuit plus les fibrilles à l'intérieur de la substance blanche. Elles se détachent de l'enveloppe de la moelle et se portent sur les lamelles musculaires. A ce moment, on rencontre sur le trajet du nerf de petits noyaux provenant très probablement du tissu mésodermique voisin. Ils augmentent en nombre, et, comme nous le verrons plus loin, ils sont relativement nombreux chez l'adulte.

BIBLIOGRAPHIE.

1. Bidder et von Kuppfer, Untersuchungen über die Textur des Rückenmarks und die Entwickelung seiner Formelementen. Leipzig, 1857.

2. Götte, Die Entwickelungsgeschichte der Unke. Leipzig, 1875.

3. Hahn, Kursus der Entwickelungsgeschichte des menschlichen Embryo. Charkow, 1876.

4. Von Kölliker, Entwickelungsgeschichte des Menschen und der höheren Thiere. 1866.

5. Salensky, Entwickelungsgeschichte des Sterletz. (Fortsetzung.) 5. Die postembryonale Entwickelung. (Beilage zu den Protokollen der 97. Sitzung der Gesellschaft der Naturf. an der Univers. in Kasan, 1878, 21 p. [en russe]. Cité d'après les *Jahresberichte* de Schwalbe.)

   Idem, Entwickelungsgeschichte des Sterletz. I. Th. Die embryonale Entwickelung. (*Arbeiten der Gesellsch. der Naturf. an der kaiserl. Univ. in Kasan*, Bd. VII, fasc. 3. Kasan, 1878, 216 p., 9 pl. [en russe]. Cité d'après les *Jahresberichte* de Schwalbe.)

6. Forster et Balfour, Elemente der Embryologie.

7. Remak (cité d'après Goldberg), *Archiv f. mikrosk. Anat.*, Bd. XXVII, p. 599.

8. A. Sedgwick, On the inadequacy of the cellular theory of development and on the early development of nerves, particularly of the third nerve and of the sympathetic in Elasmobranchii. (*Quarterly Journal of microscopical Science*, vol. XXXVII, pp. 87 à 101.)

9. His, Ueber die Anfänge des peripherischen Nervensystems. (*Arch. für Anat. und Physiol.*, Anat. Abtheil., 1879, pp. 453-482, 2 pl.)

10. O. Hertwig, Entwickelungsgeschichte des Menschen und der Wirbelthiere. Jena, 1880.

11. Beard, Morphological Studies. II. The development of the peripheral nervous system of Vertebrates. (*Quarterly Journal of microscopical Science*, 1888, vol. XXIX, pp. 153-227, 6 pl.)

Idem, A contribution to the morphology and development of the nervous system of Vertebrates. (*Anat. Anzeiger*, 1888, n° 29, pp. 874-884; n° 30, pp. 899-905.)

12. Von Kuppfer, Ueber die Entwickelung der Neunaugen. (*Sitzungsber. der Kais. Baier. Acad. der Wiss. zu München*, Mathem.-physik. Kl., 1888, Bd. I, S. 71-79.)

13. A. Götte, Ueber die Entwickelung von Petromyzon fluviatilis. (*Zool. Anz.*, 1888, n° 275, pp. 160-163.)

14. O. Schultze, Die Entwickelung der Keimblätter und der Chorda dorsalis von Rana fusca. (*Zeitschr. f. wissensch. Zool.*, Bd. XLVII, S. 1-28, 2 pl.)

15. Ph. Owsjanikow, Zur Entwickelungsgeschichte des Flussneunauges. (Vorläuf. Mittheil.) (*Bull. de l'Acad. imp. des sc. de Saint-Pétersbourg*, nouvelle série, 1889, Bd. XXXIII, t. I, pp. 83-95.)

16. Houssay, Études d'embryologie sur l'axolotl. (*C. R.*, 1889, t. CIX, pp. 703-706.)

Idem, Études d'embryologie sur les vertébrés. L'axolotl. (*Arch. de zool. expérim. et génér.*, 1890, t. VIII, pp. 143-244.)

17. E. Golovine, Sur le développement du système ganglionnaire du poulet. [*Anat. Anz.*, 1890, pp. 119-124, et *Arbeiten der St.-Petersb. Naturf. Gesellschaft*, 1890, Bd. XXI, Zool. und physiol. Abtheil., Liefer. I (en russe).]

18. M. Goldberg, Ueber die Entwickelung der Ganglien beim Hühnchen. (*Arch. f. mikrosk. Anat.*, Bd. XXXVII, S. 587-602, 1 pl.)

19. Houssay, Sur la question du développement du système ganglionnaire chez le poulet. (*Arch. de zool. expér. et générale*, série II, t. IX.)

20. Von Kuppfer, Ueber die Entwickelung der Kopfnerven der Vertebraten. (*Verhandl. der Anat. Gesellsch.*, 1891, S. 22-55.)

21. Von Lenhossék, Die Entwickelung der Ganglienanlagen bei dem menschlichen Embryo. (*Arch. f. Anat. u. Physiol.*, Anat. Abtheil., 1891, S. 1-25, 1 pl.)

22. W. His, Zur Geschichte des menschlichen Rückenmarks und der Nervenwurzeln. (*Abhandl. der math.-physik. Kl. der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch.*, Bd. XIII, S. 479-514, 1 pl., et *Anat. Anz*, 1886, S. 284.)

Idem, Ueber die embryonale Entwickelung der Nervenbahnen. (*Anat. Anz.*, Bd. III, S. 499-506, et *Arch. f. Anat. u. Physiol.*, Anat. Abtheil., 1887, S. 368-378.)

23. M. Balfour, On the development of the spinal nerves in Elasmobranchfishes. (*Philosoph. Transact.*, vol. 166, part. I, p. 175.)

Idem, The development of Elasmobranchfishes. (*Journ. of Anat. a. Physiol.*, vol. XI, pp. 406-490, 5 pl., pp. 674-706, 2 pl.)

Idem, On the development of the spinal nervs in Elasmobranchfishes. (*Studies from the physiol. Laboratory in the University of Cambridge*, 1877, fasc. III, pp. 54-81, 3 pl.)

24. Von Hensen, Zur Entwickelung des Nervensystems. (*Virchow's Arch.*, 1864, Bd. XXX.)

Idem, Beitrag zur Morphologie der Körperformen und des Gehirns des menschlichen Embryos. (*Arch. f. Morphol. u. Entwick.*, 1877.)

25. A. Marshall, On the early stages of development of the nerves in birds. (*Journ. of Anat. a. Physiol.*, vol. XI, pp. 491-515, 2 pl.)

Idem, *Studies from the physiological Laboratory in the University of Cambridge*, p. III, 1877, pp. 88-111, 2 pl.

Idem, The segmental valve of the cranial nerves. (*Journ. of Anat. a. Physiol.*, 1882, vol. XVI, pp. 305-354, 1 pl.)

26. Von Kölliker, Entwickelungsgeschichte des Menschen und der höheren Thiere, 1879, 2. Aufl., Theil 2.

27. M. Sagemehl, Untersuchungen über die Entwickelung der Spinalnerven. (Dissert. Dorpat, 1882, 2 pl.)

28. Bedot, Recherches sur le développement des nerfs spinaux chez les Tritons. (*Recueil zool. suisse*, 1884.)

29. A.-D. Ónodi, Ueber die Entwickelung der Spinalganglien und der Nervenwurzeln. (*Intern. Monatschr. f. Anat. und Histol*, 1884, Bd. I, S. 204 u. 255.)

A.-D. Ônodi, Ueber die Ganglienzellengruppen der hinteren und vorderen Nervenwurzeln. (*Medic. Centralbl.*, 1885, S. 275-277 und 291-294.)

Idem, Ueber die Entwickelung des sympatischen Nervensyst., 2. Th. (*Arch. f. mikr. Anat.*, Bd. XXVI, S. 553-580, 5 pl.)

30. W.-B. Scott, The embryology of Petromyzon. (*American Journal of Morphology*, vol. 1, pp. 253-310, 4 pl.)

31. Shipley, On some points in the development of Petromyzon fluviatilis. (*Quarterly Journal of microscopical Science*, vol. XXXVII.)

32. N. Katschenko, Zur Entwickelungsgeschichte des Selachierembryos. (*Anat. Anz.*, 1888, S. 445-467.)

33. P. Mitrophanow, Sur la formation du système nerveux périphérique des vertébrés. (*C. R.*, t. CXIII, pp. 659-662.)

34. Lahousse, *Bull. de l'Acad. roy. de médecine de Belgique*, 1885, 3e série, t. XIX, p. 283.

35. Rabl, Bemerkungen über Segmentirungen des Hirns. (*Zool. Anzeig.*, Bd. VIII.)

36. G. Chiarugi, Osservazioni interno alle prime fasi di sviluppo dei Nervi ancefalici nei Mammiferi e in particolare sulla formazione del Nervo olfattivo. (*Monitore zool. Ital.*, 2i anni, t. I, pp. 47-60.)

37. P. Mitrophanow, Étude embryogénique sur les Sélaciens. (*Arch. de zool. expérim.*, t. I, pp. 161-220.)

38. C.-K. Hoffmann, Zur Entwickelung des Selachierkopfes. (Vorläuf. Mitth.) (*Anat. Anz.*, Bd. IX, S. 638-653, 5 fig.)

39. G. Chiarugi, Contribuzioni allo studio dello sviluppo dei nervi encefalici nei Mammiferi in confronto con altri Vertebrati. (*Pubbl. Ist. sup. Firenze. Sez. medic. chir.*, 1894, p. 71, 3 pl.)

40. L. Löwe, Beiträge zur Anatomie und zur Entwickelungsgeschichte des Nervensystems der Säugethiere und des Menschen. Berlin, 1880.

41. N. Goronowitsch, Die axiale und die laterale Kopfmetamerie der Vögelembryonen. Die Rolle der sogannten « Ganglienleiste » im Aufbau der Nervenstämme. (*Anat. Anz.*, Bd. VII, pp. 454-464.)

Idem, Untersuchungen über die Entwickelung der sogenannten « Ganglienleiste » im Kopfe der Vögelembryonen. (*Morph Jahrb.*, Bd. XX, pp. 187-259.)

42. H.-B. Pollard, Observations on the development of the head in Gobius Capito. (*Quarterly Journal of microscopical Science*, vol. XXXV, pp. 335-352, 2 pl.)

43. J. Beard, The system of branchial sense organs and their associated ganglia in Ichtyopsida. (*Quarterly Journal of microscopical Science*, 1885, vol. XXVI, pp. 95-156, 3 pl.)

44. W. Baldwin Spencer, Some notes on the early development of the Rana temporaria. (*Quarterly Journal of microscopical Science*, 1885, Suppl., pp. 125-138, 1 pl.)

45. A. Froriep, Ueber Anlage von Sinnesorgane, u. s. w. (*Arch. f. Anat. u. Physiol.*, Anat. Abth., 1885, pp. 1-55, 2 pl.)

46. A. Johnsohn and Lilian Sheldon, Notes of the development of the newt (Triton cristatus). (*Quarterly Journal of microscopical Science*, vol. XXVI, p. IV, pp. 573-589, 3 pl.)

47. H. Ostroumoff, Zur Entwickelungsgeschichte der Eidechsen. (*Zool. Anz.*, n° 292, pp. 620-622, et *Arbeiten der Naturf. der kais. Kasaner Universit.*, 1888, Bd. XIX, S. 122, 3 pl.)

48. A. Dohrn, Studien zur Urgeschichte des Wirbelkörpers. (*Mitth. aus der zool. Stat. zu Neapel*, Bd. X, S. 255-341, 7 pl.)

49. A. Froriep, Zur Entwickelungsgeschichte der Kopfnerven. (*Verhandl. der Anat. Gesellsch*, 1891, S. 55-65.)

50. Von Kuppfer, Studien zur vergleichenden Entwickelungsgeschichte des Kopfes der Cranioten. 2. Heft : Die Entwickelung des Kopfes von Ammocœtes planeri. München u. Leipzig, S. 79, 3 fig., 7 pl.

51. Sigm. Freud, Ueber den Ursprung der hinteren Nervenwurzeln im Rückenmark von Ammocœtes. (*Sitzungsb. der kais. Acad. der Wissensch Wien*, 1877, Bd. 75, 3. Abth., 13 p., 1 pl.)

52. P. Martin, Die erste Entwickelung der Kopfnerven bei der Katze. (*Oesterreich. Monatschr. f. Thierheilk.*, XV. Jahrg., 39 S.)

53. W. His, Anatomie menschlicher Embryonen. I. Embryone des erstens Monats. Leipzig.

54. Idem, Ueber das Auftreten der weissen Substanz und der Wurzelfasern am Rückenmark menschlicher Embryonen. (*Arch. f. Anat. u. Physiol.*, Anat. Abth., 1883, pp. 165-170, 1 pl.)

55. A. Dohrn, Ueber die erste Anlage und Entwickelung der motorischen Rückenmarksnerven bei den Selachiern. (*Mitth. aus der zool. Stat. zu Neapel*, Bd. VIII, S. 441-461, 1 pl.)

56. W. His, Die Neuroblasten und deren Entstehung im embryonalen Mark. (*Abhandl. d. Math. Physik. Kl. der kön. Sächs. Gesells. der Wissensch.*, Bd. IV, pp. 311-372, 4 pl., et *Arch. f. Anat. u. Physiol.*, Anat. Abth., pp. 249-300, 4 pl.)

57. A. Dohrn, Ueber die erste Anlage und Entwickelung der Augenmuskelnerven bei Selachiern und das Einwandern von Medullarzellen in die motorischen Nerven. (*Mitth. aus der zool. Stat. zu Neapel*, Bd. X, S. 1-40, 5 pl.)

DEUXIÈME PARTIE.

CONSTITUTION DU SYSTÈME NERVEUX PÉRIPHÉRIQUE DE L'AMPHIOXUS ADULTE.

Racines ventrales. — Ces racines avaient complètement échappé aux premiers observateurs; plus tard, elles ont été vues, mais non comprises, par Owsjanikow [1], Stieda [2], et niées à nouveau par Langerhans [3] et Balfour [4].

L'existence de ces racines ventrales fut établie définitivement par Schneider [5], Rohon [6], Van Wijhe [7], Rohde [8], Fusari [9], Retzius [10], Hatschek [11], qui

[1] Owsjanikow, *Ueber das Centralnervensystem des* Amphioxus lanceolatus (Bull. de l'Acad. imp. des sciences de Saint-Pétersbourg, 1868, t. XII, p. 291 : « Die Nervenwurzeln, dit-il, entspringen abwechselnd und in verschiedener Höhe »).

[2] L. Stieda, *Studien über den* Amphioxus lanceolatus (Mém. de l'Acad. imp. des sciences de Saint-Pétersbourg, 1873, 7e série, t. XIX, p. 46 : « Es entspringt an *einer* und *derselben* Seite *regelmässig abwechselnd* die einzelne Wurzel bald von der *oberen,* bald von der *unteren* Hälfte des Rückenmarks »).

[3] P. Langerhans, *Zur Anatomie des* Amphioxus lanceolatus (Arch. f. mikrosk. Anatomie, 1876, Bd. XII, S. 296).

[4] F.-M. Balfour, *On the spinal nerves of* Amphioxus (Journal of Anat. and Physiol., 1876, vol. X, p. 689). — Balfour persista encore dans sa manière de voir après la publication du mémoire de Schneider; voir : *On the spinal nerves of* Amphioxus (The Quarterly Journal of microsc. Science, 1880, new series, n° XXIX, p. 90).

[5] A. Schneider, *Beiträge zur vergleichenden Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Wirbelthiere.* Berlin, Verlag von G. Reimer, 1879, S. 15.

[6] Rohon, *Untersuchungen über* Amphioxus lanceolatus (Denkschr. der kaiserl. Akad. der Wissensch. Wien, 1882).

[7] J.-W. Van Wijhe, *Ueber die Mesodermsegmente und die Entwickelung der Nerven des Selachierkopfes.* Amsterdam, Johannes Müller, 1882. — *Ueber* Amphioxus (Anatomischer Anzeiger, Jena, 1893, Bd. VIII, S. 152).

[8] E. Rohde, *Histologische Untersuchungen über das Nervensystem von* Amphioxus lanceolatus (Zoologische Beiträge herausgegeben von Schneider, 1888, Bd. II, Heft 2, S. 201).

[9] Fusari, *Beiträge zum Studium des peripherischen Nervensystems von* Amphioxus lanceolatus (Internat. Monatsschr. f. Anat. u. Physiol., 1889, Bd. VI, S. 128).

[10] G. Retzius, *Zur Kenntniss des Centralnervensystems von* Amphioxus lanceolatus (Biologische Untersuchungen, 1891, neue Folge, Bd. II, S. 29).

[11] B. Hatschek, *Die Metamerie des* Amphioxus *und des* Ammocœtes (Anatom. Anzeiger, 1892, Bd. VII, Ergänzungsheft, S. 136). — *Zur Metamerie der Wirbelthiere* (Ibid., 1893, Bd. VIII, S. 90).

décrivirent en outre le trajet, la distribution et la structure de ces racines.

Sans nous arrêter à refaire l'historique des faits acquis, passons à l'exposé de nos observations pour autant qu'elles contredisent ou qu'elles complètent celles des auteurs précités. Tout ce qui suit se rapporte à des préparations faites au Golgi et à l'Ehrlich, qui sont absolument concordantes; en terminant ce chapitre, nous signalerons quelques données observées sur les préparations de fixation et de coloration habituelles.

Les racines ventrales, dont l'existence est également démontrée à l'évidence par les méthodes de Golgi et d'Ehrlich, partent toujours de la partie inférieure de la face externe convexe du névraxe; cette surface d'origine est oblongue, ellipsoïdale et d'autant plus grande que la racine elle-même est plus volumineuse; le volume de celle-ci est du moins approximativement proportionnel au volume, ou, plus exactement, au nombre de fibres musculaires lamellaires du myotome correspondant.

L'emplacement des surfaces d'origine de la racine ventrale par rapport à celles de la racine dorsale, varie : la première racine ventrale, la gauche, étant presque diamétralement opposée à la première racine ventrale droite, est plus voisine de la troisième paire dorsale (non compté le nerf olfactif) que de la deuxième; plus en arrière, les racines dorsales et les racines ventrales d'un même côté deviennent équidistantes; comme les racines dorsales alternent bientôt régulièrement, il existe une région où la coupe transversale passe par la racine dorsale d'un côté et la racine ventrale de l'autre côté. Plus en arrière, la racine ventrale se rapproche davantage de la racine dorsale précédente; alors seulement on a, par exemple : racine dorsale gauche, racine ventrale gauche, racine dorsale droite, racine ventrale droite, etc., tandis qu'à l'extrémité céphalique on a : racine dorsale gauche, racine dorsale droite, racine ventrale gauche, racine ventrale droite. A l'extrémité caudale il existe, en arrière de la dernière paire de racines ventrales, encore une paire dorsale, ainsi que l'a déjà signalé Rohde; ce qui indique, en arrière comme en avant, la disparition ou la non-apparition d'un seul myotome. De cette disposition résulte également qu'à la racine dorsale correspond, non la racine ventrale précédente, comme l'avait cru d'abord Hatschek, mais la

racine ventrale suivante; il en résulte encore que la racine dorsale se trouve dans le myosepte qui précède le myotome auquel elle correspond.

Les fibres nerveuses des racines ventrales, après avoir traversé la gaine conjonctive du névraxe et être arrivées dans le myocèle interne, se disposent, comme on l'a déjà dit, sous forme d'un éventail concave en arrière; un grand nombre de fibres contournent la corde dorsale et s'engagent, sous forme d'un faisceau aplati, entre le Longus dorsi et le Rectus abdominis (Schneider), là où le muscle latéro-dorsal s'est groupé en ces deux muscles.

Les fibres nerveuses atteignent ainsi, sur une bande relativement étroite, toute la surface concave du muscle latéro-dorsal : elles pénètrent ensuite, comme Retzius seul l'a observé, entre les lames musculaires; en outre, elles s'écartent de plus en plus et atteignent ainsi la zone périphérique du myotome.

Pas plus que d'autres observateurs, nous n'avons jamais vu une fibre musculaire ou une fibre nerveuse ventrale dépasser le myosepte; chaque racine ventrale se distribue, exclusivement et totalement, au myotome correspondant du muscle latéro-dorsal. A une parfaite segmentation musculaire correspond, si pas une segmentation du névraxe, du moins une segmentation parfaite du système nerveux moteur, segmentation qui disparaît presque complètement chez tous les autres vertébrés.

Les fibres d'une même racine ventrale ne sont pas groupées en faisceaux ou en nerfs distincts; la division de la racine ventrale en deux parties, l'une ventrale, l'autre dorsale (Retzius), est factice et n'a d'autre base qu'une illusion d'optique ou un effet de coupe. Les fibres ascendantes, comme les fibres descendantes, sont variqueuses; seulement, les dernières le sont sur un plus long trajet, parce qu'elles ne s'engagent pas de sitôt entre les fibres musculaires. L'angle formé dans la figure 6, planche XIII de Retzius, par les fibres ascendantes et par les fibres descendantes, est indubitablement occupé par des fibres nerveuses transversales, lesquelles, ascendantes ou descendantes, s'engagent directement entre les lamelles musculaires [1]. Les fibres de la racine ventrale, contrairement à celles de la racine dorsale, sont assez distantes les unes des autres, et sensiblement plus volumineuses que les fibres

[1] Cfr. E. Rohde, *loc. cit.*, Taf. XVI, Fig. 28, 29 et 31ª.

sensitives; les fibres imprégnées par le chromate d'argent ne présentent jamais de striations régulières, ni transversales ni longitudinales; arrivées entre les lames musculaires et observées sur des coupes longitudinales, certaines d'entre elles (photogramme n° 17, pl. IV, fibre du milieu) possèdent parfois une striation apparente, mais non régulière, qui est évidemment due à la compression des fibrilles musculaires.

Très rarement, les fibres ventrales sont cylindriques et de diamètre uniforme pendant leur trajet depuis le névraxe jusqu'à la pénétration entre les lames musculaires. En général, elles présentent de distance en distance des renflements assez réguliers dont le volume est plus ou moins constant (pl. IV, fig. 15). D'autres fois, ces renflements sont de diamètre très variable, irréguliers, placés à des distances très inégales (pl. IV, fig. 16), ainsi que l'indique Retzius dans les figures 3 et 4 de la planche XII et dans la figure 6 de la planche XIII.

Nous considérons ces renflements irréguliers comme artificiels et résultant d'un déplacement de la substance nerveuse semi-liquide se ramassant de distance en distance en des masses informes plus ou moins volumineuses; les renflements réguliers, par contre, correspondent peut-être aux noyaux des fibres nerveuses.

Nous disions plus haut que les fibres nerveuses pénètrent en rayonnant entre les lames musculaires du myotome et gagnent ainsi la périphérie du muscle; pendant ce trajet, elles se dichotomisent quelquefois, comme l'indique également le photogramme 17, planche IV, et comme l'a déjà signalé Retzius.

Le mode de terminaison de ces fibres est problématique jusqu'ici. « Wie sehr ich mich auch bemüht habe, in dem ich zur weitmöglichsten Verfolgung dieser motorischen Fasern nach den verschiedenensten Methoden vorging — ainsi parle Fusari [1] — konnte ich doch nur annehmen das sie sich zwischen den Muskelfasern verlieren, ohne aber ihre Endigungsweise feststellen zu können. » Retzius résout catégoriquement le problème en affirmant : « Besondere Endapparate giebt es nicht [2]. »

[1] *Loc. cit.*, p. 128.
[2] Retzius, *loc. cit.*, p. 46.

Or, dans nos préparations au Golgi, et aussi dans nos préparations durables au bleu de méthylène, nous observons de la manière la plus manifeste, ainsi que le montrent les photogrammes nos 17 et 18, planche IV, que les fibres nerveuses motrices intramusculaires arrivées près de la périphérie du myotome s'élargissent et se terminent par une tache motrice, aplatie et conique, en forme de spatule [1]. Ce mode de terminaison, extraordinaire de prime abord, est parfaitement approprié à la disposition spéciale et à la forme lamellaire des fibres musculaires; cette terminaison en spatule augmente la surface de contact entre la substance nerveuse et la substance musculaire; elle peut être considérée comme une plaque motrice de fibre musculaire cylindrique sur laquelle la fibre nerveuse terminale s'insère, non pas perpendiculairement, mais latéralement. Vu le nombre des plaques terminales et celui des fibres musculaires, à n'importe quel niveau de la périphérie du myotome, nous sommes autorisés à admettre que chaque fibre musculaire est innervée (photogrammes 17 et 18, pl. IV). La disposition des terminaisons motrices à la périphérie du myotome est sans doute en rapport avec le développement embryonnaire du muscle [2].

Chaque myotome est une unité anatomique; l'absence de faisceaux distincts de fibres dans son nerf moteur nous fait également admettre qu'il est une unité physiologique, que toutes les fibres musculaires du myotome se contractent toujours au même degré, mais à des degrés différents d'après l'intensité de l'excitation nerveuse.

Nous n'avons jamais vu pénétrer dans un myotome d'autres fibres nerveuses que celles de la racine ventrale correspondante; contrairement à l'opinion de Rohon et de Van Wijhe, nous croyons que les racines dorsales ou ventrales ne donnent pas de fibres à la charpente conjonctive sur laquelle le myotome s'insère et agit directement. Ici donc, il nous paraît démontré anatomiquement — l'Amphioxus est peut-être le seul animal qui se prête

[1] Au moment de relire notre manuscrit, nous venons de constater que Van Wijhe a déjà observé cette terminaison qu'il appelle « linsenförmige Endorgan ». (D'après *Zoologische Jahresberichte* für 1893, S. 158.)

[2] Cfr. Korschelt u. Heider, *Lehrbuch der Entwicklungsgeschichte*, 1893, S. 144.

à cette démonstration — qu'il n'existe pas dans le muscle ou dans les tendons de fibres spéciales pour le « sens musculaire ».

Les préparations fixées par les liqueurs osmiques montrent que les fibres nerveuses de la racine ventrale sont amédullaires, plus épaisses et surtout plus foncées que les fibres pâles des racines dorsales. Des noyaux cellulaires sont accolés à la surface de la fibre motrice; ils ressemblent beaucoup à ceux des racines dorsales; ils sont allongés ou fusiformes et relativement chromatiques (pl. XI, fig. 47). Nous croyons que les renflements réguliers, que nous signalions plus haut sur le trajet des fibres motrices imprégnées au bleu de méthylène ou au chromate d'argent, correspondent à ces noyaux. Si ces renflements bipolaires se trouvaient sur le trajet de la fibre dorsale, on pourrait leur attribuer la signification des cellules ganglionnaires spinales; intercalés sur le parcours des fibres motrices, il ne viendra à l'esprit de personne de les considérer comme tels.

Entre les fibres nerveuses ventrales, il existe en outre un tissu de charpente, pâle, légèrement strié dans le sens de la longueur, au sein duquel on observe quelques noyaux allongés, probablement de même nature que le tissu qui l'a engendré. N'ayant point vu du tissu neuroglique pénétrer à l'intérieur des racines ventrales, nous admettons que le tissu de soutènement en question est d'origine mésoblastique et de nature conjonctive.

A côté de cette charpente conjonctive, et surtout vers la périphérie de la racine ventrale, on trouve un grand nombre de fibres musculaires striées (pl. XI, fig. 47), dans lesquelles on aperçoit une succession de disques alternativement minces, isotropes, clairs, et épais, anisotropes, obscurs. Ces derniers se colorent absolument de la même manière que les bandes anisotropes des fibres musculaires du myotome voisin, c'est-à-dire en rouge très intense, par la safranine. Ces fibres musculaires sont très étroites et, au voisinage de la membrane limitante du névraxe, elles ont la même ténuité que les fibres nerveuses. Comme l'ont déjà signalé Schneider, Rohde, Fusari, l'existence de fibres striées au sein de la racine ventrale est indiscutable; seulement, les fibres nerveuses motrices proprement dites, c'est-à-dire la fibre munie de distance en distance d'un noyau allongé, ne présentent jamais cette striation, comme le fait déjà remarquer Fusari. Les fibres striées qui paraissent faire

partie de la racine ventrale ne sont pas des fibres nerveuses, mais des fibres musculaires proprement dites appartenant au myotome correspondant dont elles se séparent en infléchissant leur direction dans le sens transversal. Leur point d'insertion est, d'une part, le myosepte antérieur proprement dit, d'autre part, la base du myosepte suivant, et, pour certaines d'entre elles, la gaine même du névraxe.

De par leur direction, ces fibres musculaires mélangées aux fibres motrices ont peut-être une fonction propre, à savoir, de prévenir le tiraillement de la racine ventrale en se contractant en même temps que le muscle latéro-dorsal.

Dans la troisième partie, consacrée à l'étude du névraxe, nous examinerons la question de l'origine réelle des fibres ventrales.

Racines dorsales. — Comme pour les racines ventrales, nous exposons d'abord les données observées sur les préparations au Golgi et au bleu de méthylène; nous comparerons ensuite quelques-unes de ces données avec celles fournies par les préparations de fixation et de coloration habituelles, qui nous révèleront encore quelques détails nouveaux.

Rectifions d'abord certains détails de la description topographique qu'a donnée Hatschek des nerfs dorsaux.

D'après cet auteur [1] : « Die dorsale Wurzel steigt nahezu in dem Winkel des Myoseptums gegen die Unterhaut empor, und theilt sich dort in einem dorsalen und ventralen Ast. » Comme la plupart des auteurs, parmi lesquels Hatschek lui-même, le représentent, l'angle du myosepte correspond presque mathématiquement au plan médian longitudinal de la corde dorsale; la racine dorsale indivise est située dans un épaississement de la face supérieure du dièdre du myosepte, environ entre le tiers inférieur et le tiers moyen; la bifurcation en rameau dorsal et en rameau ventral (pl. V, fig. 19) se fait toujours avant la sortie du myosepte, de plus en plus près du névraxe à mesure qu'on approche de la tête, de sorte que les rameaux dorsal et ventral de la deuxième racine dorsale peuvent rester distincts jusqu'à leur origine dans le névraxe.

[1] *Loc. cit.*, p. 140.

La distance entre le rameau dorsal et le rameau ventral, au moment de leur sortie du myosepte et de leur inflexion en haut ou en bas, augmente avec l'épaisseur du myotome; elle diminue donc vers la tête et vers la queue. Pour la dernière racine caudale seule, nous avons remarqué une bifurcation en rameau dorsal et en rameau ventral, se faisant au point de sortie de la racine du myosepte.

D'après Hatschek [1], « le rameau dorsal se subdivise : 1° en un nerf cutané dorsal (mieux appelé peut-être nerf supéro-dorsal), qui se perd en petites ramifications dans l'épiderme du dos, et 2° en un nerf latéro-dorsal, qui se termine par des ramifications épaisses à l'épithélium du côté dorsal du muscle ».

Même cette bifurcation, qui est également constante au milieu du corps de l'Amphioxus adulte, se fait pendant le trajet du rameau dorsal dans le myosepte; le nerf latéro-dorsal (pl. V, fig. 19, *NLD*) est toujours moins volumineux que le nerf supéro-dorsal (*NSD*); il n'y a aucune différence de volume dans les ramifications de l'un et de l'autre nerf.

« De même, continue Hatschek [1], le rameau ventral donne un nerf cutané ventral (mieux appelé inféro-ventral) et un nerf latéro-ventral. Les nerfs latéro-ventraux sont très développés aux extrémités céphaliques et caudales. Dans le milieu du corps, nous n'avons pas encore pu démontrer leur présence. »

D'après nos observations, il n'y a pas de nerf latéro-ventral proprement dit au milieu du corps; il est représenté tout au plus par les grosses branches latérales du rameau ventral (pl. V, fig. 19, *RV*).

« Une troisième branche spéciale du rameau ventral, dit encore Hatschek [1], est le nerf viscéral qui contourne le bord ventral du muscle latéro-dorsal et se dirige à l'intérieur », en pénétrant au niveau de l'angle aigu formé par le myosepte et la cloison longitudinale séparant le muscle latéro-dorsal du muscle transverse (pl. VIII, fig. 26). Par conséquent, le nerf viscéral pénètre au même niveau où apparaît, d'après Boveri [2], l'organe sexuel embryonnaire. Nous reprenons plus loin la description du nerf viscéral.

[1] *Loc. cit.*, p. 141.

[2] Boveri, *Ueber die Bildungsstätte der Geschlechtsdrüsen u. s. w.* (Anatomischer Anzeiger, 1892, Bd. VII, S. 170).

La figure 19 montre également que les ramifications cutanées du nerf dorsal forment une véritable arborisation; parfois nous avons vu sur le bord des nageoires les branches d'un même nerf dorsal former un plexus; parfois nous avons observé aussi que les ramifications d'une branche empiètent, sans s'anastomoser, sur le domaine d'innervation cutanée d'une autre branche. Mais en dehors des plexus ou réseaux que nous signalons plus loin à la région buccale, au pore abdominal et à l'anus, nous n'avons jamais rencontré les anastomoses représentées par Fusari dans la figure 1, planche VII, et qu'il dit être d'une fréquence extraordinaire à la région ventrale. Nos préparations au bleu de méthylène sont trop démonstratives pour que nous ne niions pas l'existence de ces anastomoses.

Les ramifications de la figure 19 pénètrent à travers la cuticule de la manière décrite par Langerhans; se terminent-elles directement et totalement dans des cellules tactiles spéciales, comme le représente cet auteur dans la figure 14 de son mémoire? Nous répondons catégoriquement que non; la fibre nerveuse, en traversant et après avoir traversé la cuticule conjonctive se ramifie sous et entre les cellules cutanées (pl. VI, fig. 20); ce sont ces ramifications qui sont terminales et qui nous ont paru s'arrêter, sans présenter d'organe spécial, entre et, peut-être, dans les cellules épithéliales ordinaires.

Ni dans nos préparations au Golgi, ni dans celles à l'Ehrlich (celles-ci étant examinées à frais ou après fixation), nous n'avons pu nous convaincre de l'existence de cellules épithéliales spéciales se trouvant particulièrement en continuité avec les fibres nerveuses terminales. Les cas sont nombreux où cette continuité et une imprégnation sélective paraissent exister, mais, malgré des examens répétés et comparatifs, nous n'avons pu, pas plus que Fusari, nous convaincre de leur réalité. Jusqu'à preuve du contraire, nous admettons donc que l'épithélium cutané, en dehors des régions dont nous parlerons plus loin, tout en étant constitué par des cellules morphologiquement assez différentes, ne contient pas de cellules tactiles spéciales.

Si l'on étudie à ce point de vue l'épiderme, on constate deux espèces de cellules. Les unes sont cylindriques, les autres aplaties et très étroites (pl. IX, fig. 5).

Les cellules cylindriques présentent à considérer un noyau et un protoplasme. Le noyau est ovalaire ou arrondi, plus rapproché de la membrane basale que de la surface; il renferme un réticulum chromatique très apparent.

Le cytoplasma offre au niveau de la base une bordure basale crénelée, confondue avec la cuticule; cette bordure basale est nettement visible sur les préparations où les cellules sont arrachées de la membrane épaisse sous-jacente. A cette bordure succède une zone de cytoplasma clair à charpente filaire lâche, peu serrée, entourant le noyau. Après cette zone claire vient une couche contenant une masse beaucoup plus compacte, propre à toutes les cellules épithéliales d'Amphioxus adultes et de jeunes larves. Cet amas représente probablement la sphère attractive. On y aperçoit souvent un ou deux corpuscules arrondis, très petits, safraninophiles, correspondant probablement aux corpuscules centraux. Les figures de division mitosique étant très rares dans les cellules épidermiques, il nous est fort difficile de dire comment cette masse se comporte lors de la division indirecte.

Entre cette masse compacte et la bordure périphérique existe une couche relativement étroite, remplie de granulations safraninophiles.

La zone toute superficielle est formée par une bordure striée, une cuticule relativement épaisse, pourvue d'un grand nombre de bâtonnets atteignant la surface libre de la cellule où l'on constate parfois une membrane à double contour, sorte d'enduit coagulé par les réactifs qui imprègnent la surface des cellules épithéliales.

A côté de ces cellules cylindriques, il en existe d'autres, beaucoup plus étroites, plus effilées, à noyau plus allongé et très chromatique. Ces éléments, que Langerhans considère comme cellules tactiles, sont, d'après nous, des cellules épithéliales très comprimées et modifiées dans leur forme. Sous ce rapport, ils sont comparables à des corpuscules analogues qu'on trouve dans l'épiderme d'Amphibiens et même de Mammifères au niveau de la rangée basale du réseau muqueux de Malpighi. A leur surface, ils sont munis d'une bordure striée analogue à celle des cellules voisines de la première catégorie. Sur les préparations à plat de la peau d'Amphioxus, ces cellules se montrent sous forme de petits corpuscules étoilés, émettant

quelques prolongements entre les éléments voisins. Étant comprimés par les cellules environnantes, ils prennent un aspect très irrégulier : ils envoient des crêtes, des espèces d'ailerons très courts qui s'engagent dans les espaces intercellulaires voisins.

A ces deux espèces de cellules, il faut ajouter une troisième variété que nous avons rencontrée dans la fossette olfactive d'Amphioxus adultes et dans plusieurs autres régions du corps à l'état isolé ou bien accumulées en amas plus ou moins considérables. Ces cellules sont cylindriques et se caractérisent par un aspect clair du cytoplasma. Leur noyau, très chromatique, à peu près homogène, est plus petit que celui des cellules habituelles; il est rapproché de l'extrémité basale et entouré d'un cytoplasma clair, pour ainsi dire homogène, se colorant légèrement en rouge par la safranine. Sous la bordure périphérique existe une couche compacte qui se colore en rouge intense. Celle-ci est garnie à sa surface de cils nombreux, se colorant d'une manière analogue. Toutes les cellules de la fossette olfactive de l'Amphioxus adulte offrent cet aspect régulier. Nous n'avons pu étudier le rapport que présentent ces cellules avec les fibres nerveuses.

Innervation de la bouche et du velum. — Les préparations au Golgi et surtout celles au bleu de méthylène nous ont permis de nous faire une idée presque absolument complète sur l'innervation de la bouche et du velum ainsi que de la cavité branchiale.

Van Wijhe seul a donné de l'innervation de la bouche et du velum une description exacte et complète, à laquelle nous pouvons souscrire dans la plupart des points. Nous représentons par un dessin mi-schématique l'innervation de ces organes d'après des préparations d'Amphioxus adulte coloré au bleu de méthylène, incisé sur la ligne médiane ventrale et monté en entier dans le baume (pl. VI, fig. 22).

D'après Van Wijhe, le rameau ventral du 3^{e} nerf dorsal gauche donnerait deux à trois branches muqueuses épaisses qui s'infléchissent vers le côté droit sous la corde dorsale; le plus souvent nous n'avons trouvé qu'une branche, tout au plus deux, se distribuant à la région muqueuse antérieure de la bouche et formant à droite la partie la plus antérieure du

plexus de Fusari. Les trois quarts postérieurs de la moitié droite de ce plexus sont fournis par une grosse branche du 4e nerf dorsal gauche. Une branche postérieure de ce même nerf passe sous le corps de Hatschek et atteint indubitablement la partie droite du velum, dans lequel elle se ramifie. Le 7e nerf dorsal gauche contribue, d'après nous, à innerver la moitié gauche du velum, et probablement aussi la partie la plus postérieure de la muqueuse buccale. Comme l'a déjà dit Van Wijhe, le plexus de Fusari est donc constitué uniquement par des branches des nerfs dorsaux gauches, 3 à 6, et, d'après nous, peut-être 7; le velum est innervé exclusivement par des branches des nerfs dorsaux gauches, 4 à 6, et aussi par 7 (d'après nous). Le plexus de Fusari se distribue sûrement au muscle latéral interne; en outre, il nous paraît manifeste que quelques-unes de ses ramifications remontent sur la surface interne des cirres.

Les branches cutanées des nerfs dorsaux gauches, 3 à 7, et les nerfs dorsaux droits, 3 à 7, qui sont exclusivement cutanés, viennent former à la base des cirres le plexus labial externe, représenté par Fusari dans la figure 5, planche VII; de ce plexus surtout se dégagent des fibres nerveuses pour les cirres.

Il paraît éminemment probable à Van Wijhe que le plexus de Fusari innerve également le muscle labial externe; mais on pourrait se demander alors quelle est la raison d'être du plexus labial externe si riche qui existe précisément sur la surface externe du muscle labial externe, et pas ailleurs; en outre, d'après des coupes au Golgi et, plus encore, d'après des préparations au bleu de méthylène, il nous paraît presque certain que le plexus labial externe innerve, au moins du côté gauche, le muscle labial externe. Nous avons observé que du côté gauche le rameau ventral du 8e nerf dorsal donne une branche latérale qui vient se jeter suivant une direction longitudinale dans le plexus labial externe.

Comme nous le disions déjà, le nerf circulaire volumineux du velum est formé par des branches provenant des 4e à 7e nerfs dorsaux gauches. Ce nerf nous a paru se trouver autour de la partie moyenne du muscle sphincter du velum, à l'intérieur duquel il donne de grosses branches. Dans nos préparations au Golgi, nous avons également observé à l'intérieur des tentacules

des fibres nerveuses que nous avons pu poursuivre jusque entre des cellules épithéliales. Dans ces préparations, contrairement à celles de Van Wijhe, il n'y avait pas d'imprégnation de cellules sensorielles.

Si le rameau postérieur du 4e nerf dorsal gauche ne s'arrête pas au corps de Hatschek, contrairement à l'affirmation de cet auteur, mais va jusqu'au velum, le nerf récurrent de Hatschek, comme le remarque déjà Van Wijhe, s'arrête au velum, où il se bifurque en deux branches transversales, et n'a rien de commun avec le plexus branchial.

Nerfs viscéraux [1]. — Ainsi que nous venons de le voir, les rameaux ventraux des nerfs dorsaux gauches, 3 à 7, donnent des branches profondes qui innervent la surface interne de la bouche et du velum; à l'exemple de Van Wijhe et de Hatschek, on peut les appeler nerfs viscéraux ou plutôt nerfs viscéraux buccaux, pour les distinguer des nerfs viscéraux thoraciques (nous préférons thoraciques à branchiaux, pour éviter la confusion; voir plus loin).

En arrière du velum, le 8e nerf dorsal gauche (probablement), le 9e sûrement et les nerfs suivants, le 8e nerf dorsal droit et gauche (probablement), le 9e sûrement et les suivants dégagent au bord inférieur du muscle latéro-dorsal une grosse branche profonde qui pénètre dans la cavité branchiale de la manière indiquée plus haut et représentée dans la figure 26 de la planche VIII et les photogrammes 23, 24, 25. Ce nerf viscéral se détache ainsi de chaque rameau ventral des nerfs dorsaux jusqu'au pore abdominal (39e paire dorsale); les 40e et 41e paires dorsales donnent également un nerf viscéral qui pénètre entre le muscle latéro-dorsal et la nageoire abdominale, arrive sous l'endothélium péritonéal, s'y infléchit en avant presque à angle droit et vient se jeter dans le plexus nerveux du pore abdominal.

Plus en arrière, nous n'avons jamais pu, malgré l'examen répété de

[1] Cfr. Leuckart et Pagenstecher, *Untersuchungen über* Niederseethieren (Müller's Arch., 1858, S. 536; Rolph, *Untersuchungen über den Bau des* Amphioxus (Morpholog. Jahrbuch, 1876, Bd. II, S. 87); Rohon, Schneider, Rohde, Van Wijhe, Hatschek, Retzius, *loc. cit.*; surtout Fusari, *loc. cit.*, SS. 130 u. 133.

nombreuses préparations de tous genres, découvrir de nerf viscéral pénétrant de l'extérieur dans la cavité abdominale ; nous pouvons donc difficilement nous rallier à la conclusion de Hatschek qui affirme son existence.

A l'exception des nerfs viscéraux postérieurs au pore abdominal, chaque nerf viscéral (pl. VIII, fig. 26, *NV*) se bifurque à son arrivée sous le péritoine en deux branches : 1° en un nerf viscéral transverse (*NVT*), appelé sympathique par Fusari; 2° en un nerf viscéral ascendant (*NVA*), appelé rameau branchial, mais à tort, puisqu'il existe encore en arrière des branchies (contrairement à Rohon et à Fusari) jusqu'au niveau du pore abdominal.

Le nerf viscéral transverse se dirige, sous les organes sexuels, quand ceux-ci sont développés, vers la ligne médiane, donnant à droite et à gauche des branches latérales ramifiées qui s'anastomosent avec des branches correspondantes du nerf viscéral voisin antérieur et postérieur.

Les nerfs viscéraux transverses, droits et gauches, qui alternent encore assez régulièrement, forment de la sorte sur la moitié droite et sur la moitié gauche de la paroi ventrale de la cavité branchiale, au-dessus du muscle transverse et sous l'épithélium péritonéal, un magnifique réseau (*RP*) qui se fusionne par de fines anastomoses sur la ligne médiane.

Ce réseau s'étend depuis la base postérieure du velum jusqu'au pore abdominal qu'il enlace.

Comme le montrent surtout les préparations au Golgi (photogramme 28), le nerf viscéral transverse et ses ramifications sont constitués par de nombreuses fibrilles nerveuses plus ou moins variqueuses, de sorte qu'il est impossible d'observer directement si une fibre nerveuse d'un nerf viscéral transverse s'anastomose réellement avec une fibre nerveuse d'un nerf viscéral voisin. Mais s'il n'y a pas d'anastomose, si l'excitation d'une fibre nerveuse ne se transmet pas (au moins « par contact ») aux fibres nerveuses voisines, quelle est alors la raison d'être de ce vaste et riche réseau occupant la surface péritonéale sur une longueur de plus de trente myotomes?

Du côté de la peau, la finesse du sens tactile et de localisation est garantie par l'absence d'anastomoses et par les ramifications arborescentes des fibres nerveuses; l'animal réagit d'une manière variée, mais appropriée, contre les excitants externes.

Par contre, même chez l'homme, le sens de localisation et de perception manque presque totalement aux excitations viscérales; les viscères réagissent uniformément en se contractant, d'où résulte l'expulsion de leur contenu par les orifices naturels antérieur ou postérieur et la fermeture de ces orifices.

Le point capital pour que cette réaction des viscères soit efficace et utile, c'est que celle-ci soit synergique dans tout l'organe.

L'existence d'un réseau du côté de l'appareil sensitif et du côté de l'appareil musculaire digestif rend possible cette synergie, en même temps qu'elle nous explique l'absence du sens de localisation.

Aussi sommes-nous convaincus que les nerfs viscéraux, dérivant de racines dorsales différentes et successives, forment un véritable réseau établissant la communication fonctionnelle entre les différentes voies de transmission.

La transmission de l'excitation nerveuse se ferait, d'après nombre d'anatomistes, par contact ou à distance. Pour éliminer l'action de contact ou à distance, les astronomes, les physiciens, les chimistes ont créé l'hypothèse de l'éther, auquel ils croient comme s'ils l'avaient vu et palpé. Il nous semble — c'est une opinion personnelle — qu'il eût été plus honorable pour les savants biologistes de supposer une connaissance imparfaite des rapports des neurones résultant de défauts dans les moyens d'investigation plutôt que de tirer cette conclusion « extra-scientifique » d'une action de contact ou à distance.

Le réseau péritonéal innerve du côté interne la muqueuse péritonéale, du côté externe le muscle transverse. Sur des coupes transversales, on voit sans contredit des fibres nerveuses se détacher du réseau péritonéal, pénétrer entre les lames musculaires du muscle transverse et s'y terminer par un renflement plus ou moins marqué, analogue à la terminaison des fibres nerveuses dans les muscles lisses.

Le muscle transverse est strié comme le myocarde est strié; mais est-il formé pour cela par des fibres musculaires striées proprement dites? Nous croyons que non. Tandis que la striation du muscle latéro-dorsal s'imprègne distinctement et nettement par le Golgi (pl. IV, fig. 15, 16 et 18), nous

n'avons jamais observé d'imprégnation pareille dans les fibres du muscle transverse ni dans celles du muscle labial et autres muscles splanchniques.

Lorsque l'organe sexuel est volumineux, il détache la séreuse péritonéale du muscle transverse sur une certaine étendue [1]; à ce niveau, on observe, après avoir fait sauter le contenu sexuel, un premier réseau nerveux dans l'épaisseur de la membrane séreuse (pl. VI, fig. 29), recouvrant l'organe sexuel, puis sur la partie du muscle transverse dépourvue de séreuse péritonéale, on voit les troncs des nerfs viscéraux transverses donner des branches latérales, former un second réseau et dégager des fibres terminales qui sont évidemment destinées au muscle transverse. Donc, contrairement à Fusari, nous admettons que le réseau péritonéal innerve le muscle transverse, que le nerf viscéral, et conséquemment le nerf dorsal, est mixte, sensitif et moteur. (Rolph, Van Wijhe, Hatschek, etc.).

La loi de Bell comporte donc de ce chef une restriction importante [2]. Nos recherches sur l'origine centrale de la racine dorsale ont donné une base anatomique à cette fonction mixte, centripète et centrifuge, en démontrant que cette racine prend origine à la fois dans la substance grise antérieure et postérieure du névraxe. Seulement, en ce qui concerne la loi de Bell, nous ferons observer qu'elle s'applique avant tout aux fonctions nerveuses animales (nerfs sensitifs et sensoriels d'une part, nerfs moteurs des muscles volontaires d'autre part). Ne tend-on pas à admettre que tout le système sympathique des vertébrés supérieurs dérive des racines dorsales? Les fibres centrifuges, pour autant qu'elles existent dans la racine dorsale, ne sont-elles pas plutôt des fibres de projection et d'association? Malheureusement, les éléments cellulaires qui se trouvent chez l'Amphioxus sur le trajet des nerfs viscéraux transverses ou ailleurs, sont trop petits pour qu'on puisse, en connaissance de cause, se prononcer sur leur nature ganglionnaire ou non.

Comme nous le disions déjà, le réseau péritonéal contourne le pore abdominal, il tapisse la face interne de sa lumière; les mailles de ce réseau

[1] Cfr. Boveri, *loc. cit.*, S. 178, Fig. 12.
[2] Hatschek, *loc. cit.*

sont plus serrées; il est surtout constitué de chaque côté par quatre nerfs viscéraux, dont deux situés en avant du pore et deux en arrière, ces derniers formant principalement la moitié postérieure de ce réseau circulaire du sphincter et de la muqueuse du pore abdominal.

Le réseau péritonéal a été le mieux décrit et figuré par Fusari (fig. 3). Contrairement à cet auteur, nous avons observé qu'il présente partout le même aspect, excepté sous les glandes sexuelles, où il est moins riche.

La striation et les épaississements des travées de ce réseau (Fusari) n'existent que dans les préparations où le muscle abdominal est fortement rétracté et résultent manifestement de la compression exercée par les lames musculaires sur les travées nerveuses; on peut les faire disparaître et réapparaître à volonté, en tendant plus ou moins transversalement la paroi péritonéale.

Nerf viscéral ascendant [1]. — Ainsi qu'il est dit plus haut, chaque nerf viscéral thoracique donne un nerf viscéral ascendant jusqu'au niveau du pore abdominal; il n'y a que les 8e et 9e paires dorsales chez lesquelles nous n'avons pas encore découvert de nerf viscéral ascendant ou plutôt une ramification branchiale du nerf viscéral transverse correspondant.

Après bifurcation du nerf viscéral primitif (pl. VIII, fig. 26, 27), le nerf viscéral ascendant contourne aussitôt l'angle du bord inférieur du myotome, remonte sur sa face interne en dehors des glandes sexuelles, sous la séreuse pariétale, tantôt perpendiculairement, tantôt s'infléchissant légèrement en avant ou en arrière : après un trajet plus ou moins long, il se divise en plusieurs branches. Quelle est la destination du nerf viscéral ascendant?

A ce point de vue, distinguons dans la cavité branchiale deux régions : une antérieure, plus grande, comprenant tout le segment où existe l'appareil branchial; l'autre postérieure, plus petite, où la cavité branchiale ne contient que le tube digestif, les organes génitaux, les vaisseaux, etc.

Dans la région antérieure, le nerf viscéral ascendant se distribue au moins

[1] Cfr. surtout Fusari, *loc. cit.*, pp. 130 et 133; Hatschek, *loc. cit.*, p. 144; Van Wijhe, *loc. cit.*, p. 167.

en majeure partie aux branchies, et cela en prenant la voie du ligament dentelé (pl. VIII, fig. 26, 27, *NB*; pl. V, fig. 30, *NB*).

En effet, chez l'Amphioxus coloré au bleu de méthylène et incisé sur la ligne médiane dorsale, on voit que les grosses ramifications du nerf viscéral ascendant arrivent jusqu'au niveau du ligament dentelé, puis se distribuent aux arcs branchiaux; sur les préparations dont l'appareil branchial a été enlevé, les extrémités brisées de ces branches nerveuses forment sur la surface interne des myotomes une ligne presque régulière qui converge vers la ligne médiane en avant, au point d'atteindre le bord inférieur du 11e myotome environ. Sur les coupes d'Amphioxus traitées au Golgi, on voit ces mêmes branches s'infléchir au niveau du ligament dentelé et se ramifier, ainsi que l'a décrit déjà Van Wijhe, sur les branchies vers le haut et vers le bas, en passant d'une branchie à l'autre au niveau des travées. En outre, les fibres descendantes des branchies se réunissent sur la ligne médiane ventrale, sur la surface ventrale de la gouttière hypobranchiale, où elles forment un riche plexus ou réseau nerveux (fig. 30, *RBV*). Nous n'avons jamais rencontré de fibrilles nerveuses dans la partie profonde interne de la branchie [1].

A l'intérieur du ligament dentelé, les branches nerveuses du nerf viscéral forment un plexus (pl. VIII, fig. 26, 27 et pl. V, fig. 30, ainsi que fig. 2, pl. VII de Fusari) qui, vu de profil ou en coupe transversale, peut simuler un nerf longitudinal s'étendant le long du ligament dentelé.

Parmi les nombreux exemplaires d'Amphioxus entiers colorés au bleu de méthylène que nous avons examinés spécialement à ce point de vue, il n'y en a que deux chez lesquels parût exister un véritable tronc nerveux le long du ligament large, et cela sur une partie de son trajet seulement. Sur les coupes longitudinales d'Amphioxus traités au Golgi, nous n'avons jamais pu découvrir un tronc continu quelque peu uniforme. Nous sommes ainsi amenés à nier l'existence du nerf branchio-intestinal ou vague de Van Wijhe.

[1] Signalons ici, en passant, que le mouvement ciliaire des deux surfaces de branchie qui se regardent se fait en sens inverse l'un de l'autre; sur la face postérieure de la branchie, les particules solides, mues par le mouvement ciliaire, descendent, tandis qu'elles remontent sur la face antérieure de la branchie suivante.

Existerait-il même, il serait formé indistinctement par les branches différentes de tous les nerfs viscéraux ascendants tout le long du ligament dentelé [1].

Outre les rameaux du nerf viscéral ascendant qui se rend directement aux branchies par le ligament dentelé, nous avons vu parfois le nerf viscéral ascendant donner une grosse branche qui se continue au delà du ligament dentelé sur la surface interne du myotome et ne se ramifie qu'au voisinage immédiat de la corde dorsale (pl. VIII, fig. 26, *NVAD*).

De même, les nerfs viscéraux ascendants, qui se trouvent en arrière des branchies, remontent assez haut sur les myotomes, puis se divisent; nous n'avons pu encore jusqu'ici préciser leur terminaison proprement dite. Nous croyons que les branches s'infléchissent au niveau de la corde dorsale et viennent innerver les vaisseaux et le tube digestif. La branche du nerf viscéral ascendant qui s'étend au delà du ligament dentelé, nous paraît avoir une destination analogue. D'autre part, le nerf viscéral ascendant innerve peut-être la séreuse pariétale de la cavité branchiale; à différents endroits, il nous a paru qu'en dessous de cet endothélium séreux se trouvaient, en effet, de minces fibrilles nerveuses.

En arrière du pore abdominal, les préparations au Golgi montrent assez fréquemment à la surface pariétale et viscérale de la muqueuse des fibres qu'on doit considérer, d'après leur aspect général, comme de nature nerveuse. Leur origine et leur trajet nous ont échappé jusqu'ici : proviennent-elles de nerfs viscéraux abdominaux (Hatschek); ou bien les nerfs thoraciques forment-ils des nerfs longitudinaux s'engageant dans la cavité abdominale? Cette dernière hypothèse nous semble encore la plus probable.

Dans ces mêmes préparations au Golgi, on voit souvent à la surface du tube intestinal des fibres nerveuses ramifiées; l'innervation de l'intestin nous paraît hors de doute, sans que nous puissions toutefois la préciser. Ensuite la paroi des vaisseaux intestinaux contient, imprégnés en noir, des éléments fusiformes avec renflement brusque vers le milieu (noyau?),

[1] Comme l'a reconnu depuis Van Wijhe, *Over de herzenzenuwen der Cranioten bij Amphioxus* (Verslagen der koninkl. Akademie te Amsterdam, deel III, 1895, blz. 114).
(Note ajoutée pendant l'impression.)

embrassant la moitié, jusqu'aux trois quarts de la circonférence, distants les uns des autres; nous croyons que ce sont là les fibres musculaires lisses circulaires des vaisseaux; le long de ces fibres lisses, nous avons vu parfois apparaître des fibrilles d'aspect nerveux, de sorte que l'appareil circulatoire de l'Amphioxus serait innervé.

D'après l'examen sur le vivant d'Amphioxus injectés au bleu de méthylène, l'anus (muscle sphincter et muqueuse) est innervé par des branches du 14e (surtout), 15e et 16e nerf dorsal gauche (à compter de l'extrémité caudale); du côté droit, le 13e nerf dorsal nous a paru donner un rameau analogue. En effet, en face de l'anus et au bord inférieur du muscle se détache une branche qu'on ne retrouve pas dans la nageoire.

Structure des nerfs dorsaux. — Si l'on fait abstraction de l'origine des fibres nerveuses motrices et sensibles que contiennent ces nerfs mixtes, on est encore loin d'être d'accord sur la structure réelle de ces racines et surtout sur le point de savoir s'il existe des cellules ganglionnaires spinales sur leur trajet. La plupart des auteurs qui les ont étudiées sont portés à admettre leur existence. Parmi eux, on peut citer Stieda, Rohde, Hatschek, admettant l'existence de cellules ganglionnaires sur le parcours de ces nerfs. D'après Rohde, il existe plusieurs noyaux au niveau de la sortie du nerf de la moelle épinière; ils sont surtout nombreux à la base des nerfs de la région postérieure du corps et ils correspondent aux ganglions spinaux des animaux supérieurs.

Hatschek décrit des éléments analogues au point où le nerf se bifurque en rameau dorsal et en rameau ventral.

Balfour nie l'existence de ganglions spinaux et Retzius, comme nous l'avons déjà dit, signale à l'intérieur du névraxe la présence de cellules à deux prolongements, qu'il considère comme analogues aux cellules ganglionnaires spinales.

L'étude embryologique des racines dorsales prouve que sur leur trajet, il n'existe aucun indice de l'existence d'éléments ganglionnaires analogues aux ganglions spinaux. En aucun point des travées ou des cordons cellulaires qui constituent l'ébauche des nerfs dorsaux, on ne trouve ni épaississement

ni cellules particulières, comparables à l'ébauche de ganglions spinaux. L'étude microscopique des nerfs entièrement développés nous conduit au même résultat. Sur des coupes longitudinales, aussi bien que sur les sections transversales de la moelle épinière, on observe que l'enveloppe du névraxe est interrompue au niveau de la sortie des nerfs dorsaux. Toutes ses parties constituantes se prolongent sur le tronc nerveux et lui forment une gaine.

A l'intérieur de la racine des nerfs dorsaux, on trouve :

1° Des fibres nerveuses;

2° Des noyaux cellulaires;

3° Une charpente.

I. *Les fibres nerveuses* sont relativement minces, pâles, amédullaires et présentent un trajet légèrement sinueux. Tandis que les fibres ventrales imprégnées au chromate d'argent ou colorées par le bleu de méthylène présentent des renflements notables, les fibres dorsales de ces mêmes préparations ne présentent rien de pareil; elles sont parfaitement cylindriques et uniformes, de sorte que les noyaux cellulaires renfermés incontestablement dans la racine dorsale ne se colorent pas même.

II. *Les noyaux cellulaires* du nerf dorsal se présentent sous forme de corpuscules fusiformes, allongés ou irréguliers, très chromatiques. La nucléine s'est condensée sous forme d'un amas compact, dans lequel on distingue encore des granulations plus compactes, très safraninophiles. Au point de vue de leur forme et de leur structure, ces éléments présentent un aspect identique aux noyaux des cellules épendymaires et névrogliques, dont il sera question plus loin. Jamais on ne peut déceler autour de ces noyaux une trace de cytoplasme. Au point de vue de leur aspect, de leur forme et de leur structure, ils n'ont donc rien de commun avec des cellules ganglionnaires.

Quant à leur origine, un grand nombre de ces corpuscules se développent aux dépens des cellules, constituant l'ébauche des racines dorsales. On les aperçoit à l'intérieur du tronc nerveux, au moment où le cordon primitivement cellulaire se transforme en un faisceau fibrillaire, strié dans le sens de la longueur. A ce stade du développement, on trouve souvent à l'endroit où le nerf dorsal se détache du névraxe et à la périphérie de ce dernier,

quelques noyaux d'un aspect analogue à ceux qui entourent immédiatement le canal central (cellules épendymaires) et à d'autres noyaux de névroglie situés à l'intérieur de la substance blanche. Tous ces noyaux proviennent des cellules qui entourent primitivement le canal central. Parmi celles-ci, les unes, immédiatement en contact avec la lumière du canal, se transforment en noyaux petits, ovalaires ou allongés, très chromatiques, entourés d'une bordure de protoplasme à peu près imperceptible, très mince, dont se détachent les fibrilles de la charpente névroglique. Quelques rares cellules plus périphériques, des spongioblastes, se comportent de la même manière. Il en est de même pour les cellules qu'on trouve à la base des troncs nerveux dorsaux.

Une seconde catégorie de cellules, la plupart de celles situées en dehors de l'épithélium épendymaire, augmentent en volume, restent plus ou moins arrondies et renferment un noyau plus volumineux, moins chromatique, entouré d'une couche de protoplasme relativement épaisse, dont se détachent plus tard des ramifications. Ce sont les cellules nerveuses véritables, les neuroblastes de His.

On le voit donc, au point de vue de leur aspect, de leur structure et de leur origine, les noyaux des racines dorsales se comportent comme des éléments de nature névroglique et n'ont rien de commun avec des cellules ganglionnaires.

Conformément aux données de Rohde et de Hatschek, ces noyaux sont surtout nombreux au niveau de la base du tronc nerveux et parfois même, d'après nous, à l'intérieur de la substance blanche voisine. Dans la figure 47, planche XI, et figure 32, planche III, on voit plusieurs noyaux situés à l'intérieur de cette dernière. Nous n'entrevoyons aucun motif pour considérer les noyaux propres au tronc nerveux comme étant d'une nature autre que ceux situés parfois à l'intérieur de la substance blanche avoisinante.

Il nous serait difficile de dire si tous les noyaux propres aux ramifications périphériques des nerfs dorsaux sont de même nature. Il est probable que plusieurs sont de nature conjonctive, mésodermique et interviennent secondairement dans la confection du nerf. Cette question de l'histogenèse des parties constituantes des nerfs est beaucoup plus difficile à étudier chez

l'Amphioxus que chez les autres vertébrés. Nous préférons donc ne pas nous étendre sur cette question.

Enfin, si nous disons qu'il n'existe point de ganglions spinaux sur le trajet des racines nerveuses, nous ne nions point la présence de cellules nerveuses ganglionnaires sur le trajet de certaines ramifications terminales sous-cutanées. Les corpuscules nerveux de Quatrefages sur le trajet des deux premières paires dorsales sont formés, d'après Fusari, par une à quatre cellules nerveuses Nous n'avons point trouvé dans ces corpuscules de véritable cellule ganglionnaire. Par contre, on y observe des nodosités, des ramifications nerveuses, formées par des accumulations de noyaux, relativement volumineux, dont il nous serait difficile de préciser la nature, n'ayant pas réussi à les imprégner séparément par la méthode de Golgi ou par celle d'Ehrlich.

III. *La charpente.* — Sur des coupes longitudinales et sur des coupes transversales, on voit, à côté des fibres nerveuses pâles, des stries et des filaments s'épanouissant à l'intérieur de la moelle épinière. Sur des préparations fixées par la liqueur de Hermann ou par la liqueur de Flemming et colorées par la safranine, bien réussies, ces filaments sont intensément colorés en rouge et se comportent absolument de la même manière que la charpente névroglique de la substance blanche; généralement, les faisceaux transversaux convergent et sont surtout accentués au milieu de la base de la racine dorsale. La plupart de ces filaments s'implantent sur l'enveloppe de la moelle au pourtour de la sortie du nerf dorsal. Plusieurs fibrilles, habituellement plus minces, s'engagent dans le tronc lui-même jusqu'à une certaine distance (fig. 32, pl. III). Il existe donc à l'intérieur des racines dorsales des filaments de neuroglie ainsi que des noyaux de même nature, en continuité avec ceux du névraxe.

TROISIÈME PARTIE.

SYSTÈME NERVEUX CENTRAL OU NÉVRAXE.

La composition et la structure du système nerveux central chez l'Amphioxus, comme chez les autres vertébrés et aussi chez les invertébrés, est excessivement complexe; les données fournies par les méthodes de fixation et de coloration habituelles doivent évidemment nous inspirer le plus de confiance et nous servir de base pour l'édification ultérieure de nos connaissances sur la texture de cet organe à l'aide des méthodes de coloration spéciales d'Ehrlich et de Golgi. L'étude des préparations fixées par les liqueurs osmiques ou autres et colorées à la safranine, l'hématoxyline, etc., doit aller de pair avec celle des préparations au Golgi et à l'Erhlich ou même la précéder. Les données d'observation recueillies par ces dernières méthodes acquièrent seulement de la certitude lorsqu'elles sont concordantes, ou du moins non discordantes avec les données des préparations de coloration habituelle.

Comme ces dernières données doivent, d'après nous, primer les premières, il est naturel de commencer l'étude si complexe du névraxe de l'Amphioxus par l'exposé des résultats obtenus au moyen des méthodes de fixation et de coloration habituelles.

MÉTHODES DE COLORATION ET DE FIXATION HABITUELLES.

Cellules nerveuses du névraxe. — Au point de vue de leur développement embryonnaire, aussi bien qu'au point de vue de leur structure, on peut classer les cellules nerveuses en trois catégories principales.

1. *Cellules ganglionnaires.* — Elles apparaissent chez des larves de quelques millimètres, aux dépens des cellules épithéliales primitives. Chez

des larves de 5 millimètres (fig. 41, pl. IX), elles sont entièrement développées et présentent leur aspect caractéristique. Elles siègent à la partie antérieure de la moelle épinière, immédiatement après la dilatation cérébrale, c'est-à-dire à partir de la seconde paire nerveuse dorsale. A ce stade de la vie embryonnaire, la fente épendymaire touche à la périphérie de la surface dorsale du névraxe et les cellules ganglionnaires occupent les parties latérales dorsales du système nerveux central. Elles sont surtout nombreuses au niveau de la partie dorsale, mais à mesure qu'on s'éloigne de la vésicule cérébrale, elles y deviennent plus rares, pour apparaître en plus petit nombre de chaque côté de la ligne médiane et plus ventralement. Enfin, plus postérieurement encore, vers la sixième paire nerveuse dorsale, elles siègent de chaque côté de la partie ventrale du canal central et même en dessous du canal épendymaire.

Si on examine la partie antérieure du névraxe d'un Amphioxus plus développé, ou d'un individu adulte, on constate des modifications très importantes dans la disposition des cellules ganglionnaires. Avant d'arriver à la 2e paire nerveuse dorsale, la fente épendymaire touche à la surface dorsale du névraxe, sur un court trajet (fossette rhomboïdale). Mais à partir du 2e nerf dorsal jusqu'au delà de la première paire ventrale, il existe entre le canal central et la surface dorsale de la moelle un amas de tissu nerveux riche en cellules ganglionnaires (fig. 42, pl. X). Un petit amas ganglionnaire analogue apparaît de nouveau avant d'arriver au 3e nerf dorsal, ainsi qu'entre le 3e et le 4e nerf dorsal. Ces deux amas sont relativement peu volumineux; on ne les poursuit que sur quatre ou cinq coupes. Le tout dernier amas n'est pas encore visible sur un Amphioxus de 25 millimètres. Dans toutes les autres régions du névraxe, à l'exception de la dilatation cérébrale, le canal ou la fente épendymaire arrive en contact avec la surface dorsale de la moelle épinière.

Chez l'Amphioxus adulte, on rencontre les cellules ganglionnaires jusqu'au niveau du 5e ou du 6e nerf dorsal dans les parties latérales du canal central et même du côté ventral de ce canal. Stieda décrit deux amas ganglionnaires dans la région cérébrale. Rohde signale trois amas de cellules nerveuses à la partie antérieure du névraxe : un premier entre la

2e et la 5e paire dorsale au-dessus du canal, un second à la partie ventrale du canal central entre la 4e et la 6e paire dorsale, et un troisième entre la 2e et la 3e paire dorsale latéralement par rapport au canal central. Ces amas ganglionnaires de Rohde correspondent évidemment aux cellules dont nous venons de parler. Mais il ne nous semble pas que ces éléments forment des amas distincts. Ils sont assurément plus nombreux à certains endroits qu'à d'autres, surtout là où ils siègent au-dessus du canal central, mais partout ailleurs ils existent et deviennent d'autant plus rares qu'on s'approche de la 6e paire nerveuse dorsale. A partir de cet endroit, on en rencontre encore, avec leur aspect caractéristique, chez des larves de 10, 15, 20 millimètres, mais plusieurs subissent des modifications importantes et on doit les classer dès lors parmi les cellules de la seconde catégorie dont il sera question plus loin.

Quant à leur structure, les cellules ganglionnaires présentent un aspect identique à celui propre aux ganglions spinaux d'autres vertébrés. Cet aspect est tellement caractéristique (fig. 42, pl. X), qu'on peut les reconnaître facilement à un faible grossissement. Leur forme est plus ou moins arrondie, ovalaire, parfois allongée. Elles sont entourées par une sorte de capsule, non continue, formée par un enchevêtrement de fibrilles névrogliques, sur le trajet desquelles on trouve de petits noyaux de neuroglie. Il existe un espace clair entre ce feutrage et la cellule ganglionnaire.

A un faible grossissement, le protoplasme des cellules ganglionnaires présente un aspect foncé, homogène, très compact. Mais, examinées à un grossissement convenable (fig. 38, pl. XI), on y trouve des granulations (de Nissl) entre lesquelles il existe une charpente filaire, formée de très fines fibrilles, serrées les unes contre les autres à un tel point que le protoplasme offre au premier abord un aspect homogène. Il nous serait très difficile de déterminer exactement le nombre de prolongements qui se détachent de ces éléments, le méthode de Golgi ne nous ayant pas réussi à les imprégner. Sur les préparations fixées par les méthodes habituelles, on peut en voir souvent un ou deux, de sorte qu'ils sont probablement bipolaires. L'une de ces deux ramifications se rend dans la racine du nerf dorsal (fig. 39, pl. IX).

Leur noyau est arrondi ou ovalaire et renferme un réticulum chromatique bien apparent.

Au point de vue de leur aspect et de leur structure, les cellules nerveuses en question présentent les particularités que W. Flemming reconnaît aux cellules nerveuses des ganglions spinaux. Pour l'historique de cette question, nous renvoyons au mémoire récent de cet auteur [1].

Au point de vue embryogénique, ces cellules occupent, à l'origine, les parties dorso-latérales de la fente épendymaire, c'est-à-dire l'endroit où apparaît, chez les Sélaciens, la première ébauche ganglionnaire paire. Chez l'Amphioxus, cette ébauche reste incluse dans le système nerveux central, elle ne prolifère point en dehors du névraxe et n'engendre donc point des ganglions spinaux isolés. A quelques endroits seulement, cités plus haut, elle se fusionne pour engendrer au niveau de la ligne médiane, au-dessus du canal central, l'ébauche ganglionnaire impaire, correspondant à la plaque dorsale cérébrale de von Kuppfer (fig. 42, pl. X).

Une objection se présente à cette manière de voir. Les masses ganglionnaires incluses dans le névraxe ne se rencontrent que sur un parcours très court, entre la 2e et la 6e ou 7e paire dorsale. Comment se fait-il que le reste de la moelle épinière soit dépourvu de ces éléments? Cette objection n'est pas fondée. On trouve des cellules ganglionnaires, en petit nombre il est vrai, le long de tout le système nerveux central et même dans la région postérieure. Parmi ces cellules, les unes, aussi volumineuses que celles de la région antérieure, se chargent de pigment; les autres, au contraire, restent plus petites et subissent un arrêt dans leur développement. Ceci ne présente rien d'extraordinaire, car on peut dire que toutes les parties constituantes du système nerveux central de l'Amphioxus se comportent généralement de la même manière : elles s'arrêtent dans leur développement. Autour de l'épithélium épendymaire, il existe chez l'adulte un grand nombre de petites cellules nerveuses, à peine distinctes des cellules épithéliales et présentant un aspect analogue à celles qu'on trouve chez des larves de 3 à

[1] W. Flemming, *Ueber den Bau der Spinalganglienzellen und Bemerkungen über den Bau der centralen Zellen* (Arch. f. mikr. Anat., Bd. XLVI, S. 379).

5 millimètres. Il en est de même pour plusieurs cellules ganglionnaires. D'ailleurs, Retzius a décrit de chaque côté de la ligne médiane, latéralement par rapport au canal central, des cellules bipolaires, envoyant un prolongement dans la racine dorsale. Il les considère comme des cellules ganglionnaires spinales.

Chez l'Amphioxus, le développement de l'ébauche ganglionnaire s'arrête donc au stade de l'ébauche paire primitive [1]. A trois endroits seulement, la fusion s'opère pour engendrer, au-dessus du canal central, l'ébauche impaire. A partir de cette phase, les cellules se développent sur place, au niveau de la plus grande partie du névraxe; elles ne parviennent pas même à un développement complet.

Enfin, indépendamment de la charpente filaire et des granulations spéciales propres au cytoplasme des cellules ganglionnaires, on peut rencontrer dans le corps cellulaire, au voisinage du noyau, la sphère attractive de Éd. Van Beneden avec toutes ses parties constituantes. La figure 40, planche IX, représente une cellule appartenant à la région postérieure de la moelle épinière d'un Amphioxus de 12 $^1/_2$ millimètres, fixé par la liqueur de Hermann et coloré par la safranine. Von Lenhossék [2] a découvert cette sphère dans les cellules nerveuses des ganglions spinaux de la Grenouille. Nous la retrouvons dans les cellules de même nature du névraxe de l'Amphioxus. Elle est formée par deux corpuscules centraux safraninophiles, chacun entouré d'une zone médullaire claire, siégeant au milieu d'une couche plus compacte, la zone corticale, dont la partie périphérique est formée par des stries radiaires en rapport avec la masse filaire du cytoplasme environnant. Jamais nous n'avons observé de figure mitosique à l'intérieur de cellules ganglionnaires entièrement développées, ni aucune trace de division directe. Nous trouvons donc ici un exemple de cellule

[1] Dans un travail paru longtemps après le dépôt de notre mémoire, Alfred Schaper est arrivé à des conclusions analogues. (*Die frühesten Differenzirungsvorgänge im Centralnervensystem* [Arch. f. Entwickel. d. Organ., Bd. V, Heft 1, S. 81].)

(Note ajoutée pendant l'impression.)

[2] Von Lenhossék, *Centrosom und Sphäre in den Spinalganglienzellen des Frosches* (Arch. f. mikr. Anat., Bd. XLVI, S. 345).

ne se multipliant plus à l'état normal et renfermant cependant, à l'intérieur du cytoplasme, une sphère attractive avec toutes ses parties constituantes, conformément aux données de Éd. Van Beneden.

2. *Cellules pigmentaires.* — Indépendamment de la tache pigmentaire de la partie antérieure du névraxe, considérée déjà par A. Retzius comme tache visuelle, on aperçoit, dans toute la région du névraxe, un grand nombre de cellules remplies en partie ou en totalité de granulations pigmentaires. Elles siègent de préférence ou bien en dessous, ou bien sur les parties latérales et ventrales du canal central. D'après G. Retzius, les cellules pigmentaires sont de nature différente. Plusieurs semblent être des cellules neurogliennes, d'autres sont des cellules nerveuses. Krause admet que ces cellules interviennent dans la vision, de sorte que l'Amphioxus verrait à l'aide des corpuscules pigmentaires de tout le cordon neural.

Nous ne nous aventurerons pas à indiquer la fonction de ces parties constituantes de la moelle centrale. Tout au plus voulons-nous donner des détails précis sur leur origine. A ce point de vue, nos préparations sont démonstratives. Chez des larves de 5 millimètres de longueur, on trouve toutes les phases de formation de ces éléments, aux dépens de cellules de la première catégorie, c'est-à-dire ganglionnaires. Les granulations pigmentaires, au début formées par une substance analogue à la graisse (car elle se dissout en partie dans l'essence de térébenthine), apparaissent à la portion périphérique (fig. 45, pl. IX) du corps cellulaire la plus éloignée du noyau. Graduellement, toute la partie périphérique et les parties centrales sont chargées de grains de même nature, de sorte que, finalement, le noyau lui-même est complètement caché. Parfois les prolongements de ces cellules bipolaires sont envahis à leur base par la matière noirâtre (fig. 46, pl. XI).

Aussi longtemps qu'une portion du cytoplasme reste libre de granulations, elle possède l'aspect caractéristique foncé, compact, propre aux cellules ganglionnaires (fig. 45, pl. IX).

A côté des corpuscules pigmentaires engendrés par les cellules ganglionnaires, on rencontre, surtout chez l'Amphioxus adulte, de petits amas de granulations pigmentaires autour d'un ou de plusieurs noyaux de nature

neuroglique, entourant le canal central. De sorte qu'on doit admettre avec Retzius que les cellules pigmentaires ont une double origine. Elles se forment aux dépens des cellules ganglionnaires et aux dépens des cellules de la neuroglie.

3. *Cellules nerveuses à structure fibrillaire ou cellules nerveuses centrales proprement dites.* — Nous disons cellules nerveuses à structure fibrillaire, parce que cette particularité est caractéristique pour toute cette catégorie d'éléments et permet de les distinguer facilement des cellules ganglionnaires dont la structure fibrillaire est souvent masquée à un examen superficiel. La désignation de cellules nerveuses centrales proprement dites est en rapport avec leur signification embryologique et physiologique. Elles correspondent, en effet, aux cellules que l'on rencontre dans le système nerveux des autres vertébrés, où il existe des ganglions spinaux nettement différenciés.

Parmi ces éléments, on doit distinguer :

A. Les *cellules colossales* des auteurs, dont Rohde a décrit la distribution à l'intérieur du névraxe. Elles présentent une structure analogue à celle que Flemming [1] a récemment décrite pour les cellules nerveuses centrales des vertébrés. Dans le voisinage et au pourtour du noyau, on trouve une couche de protoplasme interne (endoplasme), riche en granulations et en amas irréguliers (Nissl) (fig. 33, pl. XI; fig. 34, pl. X). Ceux-ci affectent parfois un aspect spécial; ils sont formés par une couche corticale compacte et une masse centrale beaucoup plus claire, renfermant un ou plusieurs grains plus petits. D'autres fois ils sont compacts et homogènes dans toute leur étendue. Leur forme varie beaucoup : tantôt ils sont arrondis, irréguliers ou anguleux; tantôt ce sont des bâtonnets allongés, recourbés, sinueux ou en demi-lune. Entre ces grains de volume très variable, on aperçoit une charpente filaire enchevêtrée, en continuité avec des fibrilles plus régulières et plus épaisses, propre à la zone cytoplasmique externe (exoplasme). Les différentes ramifications de ces cellules multipolaires (fig. 43, pl. X)

[1] W. Flemming, *Ueber die Structur der centralen Nervenzellen bei Wirbelthieren* (Anat. Hefte, Bd. VI, H. 3, S. 563, Taf. XXV).

offrent également une structure fibrillaire. Le strié de ces prolongements est continu avec celui de la couche périphérique du corps cellulaire.

Ces cellules siègent, conformément aux données de Rohde, vers la réunion du tiers moyen et du tiers dorsal du canal central. Leurs prolongements se dirigent de chaque côté dans la substance blanche, et l'une de ces ramifications passe en dessous du canal central pour entrer dans la substance blanche de l'autre moitié de la moelle. Chez des larves de 5 $^1/_2$ millimètres, nous avons observé plusieurs cellules dorsales dont un prolongement pénètre directement dans la racine dorsale voisine (fig. 34, pl. X).

Au point de vue de leur aspect et de leur structure, ces éléments ressemblent beaucoup aux grandes cellules multipolaires des cornes antérieures de la moelle épinière. Ce motif nous porte à croire qu'ils sont aussi de nature motrice et que les fibres motrices des nerfs dorsaux de l'Amphioxus leur doivent, en partie du moins, leur origine.

B. Les *cellules de moyenne grandeur*, aussi multipolaires, présentent la même texture que les précédentes (fig. 35, pl. X). Elles n'en diffèrent que par la grandeur. Elles sont probablement aussi de nature motrice, car chez une larve de 5 $^1/_2$ millimètres, nous avons observé un des prolongements cellulaires pénétrant à l'intérieur de la racine ventrale, à travers une ouverture de la membrane limitante du névraxe.

C. Les *petites cellules nerveuses*, très nombreuses dans toutes les régions du système nerveux central, possèdent un noyau entouré d'une mince couche de protoplasme; celui-ci renferme quelques granulations entre lesquelles on trouve une charpente filaire, qui se continue avec les fibrilles très ténues des prolongements cellulaires. Plusieurs de ces éléments sont manifestement multipolaires, d'autres sont bipolaires. A côté de ces cellules, on en trouve d'autres offrant un aspect un peu différent, en ce sens que la moitié du corps cellulaire dont se détache le prolongement possède une structure identique, tandis que l'autre moitié est devenue hyaline (fig. 37, pl. XI), très claire et à peu près homogène, ne renfermant plus que de rares fibrilles et de rares granulations. Plusieurs de ces éléments paraissent être unipolaires. Ils forment la transition vers une quatrième variété.

D. Les *cellules nerveuses claires ou hyalines*. Elles existent en grand

nombre chez l'Amphioxus adulte autour de l'épithélium épendymaire du canal central et s'engagent plus ou moins entre les prolongements périphériques de ces cellules épithéliales. Ce sont des cellules arrondies, ovalaires, d'un aspect clair, hyalin (fig. 47, pl. XI, *c.*). La plus grande masse du cytoplasme est formée par un liquide homogène et par quelques rares fibrilles pâles qui se continuent dans un prolongement épais également pâle, dirigé du côté de la substance blanche voisine. Ce sont probablement des cellules unipolaires. On pourrait les confondre avec les cellules de la neuroglie, mais elles s'en distinguent d'abord par leur cytoplasme clair et relativement volumineux, ensuite par leur noyau arrondi et beaucoup plus pauvre en chromatine. Ce sont des cellules nerveuses très petites, ayant gardé leur caractère embryonnaire.

LA NEUROGLIE.

Le tissu de soutènement du système nerveux central de l'Amphioxus a été décrit et figuré par Rohde. Des cellules épithéliales coniques, entourant le canal central, partent des fibres indivises et ramifiées à direction transversale, qui atteignent l'enveloppe conjonctive du névraxe (fig. 42, pl. X). La partie basale du corps cellulaire est souvent transformée en tissu de charpente; il persiste seulement un noyau entouré d'un reste de cytoplasme ou bien un noyau sans protoplasme, dont se détachent des fibres allant dans diverses directions. En dehors de la couche épithéliale, les noyaux de la charpente font absolument défaut d'après Retzius et il n'existe point d'autre tissu de soutènement que ces fibres de charpente (Stützfasern).

Grâce à la fixation par la liqueur de Flemming ou par la liqueur de Hermann et la coloration par la safranine, nous sommes parvenus à voir d'une manière très nette le tissu de soutènement du système nerveux central et nous sommes donc en état d'en donner une description plus précise. Nous avons pu le différencier très facilement des fibres nerveuses qui, d'après Rohde, Basilius Lwoff[1] et J.-B. Platt[2], se comportent de la même manière

[1] B. Lwoff, *Zeitschr. f. wissenschaftl. Zoologie*, Bd. LVI, 1893.
[2] J.-B. Platt, *Anat. Anz.*, 1892, Nrn. 9 und 10, S. 282.

vis-à-vis des matières colorantes que les travées de la charpente. J.-B. Platt confond même des travées ventrales, qui, d'après elle, pénètrent dans la corde dorsale avec des fibres nerveuses et elle émet l'hypothèse que chez l'Amphioxus, il existerait, à côté des nerfs dorsaux et ventraux, une troisième série de racines pénétrant à l'intérieur de la corde dorsale. Ce dernier fait a été réfuté par Lwoff et von Ebner [1].

Dans la figure 40, planche IX, et la figure 47, planche XI, est représenté le système de fibres transversales décrites par Rohde sous le nom de fibres de charpente (Stützfasern). Elles se détachent ordinairement d'un certain nombre de noyaux entourant le canal épendymaire et se dirigent en convergeant vers la périphérie de la moelle; mais avant d'atteindre cette limite, elles divergent pour se terminer, conformément aux données de von Ebner, par une partie renflée conique, dont la base est intimement appliquée sur l'enveloppe du névraxe (fig. 49, pl. X). Ces faisceaux de fibres se comportent d'une manière toute spéciale là où elles rencontrent une fibre colossale du névraxe. A cet endroit, elles convergent et forment une travée épaisse de filaments serrés, qui contournent les parties latérales de la fibre nerveuse, de manière à lui former une gaine incomplète (fig. 47, pl. XI). Quelques-uns de ces filaments se recourbent autour de l'une des faces en formant une demi-gouttière, puis ils se réunissent et continuent leur trajet en divergeant. Ces deux demi-gouttières forment donc une gouttière complète entourant la fibre nerveuse. Sur des coupes longitudinales, on trouve de distance en distance un grand nombre de ces anneaux de neuroglie autour de la même fibre nerveuse. Dans la figure 47, on voit au point (*d*) une demi-gouttière entourant la fibre nerveuse et détachée par la coupe des filaments qui lui ont donné naissance. On aperçoit souvent un faisceau détaché par la coupe de sa gouttière. L'une moitié de la gouttière se trouve sur la coupe précédente, l'autre sur la coupe suivante. Le même faisceau de filaments peut embrasser plusieurs fibres nerveuses voisines.

A côté des faisceaux transversaux, il existe sur toute l'étendue de la

[1] G. von Ebner, *Sitzungsber. der kais. Akad. Wien*, 1895.

substance blanche, et même dans la substance grise, un système de fibrilles excessivement nombreuses, à direction longitudinale ou oblique (fig. 47, pl. XI). Ces fibrilles se colorent de la même manière que les précédentes. Elles ont un trajet irrégulier, sinueux et s'anastomosent rarement entre elles. Elles s'enchevêtrent pour former un réseau dans les mailles duquel siègent les fibres nerveuses elles-mêmes (fig. 48, pl. XI).

Dans le voisinage des nerfs ventraux, les faisceaux transversaux sont très rares. On trouve pourtant, au sein de la substance blanche avoisinant la racine ventrale, un faisceau large de fibres neurogliques épaisses, longitudinales. Sur les coupes transversales (fig. 45, pl. IX), on les aperçoit en section transversale, et sur les coupes longitudinales on les voit sous forme de faisceau de filaments parallèles les uns aux autres, sur une grande étendue de la moelle épinière.

Rohde (*loc. cit.*), Lwoff (*loc. cit.*), Joseph [1], von Ebner (*loc. cit.*) et d'autres décrivent des systèmes de fibres épendymaires, groupées de manière à former des faisceaux transversaux latéraux (horizontaux de Lwoff) et ventraux, subdivisant la substance blanche en territoires. Sous ce rapport, on ne peut formuler aucune règle générale; la disposition de ces groupes de fibres épendymaires varie beaucoup. Fréquemment on rencontre deux travées ventrales, une droite et une gauche; plus rarement, une travée ventrale médiane impaire (Joseph). Souvent on voit deux ou trois travées horizontales dans les parties latérales de la substance blanche. A la base des racines dorsales, il existe parfois des fibres épendymaires qui convergent pour s'insérer sur l'enveloppe de la moelle, voisine du pourtour de ces racines, et pour envoyer quelques filaments à l'intérieur du tronc nerveux lui-même.

Les noyaux du tissu de soutènement sont surtout abondants au pourtour du canal central et de la fente. Ce canal central est très variable au point de vue de son calibre. D'une manière générale, on peut dire que dans la plus grande étendue de la moelle épinière, il se présente, sur la section transversale, sous forme de fente très mince atteignant la périphérie dorsale

[1] Joseph, *Zeitschr. f. wissenschaftl. Zoologie*, 1895.

du névraxe (fig. 40, pl. IX) et aboutissant ventralement à une légère dilatation, le canal proprement dit, qui est séparé de la surface ventrale du névraxe par une couche épaisse de substance blanche représentant environ le quart de l'épaisseur du système nerveux central. Autour de ce canal et de la fente existe une rangée de noyaux très petits, fusiformes ou irréguliers, se colorant plus intensément que les noyaux des cellules nerveuses. Chez des larves de 5 $^1/_2$ millimètres, ils sont déjà bien différenciés (fig. 34, pl. X); ils sont entourés d'une très mince bordure de cytoplasme, à peine perceptible autour de quelques-uns. De ce corps cellulaire se détachent un ou plusieurs filaments épendymaires en continuité avec les fibres neurogliques déjà décrites. Entre ces cellules épithéliales, on peut rencontrer de distance en distance une véritable cellule nerveuse.

En dehors de la couche épithéliale, sans qu'il y ait interposition d'une membrane, suivent une ou deux rangées de cellules nerveuses correspondant à la substance grise proprement dite de la moelle épinière. Au sein de cette substance grise et à l'intérieur de la substance blanche, surtout à la base des racines dorsales, on rencontre des noyaux analogues à ceux qui entourent la fente épendymaire. Ces noyaux ont échappé à l'observation de Rohde. Ils sont plus rares encore dans la substance blanche de l'Amphioxus adulte que chez les Amphioxus de 10 à 25 millimètres. Ils siègent de préférence le long des travées de fibres épendymaires latérales et surtout ventrales. On voit parfois sur l'un des deux faisceaux ventraux, un, deux ou plusieurs noyaux. B. Lwoff avait déjà signalé la présence de noyaux le long des travées ventrales (ventrale Stützfasern).

En ce qui concerne la topographie, la forme et la structure des fibres nerveuses du névraxe, Rohde a pour ainsi dire décrit tout ce que les préparations de fixation et de coloration habituelles permettent d'observer; les préparations au Golgi comme celles au bleu de méthylène complètent, en un grand nombre de points, les observations de cet auteur.

En ce qui concerne le mode de terminaison des fibres radiculaires dorsales, les préparations de fixation et de coloration permettent seulement de dire que ces fibres, arrivées dans le névraxe, se dirigent en avant, en arrière, transversalement, et que quelques-unes d'entre elles se mettent en rapport avec des cellules nerveuses péri-épendymaires.

Pour la raison indiquée plus loin, nous avons étudié avec un soin particulier sur ces mêmes préparations le mode de terminaison des fibres radiculaires ventrales dans le névraxe. Sur toutes nos préparations, on voit une ou plusieurs fibres traverser un pore (fig. 44, pl. IX) ou une ouverture de la membrane enveloppante du névraxe. Celle-ci ne se continue donc point sur le tronc nerveux pour lui former une gaine analogue à celle des nerfs dorsaux. Mais elle est trouée et laisse passer les fibres nerveuses à travers un grand nombre d'ouvertures. J.-V. Rohon [1] a démontré ce fait. En examinant toutefois attentivement chacune de ces ouvertures, on trouve que la membrane enveloppante se prolonge sur le pourtour de la fibre nerveuse (fig. 47, pl. XI, *rv*). Nous avons pu nous convaincre de cette particularité sur un Amphioxus de 16 millimètres où la membrane limitante de la moelle épinière est colorée en rouge. Au niveau de chaque pore, on voit une cloison rouge se détacher de la gaine pour entourer l'origine de la fibre motrice. A partir de cet endroit, les fibres nerveuses disparaissent d'après Retzius dans un « länglichen niedrigen Hügel », dont l'aspect granuleux dépend probablement de l'entrelacement des fibrilles. Ceci ne nous paraît pas exact. Après avoir traversé la membrane limitante, toutes se dirigent d'abord transversalement par rapport à l'axe de la moelle. Ce trajet transversal est très court et l'arrêt est marqué par une cloison mince à double contour séparant l'ensemble des fibres de la substance blanche voisine. Conformément aux résultats obtenus par Rohde, cette fine cloison est une dépendance de la paroi enveloppante de la moelle ; elle se détache de la partie la plus interne de cette gaine. Rohde admet que les fibres s'insèrent sur cette membrane. Nous ne le croyons pas, car souvent elles se terminent à cet endroit par un crochet dont l'extrémité est dirigée en bas ou en haut et qui correspond à la coupe de la fibre dont le trajet devient probablement longitudinal. De plus, ayant observé chez une larve de 5 $^1/_2$ millimètres un prolongement de cellule nerveuse traversant l'enveloppe du névraxe à l'endroit d'origine d'une racine ventrale, nous sommes porté à croire qu'au moins une partie de ces fibres motrices sont en continuité avec le prolonge-

[1] Rohon, *Untersuchungen über Amphioxus lanceolatus* (Denkschr. der kais. Akad. der Wissensch. in Wien, Mathemat.-Naturw. Cl., Bd. XLV, 1882).

ment d'une cellule nerveuse centrale. Il est probable qu'à l'origine ces cellules sont parfois peu distantes de la base de la racine ventrale dans laquelle elles pénètrent. Plus tard, à la suite de l'accroissement des différentes parties constituantes de la moelle, ces rapports peuvent changer. Les fibres motrices acquièrent un trajet longitudinal et peut-être flexueux et irrégulier, de sorte que chez l'adulte il devient beaucoup plus difficile de poursuivre ces fibres dans tout leur parcours.

Chez les Amphioxus de 10 à 25 millimètres, on n'aperçoit jamais la fine membrane à double contour signalée par Rohde [1]. Dans la figure 47, planche XI, empruntée à une larve de 16 millimètres, elle n'existe point; elle est constante chez les adultes.

MÉTHODE DE GOLGI.

Après injection de bleu de méthylène ou après séjour dans l'eau de mer saturée de bleu de méthylène, le système nerveux périphérique de l'Amphioxus était parfaitement coloré; la fixation ultérieure de la matière colorante par le molybdate, par le picrate ou par le sublimé nous a donné des préparations durables qui se conservent, les unes depuis deux ans, les autres depuis un an. Le système nerveux central ne s'imprègne pas chez les Amphioxus ainsi traités, fait que signale déjà Retzius; il se colore, par contre, après application directe de la solution colorante (Retzius). Nous n'avons pas essayé cette méthode de coloration, espérant que quelques-uns des nombreux exemplaires injectés au bleu de méthylène et fixés ensuite auraient présenté une imprégnation du névraxe. Cela n'a pas été le cas. Mais parmi les nombreux exemplaires d'Amphioxus (plus de deux cents) que nous avons traités au Golgi, la plupart présentent une imprégnation plus ou moins complète des éléments du névraxe par le chromate d'argent. Les données observées sur ces préparations constituent le pendant des données observées au bleu de méthylène par Retzius.

Comme nous le disions plus haut, les méthodes de fixation habituelles

[1] Rohde, *Zoologische Beiträge* von Schneider, Bd. III, S. 161.

démontrent que les fibres radiculaires dorsales dans le névraxe se dirigent en avant, en arrière et transversalement; les préparations au Golgi (photogrammes 53, 54, 55, pl. XII) comme celles au bleu de méthylène confirment cette disposition, mais en outre elles révèlent de nouveaux détails. Et d'abord, ce n'est pas un simple partage qui se fait entre les fibres radiculaires dorsales au moment de leur entrée dans le névraxe; celles-ci se divisent (photogrammes 56, 57, pl. XII), soit déjà dans le segment de la racine qui est voisin du névraxe, soit au niveau de leur entrée.

Assez souvent, elles se dichotomisent simplement et une branche s'infléchit en avant, l'autre en arrière; d'autres fois on observe, et c'est peut-être toujours le cas en réalité, que les fibres radiculaires dorsales se ramifient en un plus grand nombre de branches, dont les unes se dirigent en avant, les autres en arrière, les autres transversalement, les autres obliquement et en bas. Les ramifications obliques et ventrales de la fibre dorsale viennent se terminer au niveau inféro-externe en une ramification arborescente (fig. 58, 66, 67, pl. XIII). Cette division de la fibre radiculaire dorsale est un fait indiscutable d'observation.

Il nous paraît tout aussi certain qu'une de ces ramifications de la fibre

Fig. 63.

radiculaire se continue dans une des cellules nerveuses situées le long de la fente supérieure du canal épendymaire (fig. 63).

Quelques-unes de ces ramifications transversales se continuent avec les cellules nerveuses situées à la même hauteur. Dans la région antérieure du névraxe, il nous a semblé que ce sont les ramifications antérieures seules de la fibre radiculaire qui, en s'incurvant en dedans et peut-être après nouvelle division, viennent s'anastomoser avec les cellules nerveuses, et cela jusque tout près de la racine dorsale plus antérieure. Dans la région postérieure du névraxe, ce sont les ramifications postérieures de la fibre radiculaire dorsale qui paraissent surtout se mettre en rapport avec les cellules nerveuses en question. Du reste, le nombre des ramifications radiculaires qui se dirigent en avant est plus considérable dans la moitié antérieure du névraxe et les fibres postérieures de chaque racine dorsale deviennent de plus en plus nombreuses vers l'extrémité caudale.

Nous croyons que, d'une manière générale, chaque fibre radiculaire dorsale se divise lors de son entrée dans le névraxe, que l'une des branches de division se rend directement à une cellule nerveuse, que les autres branches de division se dirigent en bas, en haut, en avant, en arrière et transversalement, pour se mettre ainsi en rapport avec d'autres fibres longitudinales et commissurales. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Sur tous les exemplaires d'Amphioxus, dans toutes les coupes transversales, horizontales ou sagittales, nous avons pu reconnaître à des degrés divers la distribution des fibres radiculaires dorsales que nous venons d'indiquer; quasi constamment, un certain nombre de ces fibres et de leurs ramifications étaient parfaitement imprégnées et pouvaient dès lors être aisément poursuivies à l'intérieur du névraxe.

De même, on voit dans presque toutes les préparations, les fibres motrices convergentes pénétrer dans la gaine conjonctive du névraxe et arriver jusqu'à la périphérie du névraxe. Dans la plupart des coupes, un certain nombre de fibres radiculaires ventrales sont complètement imprégnées et se voient donc de la manière la plus manifeste jusqu'au point de pénétration dans le névraxe : au delà, c'est-à-dire plus profondément dans le névraxe, on n'observe jamais les mêmes grosses fibres, ni transversalement, ni en avant, ni en arrière (photogramme 58, pl. XIII).

Les fibres radiculaires ventrales ne se continuent pas comme telles, ni sous forme de branches analogues, à l'intérieur du névraxe; les caractères morphologiques présentés jusque-là par ces fibres disparaissent dès qu'elles ont atteint la périphérie du système nerveux central. A ce point de vue, les préparations de coloration habituelles, celles au bleu de méthylène (Retzius) et celles au chromate d'argent sont concordantes.

De quelle manière ces fibres motrices radiculaires établissent-elles leurs connexions anatomiques et fonctionnelles avec le névraxe et avec la substance grise de ce dernier?

Pas plus que la méthode d'Ehrlich entre les mains de Retzius, la méthode de Golgi ne nous a permis de trancher cette question d'une manière satisfaisante.

Dans un certain nombre de préparations, nous observons également au niveau de pénétration des fibres ventrales une « éminence allongée », qui non seulement est « granulée en coupe optique », mais qui l'est en réalité; nous la considérons comme une production artificielle résultant de la rétraction du névraxe et de l'expression d'une masse liquide granuleuse qui sépare alors les fibres radiculaires des fibres longitudinales du névraxe (comme le représente Retzius, fig. H, Taf. XII, fig. 3 et 4). Dans les préparations à aspect plus normal, cette éminence granuleuse n'existe pas; les fibres du névraxe se trouvent immédiatement sous la membrane limitante interne de la gaine conjonctive et les grosses fibres motrices radiculaires arrivent jusqu'au niveau de ces fibres. Sans que nous puissions le démontrer d'une manière péremptoire, il nous paraît hors de doute que chaque grosse fibre motrice se continue par une mince fibre du névraxe. Ces minces fibres motrices intra-névraxiques ne restent pas groupées ensemble, ne continuent pas dans la direction des fibres motrices radiculaires, mais se réunissent aussitôt en divers sens aux fibres plus ou moins longitudinales du névraxe.

Les fibres motrices intra-centrales ne s'imprègnent pas de loin aussi fréquemment que les fibres motrices extra-centrales.

L'origine dernière des fibres motrices intra-centrales se trouve manifestement dans les cellules nerveuses qui entourent surtout la moitié

inférieure de la fente épendymaire; la face antérieure du canal épendymaire est occupée en majeure partie par les cellules pigmentaires. Malheureusement, chez l'Amphioxus adulte, l'imprégnation par le chromate d'argent des cellules ventrales de la substance grise ne se produit presque jamais; il en est de même de la substance blanche ventrale comprise entre les deux racines ventrales droite et gauche. Retzius ne paraît pas avoir réussi davantage à colorer cette substance blanche à l'aide du bleu de méthylène.

Par contre, chez un lot d'Amphioxus jeunes, de 15 millimètres environ, recueillis l'an dernier dans le golfe de Naples, nous avons obtenu une imprégnation nette des éléments nerveux en question; en variant la durée d'imprégnation chez des individus jeunes, on doit certainement parvenir à compléter les données qui résultent de nos préparations.

Dans ces dernières, on trouve, sous le canal épendymaire, à droite et à gauche, deux faisceaux assez distincts de fibres longitudinales (cordons antérieurs?); ces fibres longitudinales sont assez fréquemment entrecroisées par des fibres transversales (fibres commissurales?). En outre, certaines cellules, surtout celles de la moitié ventrale de la substance grise (fig. 59), sont imprégnées isolément; le corps de ces cellules ne possède pas de prolongements du côté de la ligne médiane, tandis que du côté latéral il se continue en un gros prolongement qui donne des collatérales se ramifiant dans le faisceau longitudinal latéral, puis s'infléchit à l'angle inféro-externe du névraxe pour devenir longitudinal; au niveau de l'inflexion, le prolongement se bifurque parfois en une branche longitudinale antérieure et en une branche longitudinale postérieure (fig. 60). Ces branches longitudinales donnent des collatérales du côté de la ligne médiane et aussi du côté externe; après un trajet plus ou moins long, elles se terminent elles-mêmes en diverses branches plus petites. Cette ramification terminale des fibres géantes n'a pu être observée chez les larves en question; mais chez l'Amphioxus adulte, nous avons vu très fréquemment les grosses fibres nerveuses occupant absolument la même place se comporter de cette manière

Fig. 59.

(phot. 55, pl. XII). Nous croyons qu'une ou plusieurs de ces ramifications se continuent dans la fibre radiculaire motrice (fig. 62, pl. IX); les collatérales de la branche longitudinale pourraient avoir pour fonction de recueillir l'excitation chez les fibres motrices longitudinales voisines et aussi de la leur communiquer; les collatérales dégagées par la base du prolongement cellulaire et se distribuant aux faisceaux latéraux pourraient remplir la même fonction par rapport à ces faisceaux que nous croyons pouvoir considérer, d'après leur mode de distribution, comme des voies intra-centrales courtes.

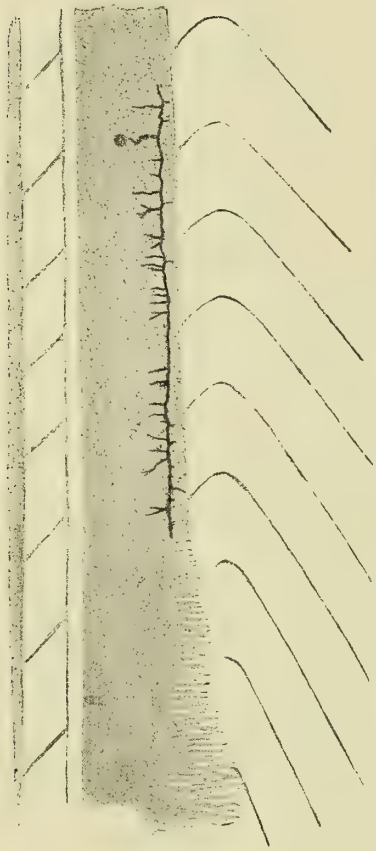


Fig. 60.

Les cellules motrices que nous venons de décrire nous semblent correspondre aux grandes cellules représentées par Retzius dans diverses figures; d'après cet auteur, le cylindre-axe de toutes ces cellules s'infléchit du côté opposé avant de devenir longitudinal. La figure 60 démontre qu'il n'en est pas toujours ainsi. D'après nos observations, on dirait même que cet entrecroisement est relativement rare; seulement le cylindre-axe donne souvent, avant de devenir longitudinal, une branche transversale.

Nous représentons encore (fig. 61) une cellule motrice d'un genre spécial, qui paraît correspondre aux véritables cellules géantes de Rohde; elle est située dans la moitié supérieure de la substance grise et donne des ramifications au faisceau longitudinal supérieur; du corps cellulaire, situé à droite, se dégage un cylindre-axe se dirigeant vers l'angle inféro-externe; le prolongement gauche du corps cellulaire paraît se continuer par une de ses

Fig. 61.

branches dans la racine dorsale gauche. (Nous avons dessiné la fibre radiculaire dorsale en continuité avec cette cellule motrice, parce que nous n'avons pas pu voir qu'elle ne l'était pas.)

Les cellules en rapport avec les fibres des racines dorsales sont situées généralement dans la moitié supérieure de la substance grise; comme on le voit par les quelques cellules que nous avons réunies autour d'une même racine dorsale (fig. 63, p. 62), leur forme est très variable.

De ce qui précède, il résulte que nous distinguons dans le névraxe trois systèmes de fibres longitudinales : un faisceau ventral, un faisceau latéral et un faisceau dorsal (le faisceau interne et le faisceau externe de Retzius correspondent sans doute à nos faisceaux latéral et dorsal). Les fibres de ces trois systèmes, comme du reste toutes les autres fibres centrales, sont habituellement granulées et variqueuses, dans les préparations au Golgi comme dans celles au bleu de méthylène (Retzius); dans quelques préparations, et ce sont peut-être les plus véridiques, les fibres nerveuses sont presque absolument régulières et de diamètre uniforme (phot. 56 et 57, pl. XII), de sorte que nous sommes encore une fois tentés d'attribuer ces varicosités à l'action du réactif.

Les faisceaux longitudinaux sont le plus développés dans la région moyenne du névraxe, surtout depuis le 4^{e} ou 5^{e} myotome jusqu'au 40^{e} environ, c'est-à-dire depuis la bouche jusqu'au pore abdominal. Dans l'extrémité céphalique comme dans l'extrémité caudale du névraxe, ils deviennent de moins en moins riches en fibres, jusqu'à disparaître presque totalement; au niveau du 2^{e} et surtout du 1er myotome, il n'existe plus que quelques fibres longitudinales.

A partir du 2^{e} ou 3^{e} myotome jusqu'au 10^{e} à 12^{e}, nous avons rencontré fréquemment des cellules ganglionnaires à corps relativement petit, à prolongements très nombreux, dirigés surtout vers la région ventrale, tandis que le cylindre-axe est tourné vers le faisceau dorsal (phot. 64, pl. XIII, fig. 65, pl. IX). Seraient-ce là les cellules des centres de coordination recevant l'excitation centripète des fibres dorsales et agissant par leurs prolongements sur les fibres ventrales motrices?

L'imprégnation du névraxe antérieur ne nous a rien révélé, dans la

disposition des fibres ou des cellules nerveuses, qui nous permette d'attribuer une fonction visuelle à la tache pigmentaire située dans la paroi antérieure du ventricule; par contre, le prolongement nerveux se rendant à la fossette olfactive a réagi à la manière de la substance nerveuse.

Vu la structure de l'extrémité antérieure du névraxe, telle qu'elle se présente dans les préparations à la méthode de Golgi ainsi que dans les préparations de fixation et de coloration habituelles, nous devons affirmer que les systèmes de fibres longitudinales intracentrales ne se concentrent pas dans l'extrémité céphalique du névraxe; nous n'entrevoyons donc d'aucune manière comment elle pourrait jouer le rôle physiologique du cerveau. L'extrémité antérieure du névraxe de l'Amphioxus peut être considérée comme le cerveau anatomique (à son premier stade de développement), mais le cerveau physiologique se trouve éparpillé, peut-être dans tout le névraxe, mais surtout dans le segment correspondant à la région buccale et branchiale.

TEXTE EXPLICATIF DES FIGURES.

Fig. 1, pl. I. — Section transversale d'un embryon de *Scyllium canicula* de 2 1/2 millimètres de longueur. Fixation par la liqueur de Hermann. Essence de térébenthine. Coloration par la safranine. Dessiné à l'objectif Leitz 1/10, immersion homogène. Ocul. 4 Zeiss. Chambre claire d'Abbe.

éb. Ébauche ganglionnaire paire primitive.

Fig. 2, pl. I. — Section transversale du même embryon. Fixation et coloration, idem. Reproduit de la même manière.

éb'. Ébauche ganglionnaire impaire.

Fig. 3, pl. III. — Section transversale d'un embryon de *Scyllium canicula* de 5 millimètres environ, à peu près vers la moitié de la longueur de l'embryon. Fixation par la liqueur de Hermann. Coloration par la safranine. Dessiné à l'aide de l'objectif Leitz 1/10, immersion homogène. Ocul. 4 Zeiss. Chambre claire d'Abbe.

éb'. Ébauche ganglionnaire impaire proliférant latéralement.

Fig. 4, pl. II. — Section transversale d'un embryon de *Torpedo marmorata* de 11 millimètres environ, portant à une certaine distance en arrière de la région cardiaque. Fixation par la liqueur de Hermann. Essence de térébenthine. Coloration par la safranine. Dessiné à l'aide de l'objectif Zeiss D et de la chambre claire de Leitz.

ebg. Ébauche du ganglion.
ebr. Bandelette radiculaire.
ebv. Ébauche de la racine ventrale.

Fig. 5, pl. II. — Section transversale à travers le même embryon, distante d'une vingtaine de coupes de la précédente dans le sens de l'extrémité postérieure. Fixation et coloration idem. Dessiné de la même manière.

ebr. Bandelette radiculaire de von Kuppfer.
ebv. Ébauche de la racine ventrale.

Fig. 6, 7, 8, 9, pl. I. — Section transversale d'une larve d'Amphioxus d'environ 1 millimètre de long. Fixation par une solution de sublimé et d'acide acétique. Coloration par l'hématoxyline (méthode de Heidenhain). Dessiné à l'aide de l'objectif Leitz 1/10, immersion homogène. Ocul. 4 Zeiss. Chambre claire d'Abbe.

n. Névraxe.
ep. Épiblaste.
c. Corde dorsale.
m. Lame musculaire.
l. Lame latérale cutanée.
v. Racine ventrale.
r. Racine dorsale.
r'. Seconde ébauche de la racine dorsale.

Fig. 10, pl. I. — Idem. Longueur, 1 $^1/_2$ millimètre.

Fig. 11, pl. I, 12 et 13, pl. II. — Section transversale d'une larve d'Amphioxus de 2 millimètres au niveau de l'extrémité postérieure. Liqueur de Flemming. Vinaigre de bois non purifié. Safranine. Obj. Leitz $^1/_{10}$, immersion homogène. Ocul. 4 Zeiss. Chambre claire d'Abbe.

Les explications sont les mêmes que dans la figure 6.

cv. Cordon ventral de substance blanche.
cl. Cordon latéral de substance blanche.
rd. Racine du nerf dorsal.
v. Racine du nerf ventral.

Fig. 14, pl. II. — Idem.

r. Racine du nerf dorsal.
f. Fibres épendymaires.
f'. Faisceau de fibres neurogliques.

Fig. 15, pl. IV. — Photogramme. Gr. = 180. Fibres motrices.

Fig. 16, pl. IV. — Photogramme. Gr. = 180. Fibres motrices.

Fig. 17, pl. IV. — Photogramme. Gr. = 90. Fibres motrices avec plaques terminales.

Fig. 18, pl. IV. — Photogramme. Gr. = 180. Fibres motrices avec plaques motrices.

Fig. 19, pl. V. — Leitz, obj. 2, ocul. IV. Nerf cutané.

NSD. Nerf supéro-dorsal.
NLD. Nerf latéro-dorsal.
RV. Rameau ventral avec grosses branches latérales *BL.*

Fig. 20, pl. VI. — Branche nerveuse cutanée avec ramifications terminales sub- et interépithéliales.

Fig. 21, pl. III. — Peau de l'extrémité céphalique de l'Amphioxus. Liqueur de Hermann. Safranine. Objectif achromatique Leitz, immersion homogène. Ocul. 4 Zeiss. Chambre claire d'Abbe.

n. Tronc nerveux périphérique.
c. Cellules habituelles de l'épiderme.
c'. Cellules comprimées.
n'. Section transversale des troncs nerveux périphériques.

Fig. 22, pl. VI. — Tête d'Amphioxus dont la paroi ventrale est incisée sur la ligne médiane, vue du côté ventral.

D. Côté droit.
G. Côté gauche.
III, IV, etc. Paires dorsales droites ou gauches.
NV. Nerf du velum.

Fig. 23, 24, 25, pl. VII. — Réseau péritonéal formé par les nerfs viscéraux transverses ; préparation au bleu de méthylène. Gr. = 90.

Fig. 26, pl. VIII. — Dessin mi-schématique. Leitz, obj. 2, ocul. 4.

RV. Rameau ventral.
NV. Nerf viscéral.
NVT. Nerf viscéral transverse.
NVA. Nerf viscéral ascendant.
RP. Réseau péritonéal.
LM. Ligne médiane.
NB. Nerfs branchiaux.
NDV. Nerf digestif et vasculaire (?).

Fig. 27, pl. VIII. — Leitz, obj. 2, ocul. 4.

NVA. Nerf viscéral ascendant.
NB. Nerfs branchiaux formant un plexus dans le ligament dentelé.

Fig. 28, pl. VII. — Photogramme. Gr. = 180. Préparation au Golgi. Nerf viscéral avec fibres.

Fig. 29, pl. VI. — Leitz, obj. 2, ocul. 4 Plexus nerveux de la membrane séreuse qui recouvre la glande sexuelle.

Fig. 30, pl. V. — Leitz, ocul. 1, obj. 4. Préparation au Golgi.

NB. Nerfs branchiaux pénétrant par le ligament dentelé formant un plexus nerveux sur les branchies et un plexus ou réseau serré sur la ligne médiane ventrale (*RMV*).

Fig. 31, pl. III. — Section (transversale par rapport à la moelle épinière) d'une racine nerveuse dorsale d'Amphioxus adulte. Liqueur de Hermann. Safranine. Obj. achromatique Leitz $^1/_{10}$, immersion homogène. Ocul. 4 Zeiss. Chambre claire d'Abbe.

m. Périphérie de la moelle épinière.
g. Gaine de la moelle épinière.
n. Noyaux accumulés dans la racine nerveuse.
f. Fibre nerveuse pâle.

Fig. 32, pl. III. — Idem.

fsc. Faisceaux de neuroglie.
fil. Filaments de neuroglie.
n. Noyau neuroglique de la périphérie de la substance blanche.

Fig. 33, pl. XI. — Cellule nerveuse colossale d'un Amphioxus de 24 millimètres. Liqueur de Hermann. Safranine. Obj. achromatique Leitz $^1/_{10}$, immersion homogène. Chambre claire d'Abbe.

Fig. 34, pl. X. — Section transversale de la moelle épinière. Amphioxus de 5,5 millimètres. Liqueur de Flemming. Fuchsine. Obj. achromatique Leitz $^1/_{10}$, immersion homogène. Ocul. 2 Zeiss.

a. Cellule nerveuse colossale envoyant un prolongement dans la racine nerveuse dorsale *d.*

b. Cellules nerveuses de moyenne grandeur.

c. Noyaux de l'épithélium épendymaire.

e. Cellules pigmentaires.

Fig. 35, pl. X. — Cellule nerveuse à aspect fibrillaire d'un Amphioxus de 24 millimètres. Fixation et coloration idem. Dessiné de la même manière.

Fig. 36, pl. X. — Idem. Cellules nerveuses à aspect clair et hyalin à leur périphérie.

Fig. 37, pl. XI. — Idem.

Fig. 38, pl. XI. — Cellule nerveuse ganglionnaire bipolaire. Idem.

Fig. 39, pl. IX. — Cellule ganglionnaire d'un Amphioxus de 5,5 millimètres. Liqueur de Hermann. Safranine. Même grossissement que figure 33.

d. Racine nerveuse dorsale (3e paire).

c. Cellule émettant un prolongement (*p*) dans cette racine.

n. Noyau de neuroglie.

Fig. 40, pl. IX. — Section transversale de la moelle épinière aux environs de la région postérieure d'une larve d'Amphioxus de 12,5 millimètres. Idem.

n. Noyau épendymaire.

c. Cellule nerveuse.

c'. Cellule ganglionnaire renfermant deux sphères attractives.

fil. Filament épendymaire.

long. Faisceau neuroglique coupé transversalement.

Fig. 41, pl. IX. — Section transversale d'un Amphioxus de 6 millimètres, dans la région antérieure du névraxe.

c. Cellule nerveuse ganglionnaire représentant l'ébauche ganglionnaire paire.

n. Noyaux neurogliques répandus irrégulièrement dans la substance blanche.

Fig. 42, pl. X. — Section transversale de l'extrémité antérieure du névraxe d'un Amphioxus de 16 millimètres au niveau de la masse ganglionnaire impaire dorsale. Idem.

g. Cellules ganglionnaires.

n. Noyau épendymaire.

c. Couche de cellules nerveuses représentant la substance grise.

n'. Noyaux neurogliques répandus irrégulièrement dans la substance blanche.

fil. Filament de la charpente neuroglique.

Fig. 43, pl. X. — Section transversale du névraxe (extrémité antérieure) d'un Amphioxus de 6 millimètres. Idem.

a. Cellule nerveuse dorsale à plusieurs ramifications.
n. Noyau neuroglique.
fil. Filaments de la charpente.

Fig. 44, pl. IX. — Section d'une racine ventrale d'un Amphioxus adulte. Liqueur de Hermann. Safranine. Obj. achromatique Leitz $^1/_{10}$, immersion homogène. Chambre claire d'Abbe.

sb. Substance blanche de la moelle.
g. Gaine de la moelle.
long. Faisceau longitudinal de neuroglie, section transversale.
rv. Racine nerveuse ventrale.

Fig. 45, pl. IX. — Section transversale du névraxe d'un Amphioxus de 12,5 millimètres. Idem.

c. Cellule nerveuse ganglionnaire chargée de pigment.
n. Noyaux épendymaires.
fil. Filaments épendymaires.
long. Faisceau longitudinal de neuroglie.
i. Filament neuroglique coupé transversalement.

Fig. 46, pl. XI. — Section transversale du névraxe d'un Amphioxus adulte. Idem.

c. Cellule pigmentaire à deux prolongements.
fil. Faisceau neuroglique ventral.
n. Noyaux neurogliques.

Fig. 47, pl. XI. — Section longitudinale du névraxe d'un Amphioxus de 16 millimètres. Idem.

n. Noyaux épendymaires.
n'. Noyaux neurogliques.
c. Cellules nerveuses.
fsc. Faisceau neuroglique.
d. Gouttière formée par les faisceaux.
rv. Racine ventrale.
m. Myotome.
fn. Fibre nerveuse.
fm. Fibre musculaire striée.
g. Gaine de la moelle perforée.
rd. Racine nerveuse dorsale.

Fig. 48, pl. XI. — Tissu neuroglique entourant la périphérie de la cellule nerveuse reproduite dans la figure 33. Idem.

Fig. 49, pl. X. — Section longitudinale du névraxe au milieu du corps (Amphioxus adulte). Idem.

l. Lumière du canal central.
g. Gaine de la moelle épinière.
fil. Filaments de neuroglie (Stützfasern de Rohon).

Fig. 50, pl. XI. — Un cirre d'Amphioxus adulte coupé dans la longueur. Idem. Obj. D. Ocul. Zeiss. Dessinateur à projection de Leitz.

b. Bourgeons nerveux.
n. Tronc nerveux.

Fig. 51, pl. XI. — Section transversale d'un cirre au niveau d'un bourgeon nerveux épithélial. Idem. Obj. achromatique Leitz $^1/_{10}$, immersion homogène. Ocul. 4, Zeiss. Chambre claire d'Abbe.

b. Bourgeon nerveux.

Fig. 52, pl. IX. — Épithélium d'un Amphioxus adulte. Coupe transversale. Idem.

cell. Cellules habituelles.
cell'. Cellules spéciales se colorant d'une autre manière.
nd. Nerf dorsal.
rn. Ramifications nerveuses cutanées.
m. Myotome.

Fig. 53, 54, pl. XII. — Gr. = 90. Coupe longitudinale du névraxe, passant par la racine dorsale.

Fig. 55, pl. XII. — Gr. = 180. Idem.

Fig. 56, 57, pl. XII. — Gr. = 180. Bifurcation de la fibre nerveuse dorsale à son entrée dans le névraxe.

Fig. 58, pl. XIII. — Gr. = 180. Racine ventrale à son entrée dans le névraxe.

Fig. 59 (dans le texte, p. 65). — Leitz, obj. 7, ocul. 4. Cellule motrice.

Fig. 60 (dans le texte, p. 66). — Leitz, obj. 4, ocul. 4. Idem.

Fig. 61 (dans le texte, p. 66). — Obj. 7, ocul. 4. Cellule géante (*C. G.*); cylindre-axe (*C. A.*); fibre dorsale (*F. D.*).

Fig. 62, pl. IX. — Leitz, obj. 4, ocul. 2. Cellule motrice avec cylindre-axe ramifié et prolongement radiculaire.

Fig. 63 (dans le texte, p. 62). — Leitz, obj. 7, ocul. 4; cellules dorsales sensitives (*c. d.*).

Fig. 64, pl. XIII. — Gr. = 180. Segment antérieur du névraxe. Cellule avec cylindre-axe tourné du côté du faisceau longitudinal dorsal.

Fig. 65, pl. IX. — Leitz, obj. 7, ocul. 4, dessin de la cellule de la figure 64.

Fig. 66 et 67, pl. XIII. Gr. = 90 et 180. — Même segment du névraxe; branches ventrales des fibres radiculaires dorsales se terminant au niveau du faisceau longitudinal ventral par une ramification.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

Fig. 1.

Fig. 6

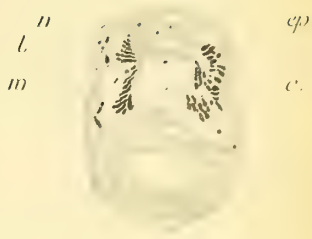


Fig. 7.

Fig. 2.

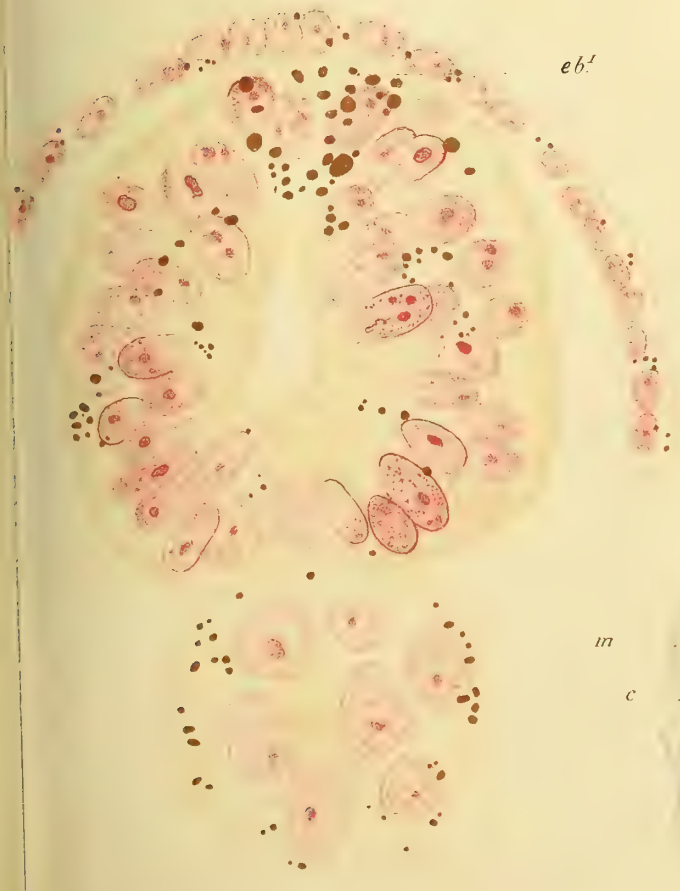


Fig. 10.

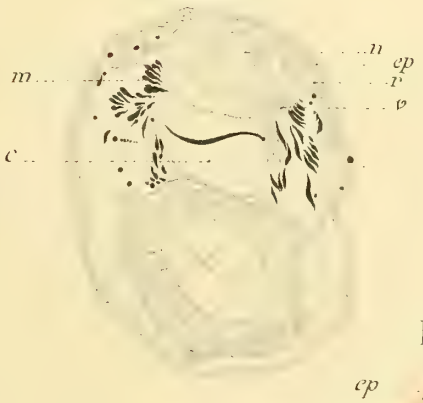


Fig. 8.

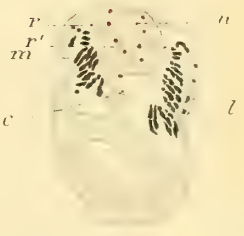


Fig. 11.

r Fig. 9.

BRITISH MUSEUM
NATURAL

Fig: 4

Fig: 12

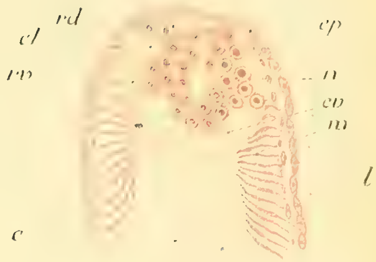


Fig: 13

Fig: 5

Fig: 14

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig. 3.

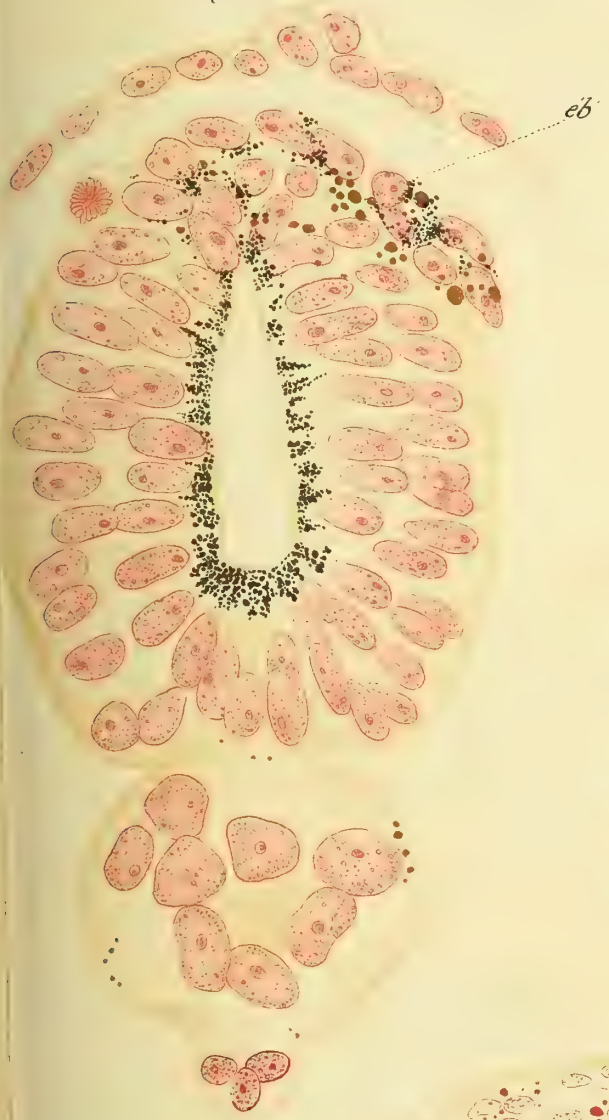


Fig. 21.

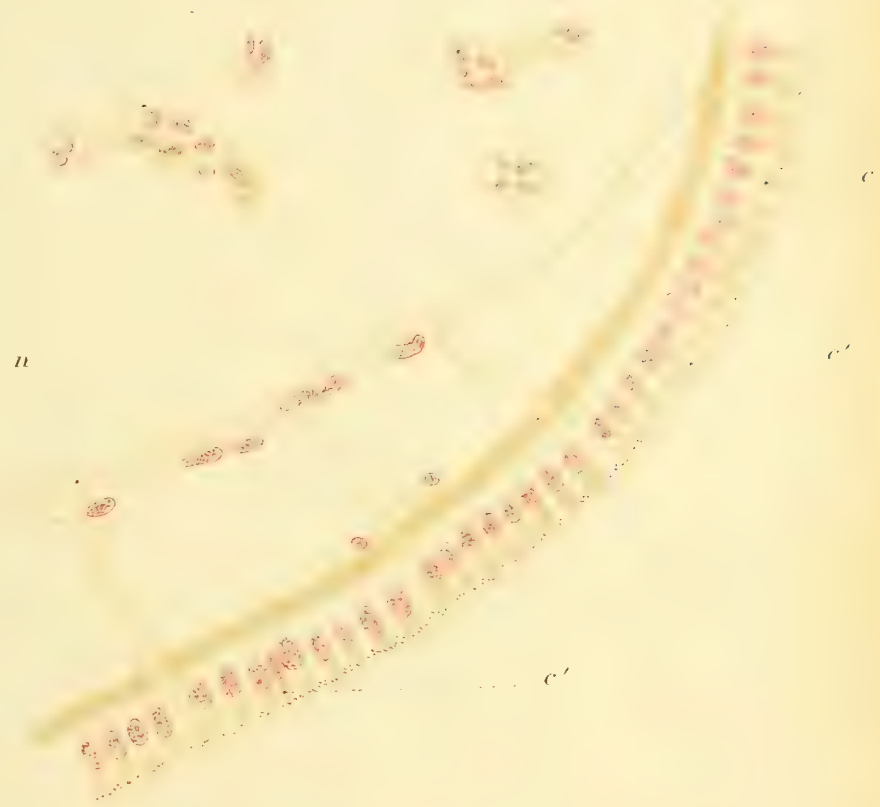


Fig. 32.

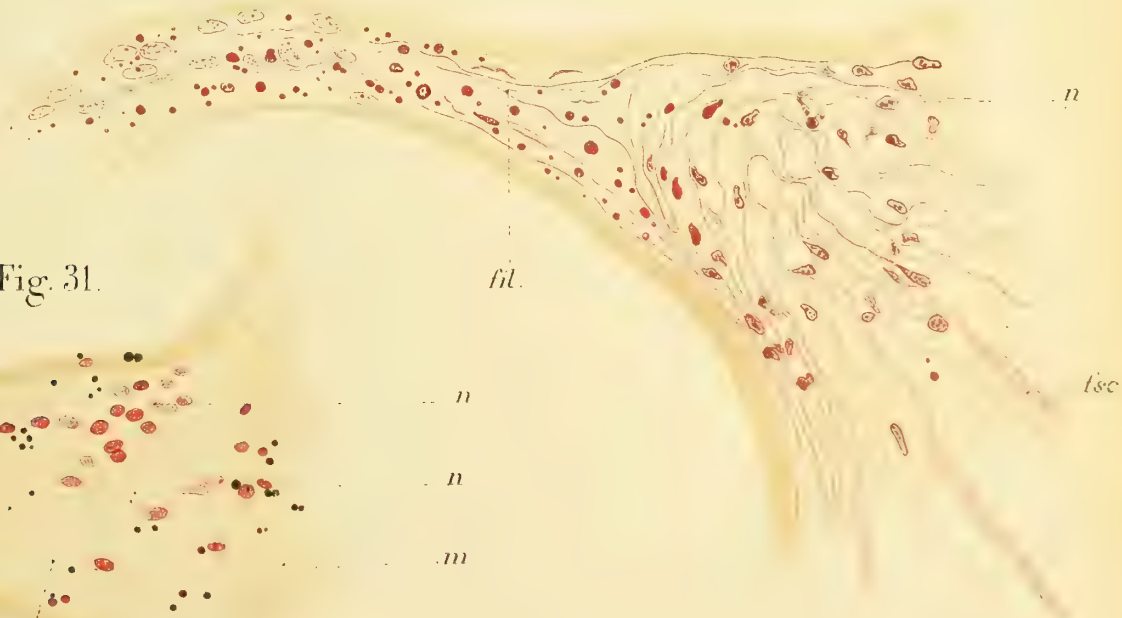
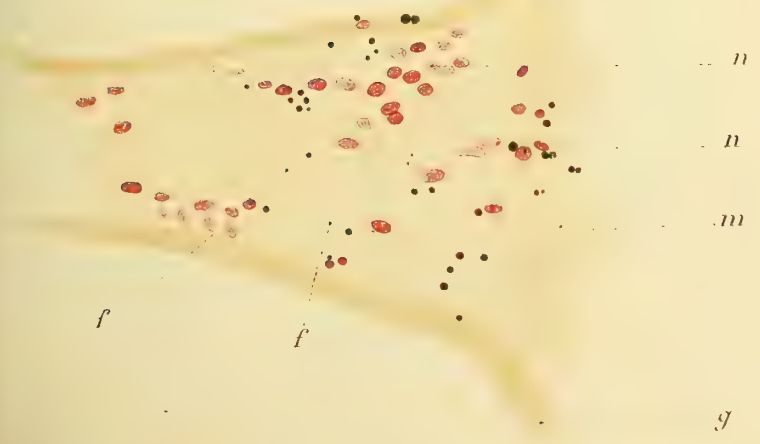


Fig. 31.



BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig. 15.

Fig. 18.

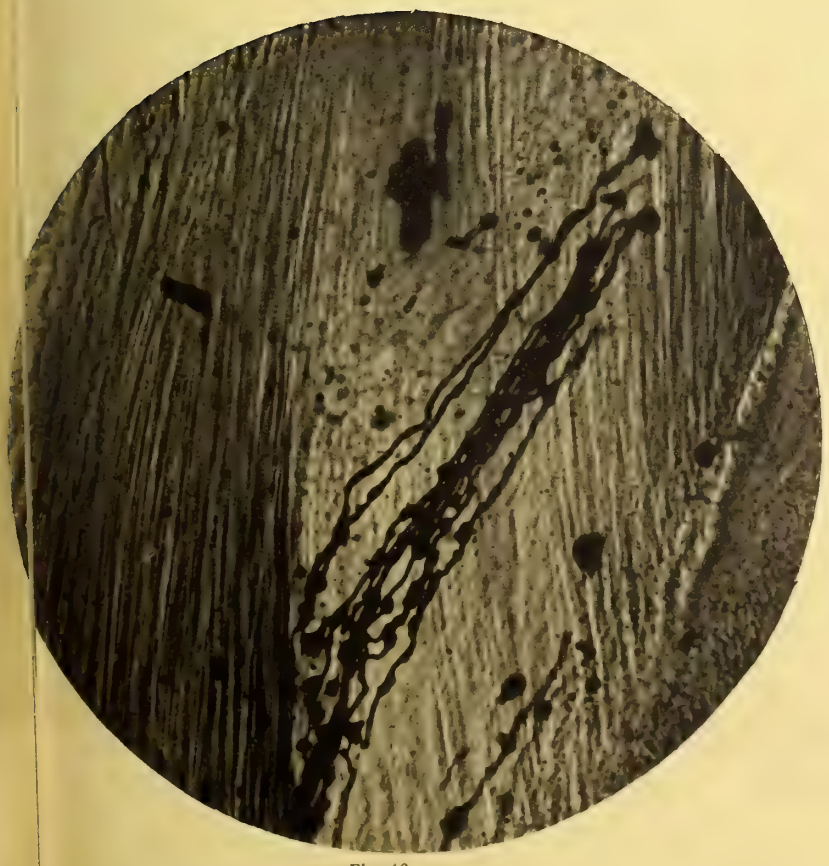


Fig. 16.

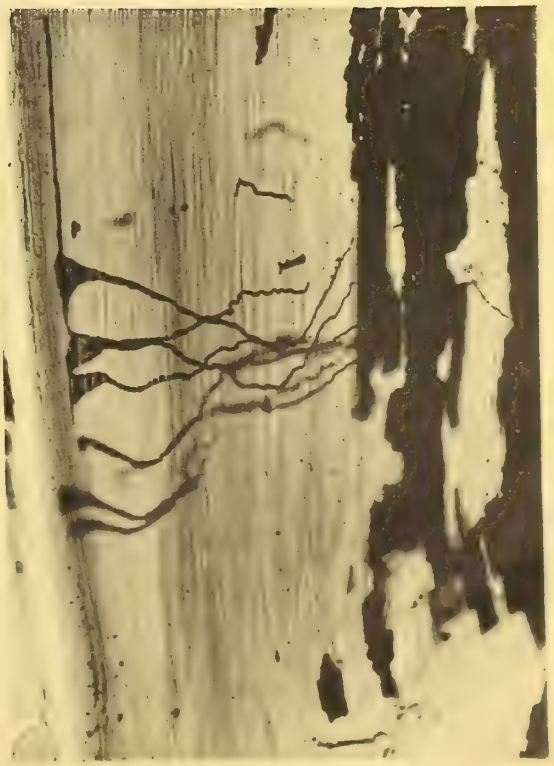


Fig. 17.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HIST

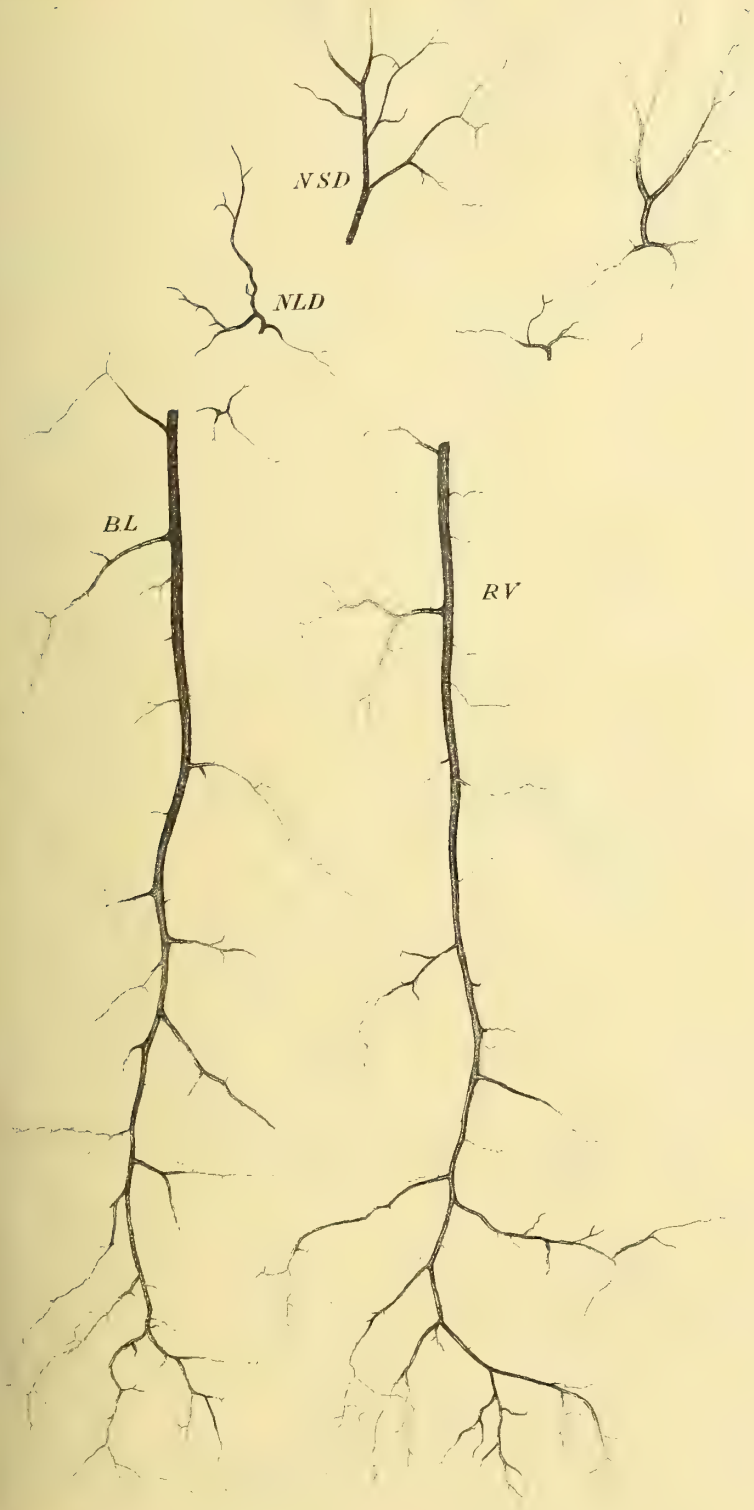


Fig. 19

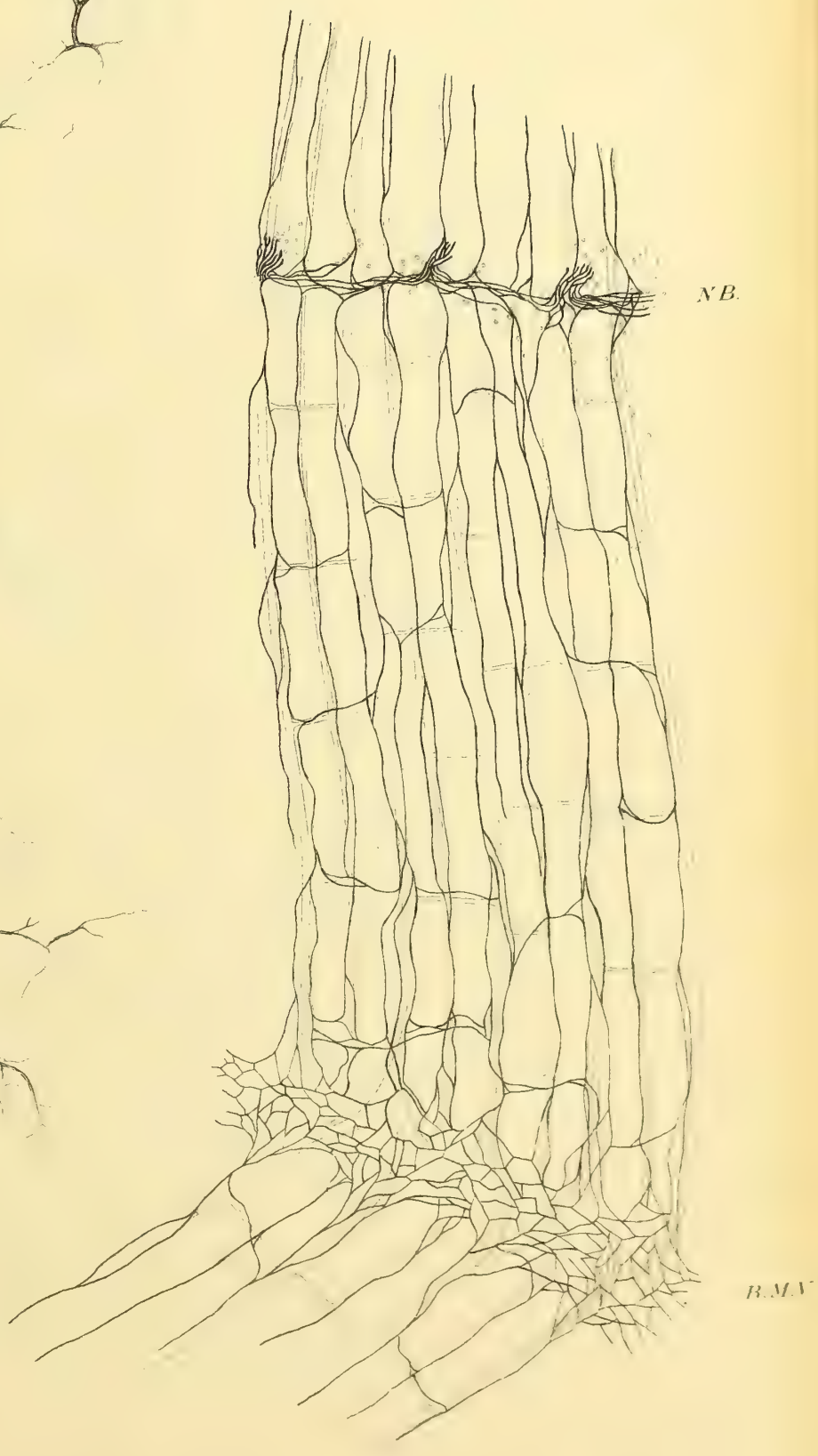


Fig. 30

BRITISH MUSEUM

Fig. 29.

Fig. 20.

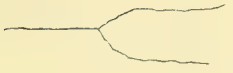


Fig. 22.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HIST

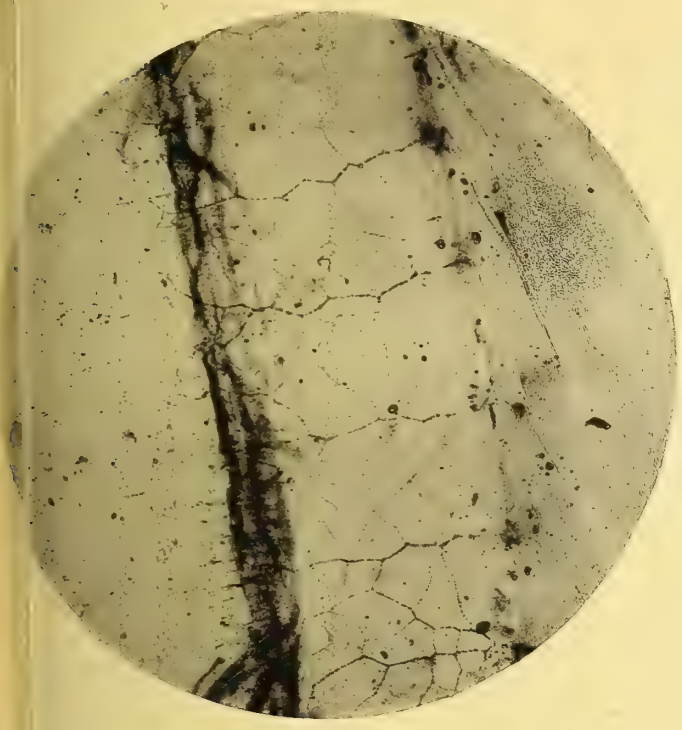


Fig 23.

Fig. 28.

Fig. 24.

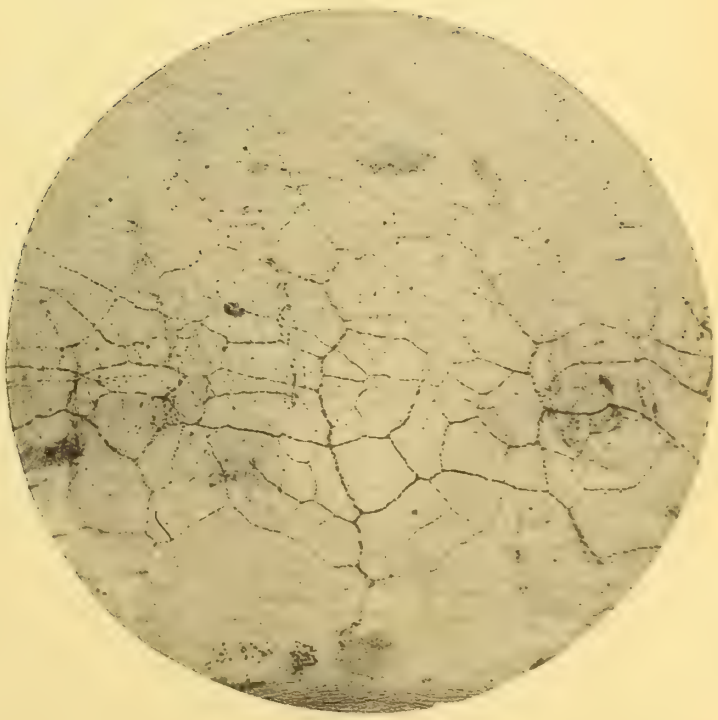
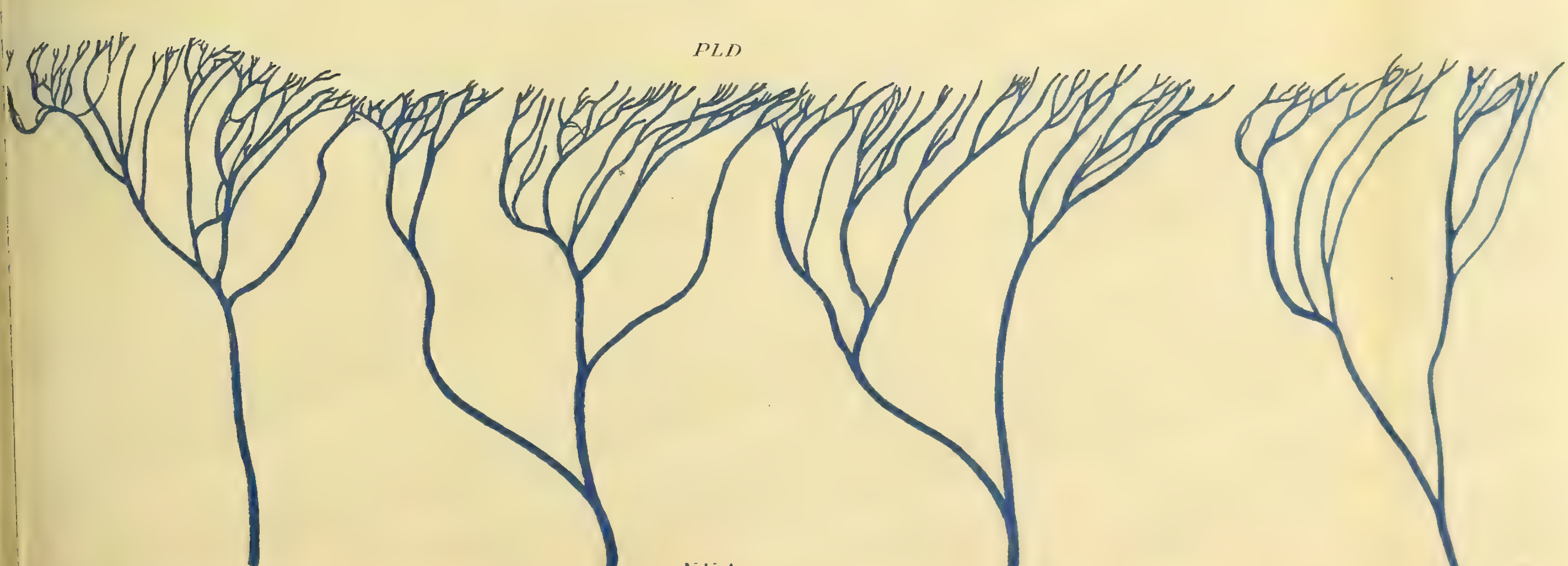


Fig. 25.

BRITISH MUSEUM
NATURAL

Fig. 26.

Fig. 27.



BRITISH MUSEUM

Fig. 39

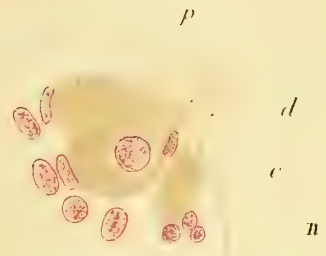


Fig. 41

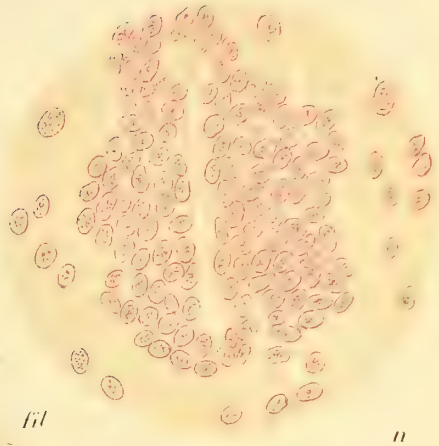


Fig. 40

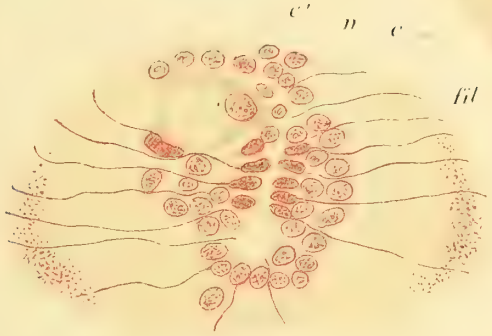


Fig. 44

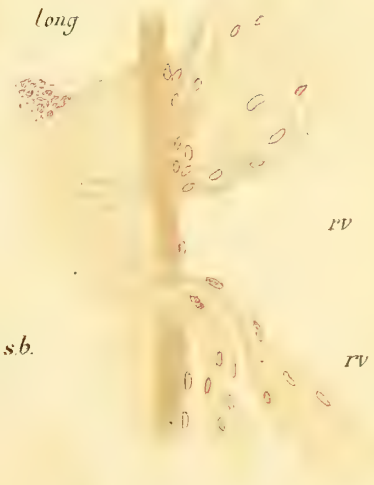


Fig. 62

Fig. 45

Fig. 65

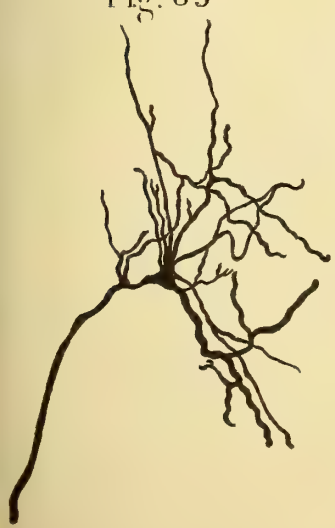
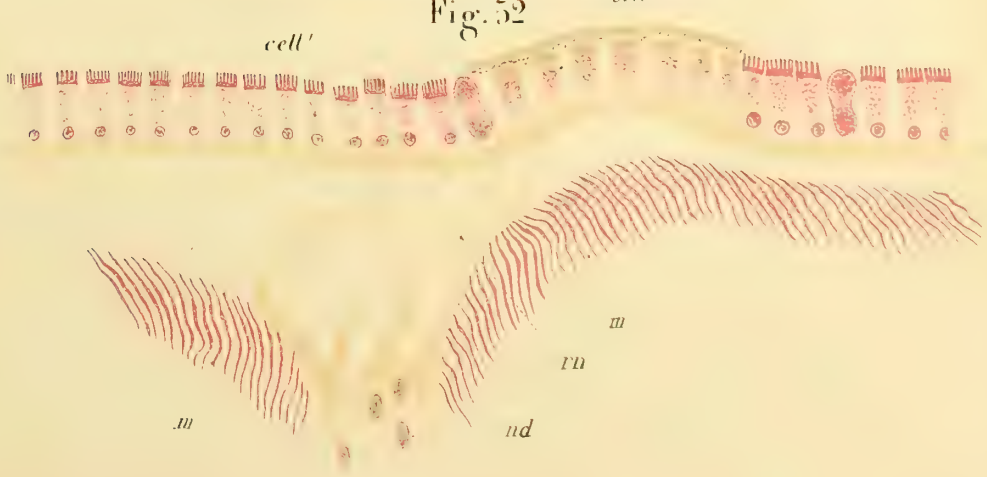


Fig. 52



BRITISH MUSEUM

Fig. 49

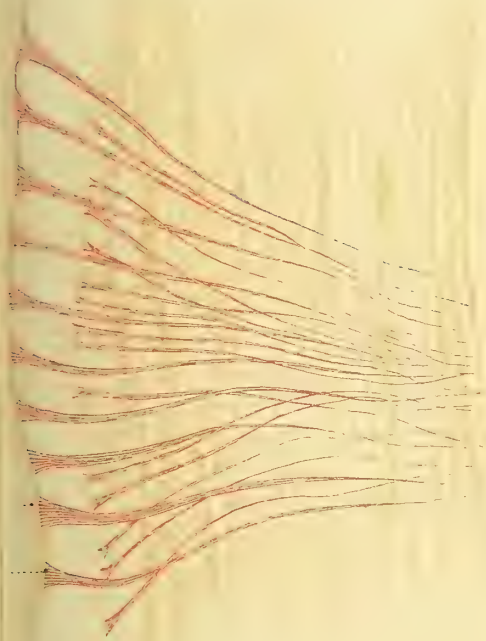


Fig. 42

Fig. 43

Fig. 34

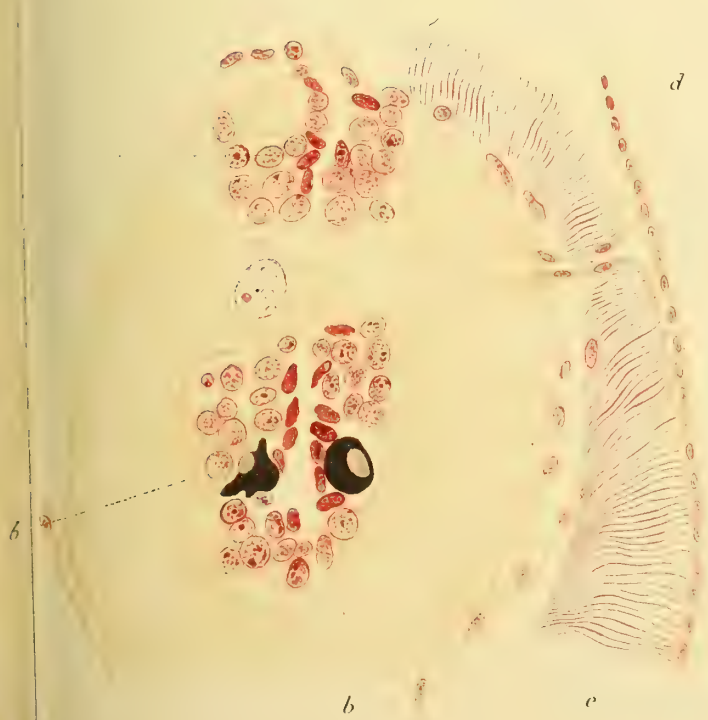


Fig. 35

Fig. 36

BRITISH MUSEUM
NATURAL HIST

Fig. 33

Fig. 51

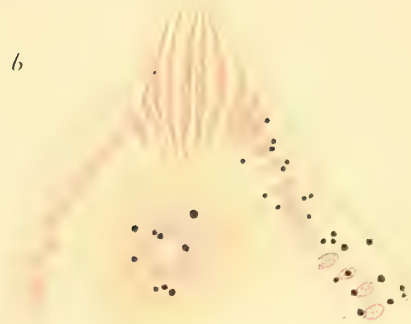


Fig. 48

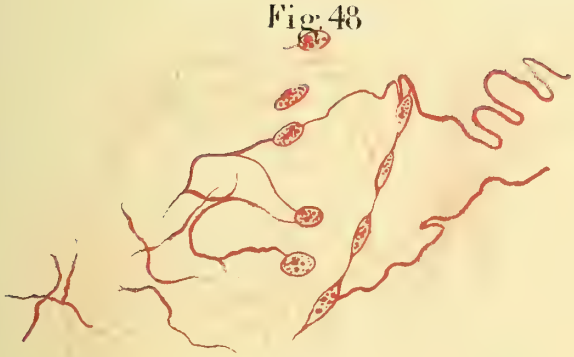


Fig. 46

Fig. 50

Fig. 37

Fig. 47

Fig. 38

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

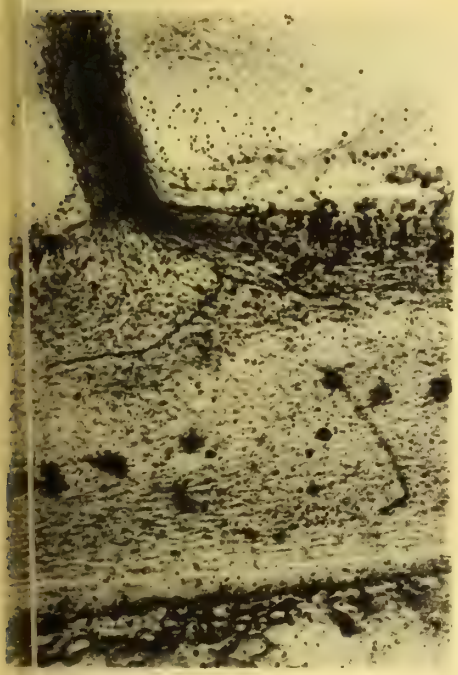


Fig. 56.

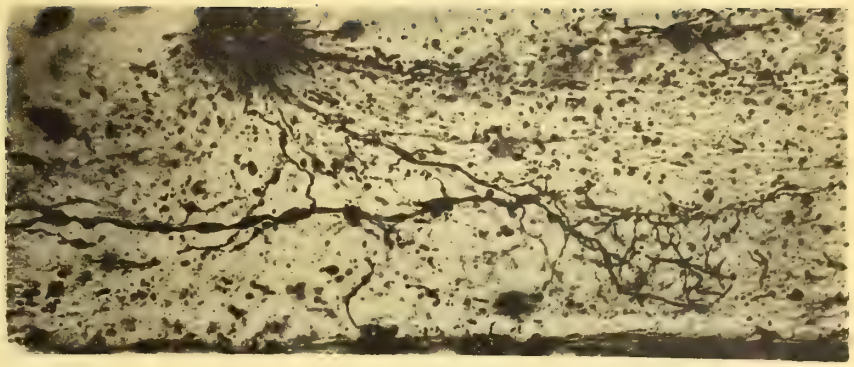


Fig. 55.

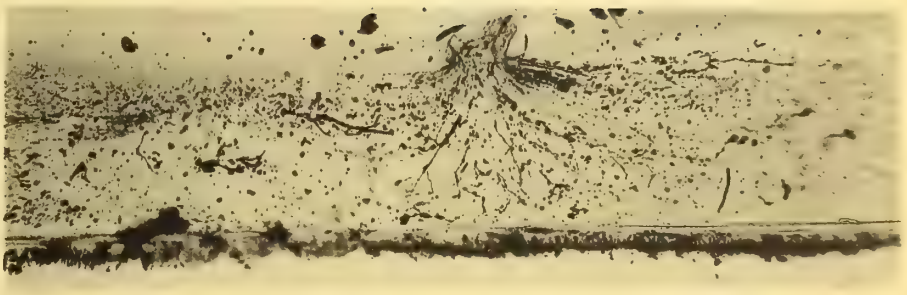


Fig. 54.

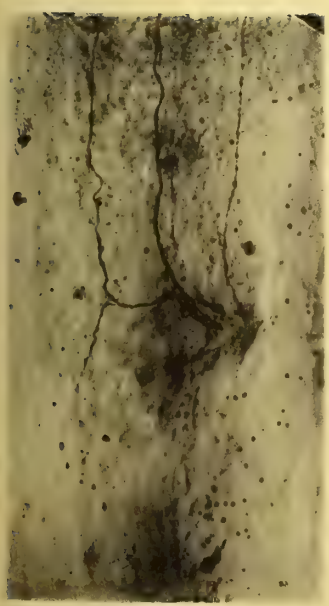


Fig. 57.

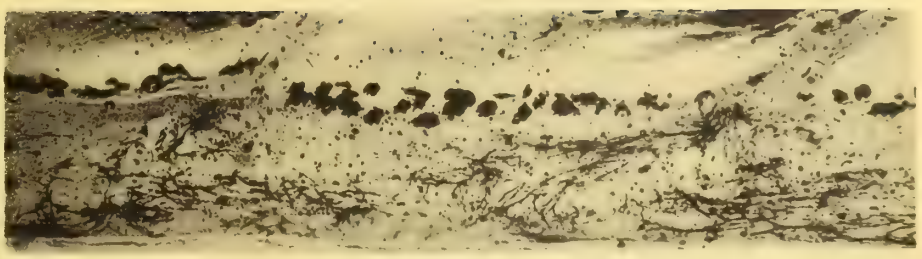


Fig. 53.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

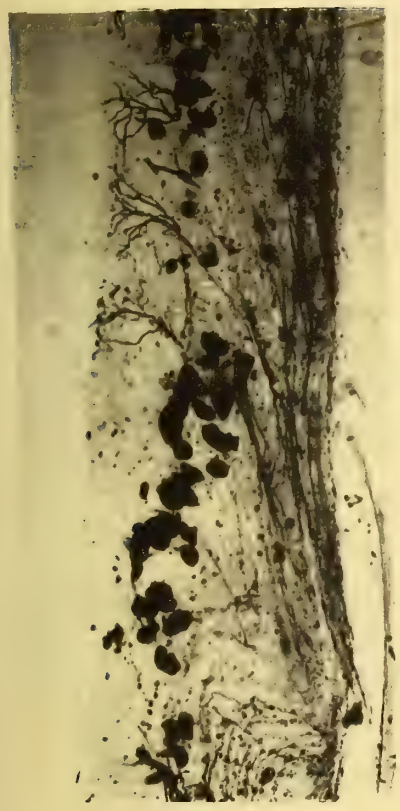


Fig. 66.

Fig. 64.

Fig. 67.

Fig. 58.

SUR LES RELATIONS LITHOLOGIQUES

ENTRE

LES ROCHES CONSIDÉRÉES COMME CAMBRIENNES

DES MASSIFS

DE ROCROI, DU BRABANT ET DE STAVELOT

PAR

Jean DE WINDT

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 9 janvier 1897.)

SUR LES RELATIONS LITHOLOGIQUES

ENTRE

LES ROCHES CONSIDÉRÉES COMME CAMBRIENNES

DES MASSIFS

DE ROCROI, DU BRABANT ET DE STAVELOT

HISTORIQUE.

Le premier géologue qui chercha à établir les relations que présentent les diverses couches ardennaises, est d'Omalius d'Halloy; il publia en 1808 son *Essai sur la géologie du Nord de la France*, et y établit la distinction entre terrains inclinés, plus anciens, et terrains horizontaux, plus récents. Dans les terrains inclinés sans fossiles, il distinguait la formation ardoisière, dans laquelle rentrent les massifs de Rocroi, le massif de Stavelot (pierre à rasoir de Salm-Château), le grès de Weismes et les ardoises de Steenkerke, et la formation trappéenne, comprenant les divers gisements de roches éruptives déjà signalés à cette époque. En 1813, Bouesnel, géologue français, conclut à l'antériorité des couches de calcaire aux couches d'ardoises, en observant que si l'on remonte la Meuse au delà de Givet, des schistes argileux jaunâtres reposent sur du calcaire bleu, et les ardoises de Fumay sur ces schistes — évidemment une erreur d'observation. En 1828, d'Omalius, tout en discutant les observations de Bouesnel, n'hésitait pas à les accepter, du moins en grande partie, et admit sans réserves que le calcaire carbonifère du Condroz était le plus ancien et avait été suivi successivement par les schistes et les psammites jaunes, par le calcaire métallifère, par les poudingues du terrain anthracifère, par le terrain houiller, par le terrain ardoisier et par le terrain trappéen.

L'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique ayant mis au concours la description géologique des diverses provinces belges, plusieurs mémoires furent produits. L'un de ces mémoires était l'*Essai d'une description géologique du grand-duché de Luxembourg* (1829), par Steininger, professeur à Trèves, qui plaça le terrain ardoisier à la base du terrain de transition, mais défendit sa thèse avec des arguments jugés insuffisants par d'Omalius. Il appartenait à André Dumont de jeter la lumière sur les relations entre les divers terrains belges. Déjà en 1832, dans sa *Constitution géologique de la province de Liége,* il fournit les preuves évidentes que le terrain anthracifère repose sur le terrain ardoisier; puis, ayant été chargé par le Gouvernement belge du levé de la carte géologique du pays et ayant rassemblé un grand nombre d'observations très soignées et très exactes, il publia, en 1847-1848, ses *Mémoires sur les terrains ardennais et rhénan,* dans lesquels il donne un commentaire remarquable de la carte géologique dont il avait exécuté le levé; ses idées prévalurent depuis lors dans l'interprétation des faits observés, et pour la classification des terrains, c'est d'elles que la Commission de la Carte s'est inspirée dans la rédaction de la légende du terrain cambrien.

Exposons en peu de mots le mémoire de Dumont, pour ce qui regarde le terrain ardennais. Le terrain ardennais constitue quatre massifs : deux grands, les massifs de Rocroi et de Stavelot; deux petits, ceux de Givonne et de Serpont. Les diverses roches qui entrent dans la composition du terrain ardennais peuvent se ranger en devilliennes, reviniennes ou salmiennes, le système devillien se trouvant dans les massifs de Rocroi et de Stavelot, le système revinien dans les massifs de Rocroi, Givonne et Stavelot, le système salmien dans les massifs de Stavelot et de Serpont. Nous reviendrons plus loin sur la description des roches de ces divers massifs.

Dumont rangeait les couches de schistes et de quartzites du Brabant dans son terrain rhénan; il considérait comme gedinnienne la partie septentrionale, comme coblenzienne la partie méridionale de ce massif; en 1860, Gosselet démontra que le massif du Brabant appartenait en partie au terrain silurien, et en 1862, la collection de fossiles trouvée par Gosselet et déterminée par Joachim Barrande mit hors de doute l'âge des couches siluriennes du Brabant.

En 1863, Gosselet fit entrer le massif tout entier dans le terrain silurien ; en 1873, Malaise fit paraître un nouveau mémoire confirmant ces dernières idées et établit alors la succession des diverses assises réputées siluriennes, au nombre de quatre. Plus tard, en 1883, les recherches de Malaise firent admettre la distinction entre silurien et cambrien; les trois assises établies par ce savant sous les noms d'assises de Blanmont, de Tubize et d'Oisquercq entrèrent dans le cambrien. Ce massif du Brabant ayant été recouvert dans la suite des périodes géologiques par les terrains secondaires et tertiaires, les couches n'affleurent que dans les vallées des cours d'eau et en certains points isolés [1].

[1] Voici la légende de la Carte pour le cambrien :

SYSTÈME CAMBRIEN.

Ardennes.	**Brabant.**
ÉTAGE SALMIEN (Sm).	
Salmien supérieur (Sm2).	
Sm2. Phyllades ottrélitifères, manganésifères, oligisteux ou oligistifères, coticule.	
Salmien inférieur (Sm1).	
Sm1. Quartzophyllades et phyllades. *Dictyograptus flabelliformis.*	
ÉTAGE REVINIEN (Rv).	
Rv. Quartzites gris-bleu et phyllades noirs de Revin.	Rv. Quartzites gris-bleu et phyllades noirs ou graphiteux avec phtanite, schistes gris ou bigarrés à la base (Oisquercq).
ÉTAGE DEVILLIEN (Dv).	
Devillien supérieur (Dv2).	
Dv2. Quartzite vert et phyllade violet ou gris verdâtre de Deville et de Fumay, souvent avec magnétite. *Oldhamia.*	Dv2. Quartzite vert et phyllade gris verdâtre, souvent avec magnétite. *Oldhamia.* Avec arkose (Tubize).
Devillien inférieur (Dv1).	
Dv1. Quartzite blanchâtre ou verdâtre (Hourt).	Dv1. Quartzite blanchâtre ou verdâtre (Blanmont).

Dans ce travail, nous ne nous préoccupons pas de l'étude des relations stratigraphiques entre les divers massifs : elle est à refaire. Ce que nous nous proposons, c'est de rechercher si l'étude pétrographique des roches ne peut amener aucun élément nouveau propre à préciser, à mieux déterminer les relations entre le Brabant et les autres groupes cambriens. A cet effet, nous décrirons les roches qui entrent dans la composition des trois massifs principaux, et nous établirons alors, s'il y a lieu, des rapprochements.

Dumont a donné des descriptions lithologiques, macroscopiques des diverses roches, descriptions qui, après bientôt cinquante ans, restent des modèles d'exactitude. Après lui, l'étude de plusieurs roches cambriennes fut reprise à l'aide du microscope. M. Renard décrivit successivement, dans ses *Recherches sur la composition et la structure des phyllades ardennais,* le phyllade aimantifère (de Rimogne et de Monthermé), le phyllade violet (de Fumay et de Haybes), le phyllade simple (de Rimogne et de Monthermé), le phyllade ottrélitifère (de Monthermé), le phyllade à ilménite (des forges de la Commune), et donna en outre des analyses du phyllade oligistifère (de Viel-Salm) et du coticule, dont il avait déjà fait l'objet de mémoires précédents. Quant aux roches à ottrélite du salmien, elles ont été décrites par van Werveke et par Gosselet.

Les roches du Brabant n'ont encore fait l'objet d'aucune étude détaillée au point de vue microscopique.

MASSIF DE ROCROI.

DISPOSITION GÉOGRAPHIQUE ET DONNÉES HISTORIQUES.

Le massif de Rocroi s'étend de l'ouest vers l'est, de Petit-Loudun près d'Hirson jusque près de Louette-Saint-Pierre, et du nord au sud de Fepin à Château-Regnault. Le point le plus élevé est la Croix-Scaille, vers l'extrémité orientale du massif (+ 504 mètres); de ce point culminant, le massif s'abaisse vers l'ouest jusque entre Hirson et Mondrepuits, où il n'a que 216 mètres; la vallée de la Meuse le coupe à peu près dans le sens de sa plus grande largeur, de Château-Regnault à Fepin. D'après Dumont [1], « le massif de Rocroi se divise en deux systèmes bien caractérisés par leur position et par les roches dont ils sont respectivement composés. J'ai nommé devillien, dit-il, le plus ancien des deux, parce que l'une des bandes qu'il forme est l'objet d'importantes exploitations d'ardoises dans la commune de Deville sur la Meuse, et désigné le second sous le nom de système revinien, parce qu'il s'étend considérablement autour de Revin. »

En descendant la Meuse, on observe quatre bandes de roches différentes :

1° Schistes de Bogny (schistes et quartzites noirs);

2° Schistes de Deville (ardoises vertes, simples et aimantifères);

3° Schistes de Revin (schistes et quartzites noirs);

4° Schistes de Fumay (schistes violets).

Dumont, en faisant abstraction des plis et autres accidents qui ramènent les couches plusieurs fois au même niveau vers la surface du sol, observe [2] que l'axe de la bande de Rimogne (= Deville) est formé de quartzite blanchâtre, des deux côtés duquel se présentent successivement des quartzites verdâtres alternant avec des schistes ardoisiers aimantifères, puis des quartzites gris bleuâtre ou noirâtre, pyritifères, alternant avec des schistes ardoisiers noirs, reviniens (vallée de la Meuse, entre Bogny et Monthermé).

[1] *Loc. cit.*, p. 47.
[2] *Loc. cit.*, p. 57.

De cette disposition, qu'il considère comme symétrique, des roches devilliennes, entre les quartzites noirs qui constituent d'un côté l'enveloppe de Monthermé et de l'autre la colline qui s'étend de Bogny vers Roma, il conclut que, malgré l'inclinaison presque invariable qu'elles présentent dans la vallée de la Meuse, elles forment une voûte ou un bassin, et cette dernière question peut être résolue aux Forges situées sur la Semois, entre Val-Dieu et Tournavaux, où il observe les roches devilliennes décrivant une voûte dont l'un des côtés incline au nord d'environ 30°, et l'autre au sud d'un même nombre de degrés. Il conclut de cette observation que les roches qui composent la bande devillienne de Rimogne sont plus anciennes que celles du système revinien, les quartzites blanchâtres qui se trouvent vers l'axe de la bande en formant l'étage inférieur, et les quartzites verdâtres et les schistes ardoisiers simples et aimantifères, l'étage supérieur. Quant aux roches de Fumay, il les rattache au devillien [1]; elles inclinent sous le système revinien de tous les points d'une courbe qui équivaut à un quart de circonférence depuis Divers-Mont jusqu'au nord-est de Haybes, d'où l'on peut conclure avec une grande probabilité qu'elles forment l'extrémité d'une voûte et sont, par conséquent, plus anciennes que le système revinien. La composition rapproche évidemment les roches qui constituent les bandes de Rimogne et de Fumay, la différence que présentent les schistes ardoisiers aimantifères et les schistes ardoisiers verts ou violets ne consistant que dans l'état particulier d'oxydation du fer qu'ils renferment, et pouvant être, par conséquent, considérée comme un simple effet de métamorphisme.

En 1868, Gosselet et Malaise [2] contestèrent la symétrie des deux côtés du quartzite blanc et observèrent de plus que les ardoises de Deville diffèrent de celles de Fumay, non seulement par la couleur, mais encore par la structure minéralogique et la composition chimique. Ils en conclurent que les diverses bandes traversées par la Meuse, de Bogny à Fepin, constituent des zones distinctes par leur âge, tout en déclarant qu'il leur était impossible de se prononcer sur cet âge. Ces vues, Gosselet les maintient dans *L'Ardenne* [3].

[1] *Loc. cit.*, p. 70.

[2] Gosselet et Malaise, *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, t. XXVI, 1868.

[3] Gosselet, *L'Ardenne*, p. 32.

D'autres auteurs, parmi lesquels von Lasaulx [1], se sont aussi occupés de la question, mais ne l'ont pas résolue. La Commission de la Carte géologique de Belgique a repris les idées de Dumont et les a admises comme base de sa classification.

C'est cette division que nous allons suivre dans les descriptions lithologiques, et nous considérerons ainsi successivement :

A. *Devillien :*

1° Quartzites devilliens;

2° Schiste ardoisier simple de Rimogne;

3° *a*) Schiste ardoisier violet de Fumay; *b*) Schiste ardoisier vert de Fumay;

4° Schiste ardoisier aimantifère de Monthermé-Rimogne.

B. *Revinien :*

1° Quartzites noirs;

2° Schistes ardoisiers noirs.

C. Quelques roches, d'importance secondaire, de ce massif.

A. SYSTÈME DEVILLIEN.

1. *Quartzites blancs et verts.*

Dumont [2] considérait deux variétés principales de quartzite : la première, blanchâtre ou d'un gris pâle, d'un aspect mat, grenue ou subgrenue, très cohérente, à cassure inégale, pouvant présenter des grains de quartz vitreux, ayant plus de 1 millimètre de diamètre, des veines de quartz blanc et des paillettes de mica (pyrophyllite pour Dumont); la deuxième variété, d'un gris verdâtre, légèrement translucide, subgrenue, à grains fins et serrés, à cassure droite ou légèrement conchoïde; on y trouve des paillettes de mica, de la chlorite, de la pyrite et quelquefois des octaèdres d'aimant. Par alté-

[1] Von Lasaulx, *Ueber die Tektonik und die Eruptivgesteine der französischen Ardennen, ins Besondere des Massivs von Rocroi*, p. 15.

[2] *Loc. cit.*, p. 50.

ration, ce quartzite se transforme en un grès plus ou moins friable, rougeâtre, jaunâtre ou blanchâtre.

Description microscopique. — Au point de vue microscopique, il est fort difficile de maintenir la division établie par Dumont, car les quartzites verts ne se distinguent des quartzites blancs que par la présence d'une quantité peu sensible de chlorite, qui leur donne leur coloration.

Tous ces quartzites sont constitués essentiellement par des grains de quartz maintenus ensemble au moyen d'un ciment micacé qui enserre en outre quelques éléments accessoires.

Les grains de quartz sont en général anguleux; leurs contours sont le plus souvent irréguliers, ce qui provient, suivant toute apparence, d'une recristallisation totale ou partielle qui s'est opérée sur place après le dépôt. Outre ces grains, qui sont les moins volumineux, il y en a d'autres, en plus petit nombre, moins anguleux, et interposés entre les premiers, de manière à laisser l'impression de la structure que nous qualifierions du nom de microporphyrique si nous avions affaire à des roches massives. Ces grains ont été soumis à des pressions intenses, qui se traduisent par certains caractères : l'extinction onduleuse et la présence de bandes d'extinction; tantôt les grains sont profondément fissurés, l'orientation optique restant la même dans toutes les portions du grain primitif; tantôt, au contraire, les diverses parties d'un même grain peuvent être orientées différemment, sans qu'il soit possible de découvrir, en lumière ordinaire, la moindre trace de cassure.

Nous avons noté dans un grand nombre de particules quartzeuses l'existence d'inclusions liquides et gazeuses, parfois en accumulations prodigieuses, et disposées en séries.

Il y a aussi des inclusions solides, consistant en petits microlites de rutile et d'apatite, les microlites se présentant comme de vraies *Thonschiefernädelchen;* il y a aussi parmi les corps inclus des particules jaunes, que nous pouvons considérer comme du fer titané en décomposition; mais la ténuité de ces particules ne permet pas de les déterminer avec une certitude absolue.

Dans toutes les préparations de ces roches, le ciment micacé est très

apparent; il est ou bien incolore et brillant, et alors constitué par de la séricite, ou bien il est verdâtre et de nature chloriteuse. Le seul indice qui permette de le distinguer en séricite ou en chlorite dans toutes les sections où les lamelles sont disposées à plat, est la différence de teinte et le dichroïsme de la chlorite. Dans le ciment se trouvent parfois interposées des paillettes de chlorite et de séricite, atteignant des dimensions suffisantes pour en permettre une détermination précise. Il est probable qu'à l'origine le ciment était entièrement sériciteux, et que la production de chlorite est due à un phénomène d'altération.

Les éléments accessoires observés sont relativement nombreux :

1° La tourmaline, en grains ou en prismes brisés, cassés, reconnaissable entre autres à son dichroïsme intense;

2° L'apatite, peu abondante, en sections hexagonales;

3° Le rutile, peu abondant;

4° Le zircon en grains à arêtes mousses et à indice de réfraction très élevé;

5° La limonite colorant en certains endroits le ciment micacé, mais trop peu abondante pour imprimer une coloration particulière à la roche;

6° et 7° L'ilménite et la calcite.

Enfin on peut observer, dans ces quartzites, des veines de quartz d'origine secondaire.

2. *Schiste ardoisier simple de Rimogne* [1].

C'est un schiste à feuilletage très parfait, parallèlement ou obliquement au plan de stratification; il présente un longrain suivant lequel il se laisse rompre plus facilement que suivant toute autre direction; sa teinte est grise ou gris bleuâtre, son éclat est légèrement soyeux; il est plus ou moins translucide sur les bords; il est aussi sonore et élastique. Par altération, il perd sa dureté, sa cohérence, son élasticité, et devient gris jaunâtre.

[1] Dumont, *loc. cit.*, p. 50.

L'analyse de cette roche [1] a donné :

SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	CaO	MgO	K_2O	Na_2O	H_2O
61.43	0.73	19.10	4.81	3.12	0.31	2.29	3.34	0.82	3.52

ce qui correspond à

Chlorite.	12.5 %
Séricite.	38 %
Quartz	40.5 %

Description microscopique. — Il n'y a pas dans cette roche d'éléments pouvant atteindre des dimensions macroscopiques, sauf la pyrite, dont les cubes peuvent, dans quelques cas, avoir jusqu'à plusieurs millimètres de côté. La masse fondamentale de la roche est constituée par un mélange de séricite et de quartz. La séricite est disposée en plaques, déterminant le feuilletage, à contours irréguliers, sinueux et arrondis; elle est incolore et brillante; entre nicols croisés, les sections parallèles à la schistosité restent à peu près entièrement éteintes; les lamelles coupées suivant tout autre plan interfèrent vivement. La teinte est le plus souvent bleuâtre, parfois légèrement verdâtre.

C'est dans les sinuosités des paillettes de mica que sont logés les grains de quartz, et ce fait explique pourquoi les contours de ces grains sont si peu nets; le quartz présente de nombreuses inclusions gazeuses.

Une particularité de structure importante pour ces schistes ardoisiers consiste dans la présence de granules ou petites paillettes noires, fusiformes, déterminées comme de l'ilménite; ces particules sont disposées en files ou en séries; elles sont allongées jusqu'à présenter parfois 1 millimètre de longueur, la largeur n'excédant presque jamais $0^{mm},15$; les contours sont irréguliers; ces particules sont aplaties ou lenticulaires, ce dont il est aisé de se rendre compte dans les sections taillées perpendiculairement à la schistosité.

Les éléments non essentiels du schiste ardoisier de Rimogne sont la chlorite, l'apatite et la tourmaline. La chlorite se présente en amas peu con-

[1] Renard, *loc. cit.*, pp. 73 et suivantes.

sidérables de paillettes; ces paillettes sont vertes, légèrement dichroïques, à couleurs d'interférence peu intenses; en sections normales sur la base, elles affectent une disposition en aiguilles; la chlorite forme en quelque sorte de petits nœuds, dans lesquels le feuilletage se continue. La tourmaline se trouve en prismes assez allongés et volumineux (50-60 μ), terminés d'un côté, souvent brisés, contenant de nombreuses inclusions, assez nombreuses même dans quelques cas pour masquer le dichroïsme.

Quant à l'apatite, elle est relativement abondante, présente des sections hexagonales ou prismatiques, et est bleuâtre; parfois elle se trouve en fragments très volumineux, à contours émoussés; toujours elle contient de nombreuses inclusions.

Le rutile, que nous avons également observé dans cette roche, à un état bien cristallisé, est moins abondant que dans le schiste ardoisier aimantifère; la partie la plus importante de l'oxyde de titane est restée dans l'ilménite, dans la composition de laquelle il entre pour 50 % environ. Le zircon est un autre élément accessoire; mais il ne s'observe pas dans toutes les préparations. En outre, il y a parfois des amas — rares, du reste, — de carbonate spathique, reconnaissables, entre autres caractères, à la netteté du clivage.

Une variété de ce schiste ardoisier, provenant de Monthermé, nous a paru assez intéressante pour être décrite en détail : la séricite est remplacée presque totalement par de la chlorite; toutes les paillettes d'ilménite ont subi un commencement d'altération, accompagné de production de rutile : elles se présentent sous forme de masses brunes ou jaunes, sans action sur la lumière polarisée; dans quelques-unes de ces masses, on découvre un réseau très serré de sagénite, et en observant avec attention, on aperçoit certains points interférant très vivement entre nicols croisés. Ce schiste contient aussi du zircon, de petits prismes de rutile, de l'apatite, des cristaux de tourmaline bleuâtre, pouvant atteindre $0^{mm},11$ de longueur, et un peu d'épidote.

Nous pouvons supposer que cette roche est une roche altérée : l'oxyde de fer de l'ilménite est passé dans le mica et a occasionné la production de chlorite, l'oxyde de titane constituant la sagénite.

3. *Roches devilliennes de la bande de Fumay.*

Dumont [1] rapproche ces roches de celles de la bande de Rimogne, dont elles se distinguent, d'après lui, par l'état d'oxydation et la dissémination du fer qu'elles contiennent. « A Fumay, le fer se trouve à l'état d'oxyde ferreux ou d'oxyde ferrique disséminé, colorant le schiste ardoisier en vert ou en violet, tandis qu'à Rimogne, Deville et Monthermé, il est à l'état d'aimant cristallisé en octaèdres dans les schistes ardoisiers grisâtres. »

Ces schistes ardoisiers sont feuilletables, obliquement au plan de stratification; les feuillets sont minces, cohérents, légèrement satinés et plus ou moins élastiques.

a) Schiste ardoisier violet.

C'est une roche violette, offrant une teinte uniforme, peu translucide, présentant parfois des taches et des zones d'un gris verdâtre, qui sont parallèles au plan de stratification et traversent les feuillets. Cette roche a déjà été étudiée au microscope, et une analyse qui en a été faite, a donné les résultats suivants [2] :

SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	CaO	MgO	K_2O	Na_2O	H_2O
61.07	1.80	20.01	5.85	1.18	0.19	1.87	3.29	0.90	3.25

ce qui se calcule en :

Séricite	42 %
Quartz	38 %
Chlorite	13 %
Oligiste	5 %

Description microscopique. — Au microscope, les schistes violets se montrent constitués par un enchevêtrement de paillettes de séricite et de

[1] *Loc. cit.*, p. 62.
[2] *Loc. cit.*, p. 73.

petits grains de quartz, ces deux éléments étant masqués en grande partie par les particules de fer oligiste, dont nous allons nous occuper immédiatement. Les grains de quartz sont arrondis ou elliptiques; les paillettes de séricite paraissent atteindre des dimensions un peu plus fortes que dans les autres schistes ardoisiers; il arrive même assez fréquemment que les feuillets de séricite soient accumulés de façon à former de petits nœuds, analogues à ceux que nous avons déjà signalés pour la chlorite.

Deux caractères principaux différencient cette roche des autres roches schisteuses devilliennes :

1° La teneur considérable en microlites de rutile;

2° La présence du fer oligiste.

Le fer oligiste offre deux aspects principaux : tantôt il se trouve en paillettes, à contours en général irréguliers, plus rarement hexagonaux; tantôt en petits grains arrondis, de dimensions très faibles et tellement abondants qu'ils masquent à peu près toutes les particularités de la roche. Ces grains et fragments d'oligiste, opaques à des grossissements moyens, deviennent transparents en rouge quand on les observe à l'aide d'objectifs puissants. Il y a en outre lieu de remarquer qu'au fur et à mesure qu'on s'éloigne de Fumay, c'est-à-dire qu'on se rapproche de Haybes et d'Oignies, les granules se trouvent en proportion de plus en plus considérable par rapport aux paillettes.

Quant au rutile, il est excessivement abondant dans la roche; il se présente en microlites d'une ténuité extrême, offrant tous les caractères distinctifs de ce minéral avec une grande netteté, ses macles propres et sa disposition à plat sur le plan de la schistosité. On peut dire que c'est dans cette roche devillienne que le rutile est le mieux développé; mais ses prismes ne sont pas volumineux.

Les éléments accessoires que nous avons observés sont l'apatite, la tourmaline et, en outre, de la calcite, qui est très probablement un produit d'origine secondaire.

b) Schiste ardoisier vert.

Il offre une teinte gris verdâtre pâle, uniforme, et une légère translucidité sur les bords; quelquefois la teinte était d'un vert jaunâtre et la translucidité était très faible, ce qui faisait dire à Dumont « qu'il possède une tendance à passer au coticule ».

L'analyse chimique de cette roche a donné :

SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	CaO	MgO	K_2O	Na_2O	H_2O
53.33	1.34	23.30	2.64	5.40	5.39	2.62	3.41	0.73	4.50

ce qui correspond à :

Séricite	38 %
Quartz.	28 %
Chlorite	33 %

Description microscopique. — Cette roche diffère assez notablement par sa structure du schiste ardoisier simple de Nimogne et de Monthermé. En général, le grain est beaucoup plus fin; l'ilménite est bien moins abondante et, dans quelques cas, elle est même complètement absente. En outre, on y observe la présence de nœuds, que nous décrirons plus loin.

La pâte est formée par des grains de quartz, cimentés par de la séricite. Les grains de quartz sont petits, elliptiques; leurs contours sont masqués par la séricite; les plus considérables atteignent $^1/_{20}$ de millimètre; dans quelques préparations, on peut discerner nettement les contours des grains de quartz, qui se montrent alors en général arrondis, quelquefois cependant anguleux; ils contiennent des inclusions liquides et gazeuses.

Quant à la séricite, elle affecte la même disposition que dans les roches décrites précédemment; elle est constituée par des lamelles auxquelles on observe parfois un contour hexagonal, assez grandes en général, disposées à plat suivant la schistosité qu'elles déterminent. Leur teinte est bleuâtre, parfois verdâtre. Assez souvent elles forment des accumulations qui constituent de petits nœuds.

Parmi les éléments accessoires, le plus important est de beaucoup la chlorite. Cette chlorite entre, comme la séricite, dans la composition de la pâte du schiste ardoisier, dans des proportions paraissant variables, pouvant être plus fortes que celles de la séricite. En outre, elle forme des accumulations lenticulaires, d'un vert grisâtre, des nœuds pouvant atteindre plusieurs millimètres; ces nœuds sont contournés par le feuilletage; leur nombre est très variable, et nous avons pu en compter jusqu'à quatre-vingt-seize sur un espace d'un centimètre carré; ils sont tantôt assez nombreux pour se toucher, tantôt, au contraire, leur présence est toute sporadique. Ils s'observent bien mieux entre nicols croisés, restant dans ce cas à peu près complètement éteints, tandis que le reste de la pâte interfère assez vivement; un élément accessoire de ces nœuds est l'ilménite.

Toutes les roches qui rentrent dans cette variété sont caractérisées par l'abondance des microlites de rutile; le rutile est bien cristallisé et offre les macles les plus variées; les petits prismes sont orientés dans tous les sens, mais toujours disposés à plat sur le plan du feuilletage; par conséquent, il est assez rare de les observer dans des sections perpendiculaires à la schistosité, autrement que sous forme de petits points jaunâtres.

La tourmaline est également abondante; ses dimensions sont très variables; en général, la longueur est très considérable par rapport aux autres dimensions, et elle peut atteindre 0.8 à 1 millimètre; les prismes sont hémimorphes; les deux extrémités présentent des faces et une teinte différentes; la couleur générale est le bleu. La tourmaline contient des inclusions solides, transparentes, qui paraissent être de l'apatite et qui sont parfois très volumineuses.

Il y a aussi dans ce schiste ardoisier assez bien d'apatite, en prismes hexagonaux, disposés, comme le rutile et la tourmaline, à plat sur la schistosité, avec des inclusions liquides et solides non déterminables.

D'autres éléments accessoires observés sont : la limonite en plaques jaunes ou brunes; du spath calcaire dans les fissures, parfois à disposition scalariforme; de l'ilménite en petite quantité; de la sagénite; de l'oligiste; un peu de zircon, et parfois un peu de magnétite.

4. *Schiste ardoisier aimantifère de Monthermé.*

Ce qui, d'après Dumont [1], distingue essentiellement le schiste ardoisier aimantifère du schiste ardoisier simple, c'est la présence de petits octaèdres d'aimant, orientés par files dans le sens du longrain, ce qui les fait paraître allongés dans ce sens. Les cristaux d'aimant peuvent atteindre, quoique rarement, 1 millimètre de longueur; ils font saillie à la surface des feuillets qu'ils rendent ainsi inégale. La couleur du schiste ardoisier est grisâtre; elle peut aussi être bleuâtre ou verdâtre. Par altération, le fer aimant se transforme en limonite, que cette transformation soit accompagnée ou non de l'altération du schiste lui-même en une masse terreuse, brunâtre et friable.

Les analyses de cette roche ont donné [2] :

I. Schiste ardoisier aimantifère de Rimogne (Klement).

II. Schiste ardoisier aimantifère de Monthermé (Renard).

	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	Fe_3O_4	FeO	CaO	MgO	K_2O	Na^2O	H^2O
I.	58.78	2.28	19.52	1.87	4.50	2.67	0.21	2.21	3.11	1.24	2.24
II.	59.91	1.46	19.51	2.74	3.81	2.87	0.40	2.35	3.30	1.57	3.46

ce qui correspond à :

Séricite	42-47 %
Quartz	34.5-36.5 %
Chlorite	11.5-12 %
Magnétite	4-4.5 %

Description microscopique [3]. — Les éléments constitutifs de la pâte du schiste ardoisier en question sont la séricite et le quartz. Les grains de quartz ont, en général, 10 μ; il y en a qui atteignent 15 μ; ils sont ordinairement anguleux, mais leurs contours sont cachés par les masses

[1] *Loc. cit.*, p. 50.

[2] *Loc. cit.*, pp. 10 et 11.

[3] Renard, *loc. cit.*, pp. 44 et 10; Geinitz, *Der Phyllit von Rimogne in den Ardennen;* Cohen, *ibid.* (Neues Jahrb. f. Min. u. Geol., 1882, t. II, p. 67).

micacées environnantes; les inclusions semblent rares, sauf quelquefois des inclusions d'apatite.

La séricite, d'autre part, se présente en paillettes disposées parallèlement les unes aux autres et déterminant la schistosité de la roche; les sections transversales, c'est-à-dire celles qui ne sont pas faites suivant la base, montrent des teintes très vives entre nicols croisés.

Dans plusieurs roches, la chlorite, un des éléments constitutifs des nœuds de fer aimant, comme nous le verrons plus loin, ne reste pas confinée à ces nœuds, mais se trouve encore en plusieurs endroits, sous forme de petites accumulations de feuillets ou de paillettes. Il est difficile de dire si cette chlorite provient des nœuds, d'où elle aurait été séparée par des remaniements de la roche postérieurs à la genèse des nœuds, ou bien si elle s'est formée à la place qu'elle occupe encore maintenant.

Les éléments accessoires les plus abondants et les plus constants sont l'apatite, le rutile et la tourmaline.

L'apatite, sur l'abondance de laquelle l'attention n'a pas encore été attirée, se présente en sections hexagonales ou prismatiques; sa teinte est bleuâtre; son indice de réfraction assez élevé détermine un relief accusé; elle contient presque toujours des inclusions nombreuses, agglomérées au centre du cristal, et dont il est impossible de déterminer la nature.

La tourmaline se trouve en prismes terminés à une extrémité, paraissant entièrements intacts, sans arêtes mousses ni lignes de cassure; la longueur est toujours assez considérable : 40 μ et plus; rarement elle est plus faible. Le dichroïsme est très net, dans les tons bleus et non dans les tons bruns. Les prismes sont couchés sur le plan des feuillets, comme les prismes de rutile. Ces derniers sont très fortement biréfringents; ils présentent des macles variées. On remarque aisément que la tourmaline et le rutile sont plus abondants dans le voisinage des nœuds que partout ailleurs dans la pâte du schiste ardoisier; et, quoiqu'il ne soit pas possible pour le moment de la déterminer, il est probable qu'il y a une relation, de nature génétique ou autre, entre nœuds de magnétite, rutile et tourmaline.

D'autres éléments observés dans les schistes ardoisiers aimantifères, mais en quantité moindre, sont le graphite et des particules charbonneuses, de l'ilménite, des grains d'oligiste, des fragments de carbonates rhomboédriques

d'origine secondaire, rarement du zircon, et un minéral jaune, analogue peut-être à celui que Götz considère comme du rutile, recouvert d'un enduit d'oxyde de fer. Il y a aussi des amas bruns, pour la plupart sans action sur la lumière polarisée, que nous pouvons considérer comme de l'ilménite en voie d'altération. Le graphite se présente à l'état de lamelles hexagonales, à contours plus ou moins nets, noires et opaques, à surface plus lisse et plus polie que la magnétite. Le carbone peut encore se trouver dans les roches sous forme de petites particules extrêmement ténues et très abondantes.

Quant aux nœuds de fer aimant, dont une étude détaillée a déjà été faite, ils se composent chacun essentiellement d'un cristal de magnétite sur les faces duquel sont appliqués des feuillets de chlorite.

Le type primitif de ces nœuds est bien développé dans une ardoise provenant de Château-Regnault : la chlorite y est intimement appliquée sur les faces de l'octaèdre de magnétite et comprend une série de feuillets disposés les uns sur les autres et orientés suivant les faces de l'octaèdre. Il s'ensuit que par le dichroïsme, ce sont les feuillets appliqués sur les faces parallèles qui, avec un seul nicol, sont simultanément soit verts, soit jaunâtres. Il ressort à toute évidence de cette disposition que la chlorite ne s'est formée qu'après le fer aimant; d'autre part, le quartz manquant à peu près absolument dans tous les nœuds, sauf sous forme de quelques grains interposés sporadiquement entre les feuillets de chlorite, on doit admettre que dans les roches considérées, ce n'est pas, à proprement parler, un élément constitutif des nœuds, mais seulement un élément secondaire, quoique presque toujours présent. Le signe de la biréfringence est négatif, de sorte qu'on aurait affaire, d'après les recherches récentes de Michel Levy, non à du quartz, mais à de la calcédoine biaxe.

Dans la plupart des préparations examinées, la calcédoine est présente et les nœuds répondent à la description qui en a été donnée par Geinitz et Renard. Dans plusieurs préparations provenant de Deville, les cristaux de fer aimant sont simplement enchâssés dans la masse du schiste ardoisier, sans être accompagnés de chlorite ou de calcédoine. Dans d'autres cas, — déjà signalés par Geinitz, — c'est de la pyrite qui joue le rôle de la magnétite, sans que l'aspect et la structure des nœuds subissent des modifications de

ce chef. Quand la roche s'altère, la magnétite passe assez fréquemment sur les bords à l'état de limonite. Il peut arriver que, outre la pyrite, on trouve encore de l'oligiste dans les schistes considérés; c'est le cas notamment pour un échantillon provenant de Deville. Remarquons, pour terminer, que les dimensions des octaèdres d'aimant sont variables entre de larges limites : Dumont [1] en cite qui atteignent 1 centimètre de longueur; dans les roches, cependant, les dimensions sont comprises entre $^1/_2$ et $^1/_{20}$ de millimètre. Si l'on chauffe un nœud de fer aimant, la partie verte devient brune : c'est le protoxyde de fer qui passe à l'état de peroxyde; on peut y voir une preuve de plus que ce n'est pas du mica, comme l'avait prétendu Geinitz, mais bien de la chlorite, comme Cohen et Renard l'ont déterminée. Si la pyrite d'un nœud a été entièrement enlevée par les eaux d'infiltration, le vide circonscrit par la chlorite se remplit ordinairement de quartz et de calcite secondaires.

B. SYSTÈME REVINIEN.

1. *Quartzites noirs.*

Ce quartzite [2], qui forme des bancs massifs ou schistoïdes, subgrenus, à grains rarement distincts, présente une cassure droite ou largement conchoïde et écailleuse. Sa teinte est d'un gris bleuâtre, plus ou moins foncé; son éclat, nul. Les bancs sont traversés par des veines de quartz blanc, cristallin. Les bancs schistoïdes sont pailletés de séricite, surtout à la surface des feuillets; enfin, on trouve dans ces quartzites, principalement dans ceux dont la couleur est d'un noir bleuâtre, des cubes de pyrite ou de limonite épigène, pouvant avoir 1 centimètre de côté.

Description microscopique. — Les quartzites reviniens se distinguent à première vue des quartzites devilliens du même massif : tandis que les grains de quartz sont disposés chez ces derniers de manière à rappeler la structure microporphyrique des roches massives, les quartzites reviniens sont formés de grains de quartz ayant à peu près tous la même taille et réunis

[1] *Loc. cit.*, p. 51.
[2] *Loc. cit.*, p. 72.

par un ciment micacé, incolore, relativement abondant et représentant environ le tiers de la masse totale de la roche.

Les grains de quartz sont généralement anguleux et paraissent avoir recristallisé tout au moins sur les bords, après le dépôt; quelques-uns ont les arêtes mousses. Ils contiennent des inclusions en grand nombre, surtout des inclusions liquides, reconnaissables à la libelle et disposées sans ordre apparent. L'extinction onduleuse s'observe assez fréquemment; il y a également des fissures, mais elles sont peu nombreuses et peu considérables. Dans quelques plages des préparations, la proportion de matière micacée s'accroît fortement par rapport à celle des grains de quartz.

Le ciment micacé est incolore; il polarise très vivement entre nicols croisés; il se compose de petites aiguilles de séricite enchevêtrées les unes dans les autres; en quelques endroits, il présente une teinte légèrement verdâtre, ce qui est dû peut-être à la présence d'un peu de chlorite. Parfois la séricite constitue des accumulations de forme irrégulière.

Les éléments accessoires de ces quartzites sont, outre la chlorite déjà signalée et du reste peu importante, le zircon, le rutile, la tourmaline et la pyrite.

La pyrite s'y trouve en grains volumineux, opaques et légèrement transparents sur les bords; elle présente de nombreuses traces d'altération due à des infiltrations; la plus commune est la production de limonite, qui est répandue autour de la pyrite dans le ciment micacé et qui communique à celui-ci une teinte rougeâtre ou jaunâtre.

La tourmaline est assez abondante; elle se présente sous la forme de prismes un peu plus longs que larges, non terminés, à dichroïsme bien net dans les tons bruns. Quelques prismes sont cassés perpendiculairement au grand axe.

Le zircon est aussi abondant; il est en grains allongés, à contours émoussés par le transport; les bords sont foncés; l'indice de réfraction est très élevé.

2. *Schistes noirs reviniens.*

Ce sont des schistes très feuilletables; les feuillets sont plans et disposés parallèlement ou obliquement aux joints de stratification; ils sont cohérents,

sonores, à bords tranchants; la couleur est gris bleuâtre; l'éclat est faiblement luisant. Dumont [1] considère le schiste noir pyritifère comme une variété spéciale, mais l'examen microscopique ne justifie pas suffisamment cette distinction; il renferme de la pyrite en cubes ou en dendrites, de la limonite épigène cubique ou sous forme d'enduits brunâtres ou irisés, des cavités cubiques qui ont servi de gîte à des cristaux de pyrite, et des inflorescences de sulfates d'alumine et de fer. On trouve en outre beaucoup de veines de calcaire lamellaire et rarement un lit très mince d'anthracite.

Description microscopique. — L'examen des préparations de ces roches présente des difficultés très considérables, résultant principalement de l'abondance des particules noires de diverse nature, qui obscurcissent et masquent les caractères des autres minéraux et qui se trahissent extérieurement par la coloration noire qu'elles impriment à la roche.

Comme dans les schistes ardoisiers devilliens, les éléments constitutifs sont le quartz et la séricite; la chlorite ne joue qu'un rôle subordonné.

En général, les grains de quartz visibles sont peu nombreux; ceux que nous avons observés sont elliptiques, discoïdes et contiennent des inclusions liquides; dans quelques cas, nous avons remarqué, à l'intérieur des grains, des aiguilles de rutile.

La séricite se trouve à l'état de paillettes ou d'aiguilles micacées, incolores, à contours irréguliers, polarisant vivement entre nicols croisés.

La couleur foncée du schiste, qui est un caractère important de ces roches, est due :

1° A la présence d'une quantité prodigieuse d'aiguilles infiniment petites de rutile, sous forme de *Thonschiefernädelchen*, visibles seulement aux grossissements les plus considérables;

2° A l'existence d'un fond noirâtre de poussières très ténues, réparties dans toute la masse, recouvrant tous les éléments et probablement de nature charbonneuse;

3° A la présence d'ilménite et de pyrite. La présence de l'ilménite ne doit pas nous étonner à côté du rutile. Quant à la pyrite, elle se retrouve

[1] *Loc. cit.*, p. 75.

à l'état microscopique, tantôt sous forme de cristaux, comme Dumont en a décrits dans son mémoire, tantôt sous forme de veines ou de filonnets.

Nous avons examiné une section de veine de pyrite; elle était composée d'une succession, d'un enchaînement de petits cristaux attachés les uns aux autres, aux contours extérieurs régulièrement terminés et enclavés dans une matière siliceuse de quartz, et non de calcédoine, comme il semble qu'on aurait pu s'y attendre. Sur le bord, une partie de la pyrite s'est altérée en limonite, et c'est autour de cette limonite que s'est concrétionnée la silice; le quartz est très pur et les prismes qui le constituent sont orientés avec leur grand axe perpendiculairement à la surface d'insertion.

La quantité de matière charbonneuse est très variable dans les divers échantillons; la même remarque s'applique aux microlites de rutile.

Un phénomène fort curieux — assez fréquent du reste — dans ces schistes noirs, consiste dans l'alternance des bandes claires et obscures dans les préparations, alternance présentant la plus complète analogie avec celle que nous observons dans des roches où se sont produits des phénomènes fluidaux. Les parties les plus claires sont privées à peu près complètement de particules charbonneuses et composées d'un assemblage de quartz et de séricite; les grains de quartz sont relativement volumineux, anguleux ou arrondis, aplatis ou sphériques; ils renferment des inclusions gazeuses; il convient aussi de dire que ces parties claires ne renferment pas de rutile; dans les bandes obscures, par contre, les grains de quartz et de séricite sont moins volumineux, et il s'y ajoute du rutile, des grains noirs entièrement opaques d'ilménite et des particules noires charbonneuses. En quelques endroits, les particules noires se sont altérées assez profondément, le fer qui y était présent ayant passé à l'état de limonite, le rutile restant toujours parfaitement développé.

Les autres éléments accessoires sont la tourmaline, l'oligiste et l'apatite en proportions variables.

La schistosité, que l'on observe si parfaitement sur les échantillons, est aussi très sensible dans les préparations microscopiques. Ce schiste ardoisier est, avec le schiste ardoisier violet de Fumay, celui où les éléments sont le plus petits et où la structure est, par conséquent, le plus complètement aphanitique.

C. ROCHES SUBORDONNÉES.

1. *Schiste ardoisier noir de Monthermé.*

C'est une roche schisteuse composée de grains de quartz plus volumineux que ceux qui se trouvent généralement dans les schistes ardoisiers ardennais et assez abondants pour déterminer l'existence de zones entièrement claires et transparentes; ces grains présentent de nombreuses inclusions liquides et gazeuses.

Les zones noires, qui sont disposées parallèlement à la schistosité et qui provoquent, par conséquent, une structure bandée, ont des contours irréguliers; il nous a été impossible de déterminer la nature des particules noires auxquelles ces zones doivent leur coloration; elles sont probablement charbonneuses.

Cette roche se rapproche beaucoup des roches reviniennes, dont elle ne se distingue, en somme, sauf quelques particularités de structure peu importantes, que par la dimension des grains de quartz.

2. *Schiste ardoisier ottrélitifère de Monthermé.*

C'est une roche d'une teinte noirâtre, contenant de l'ottrélite. L'ottrélite est plus ou moins altérée; son dichroïsme est faible, mais encore apparent du bleu clair à l'incolore; les faces supérieure et inférieure (001) sont régulièrement terminées, les autres contours sont sinueux. Les cristaux d'ottrélite sont recouverts partiellement de poussières noires; ils sont orientés dans tous les sens, sans aucun rapport avec la schistosité, ce qui est du reste le cas dans les roches ottrélitifères.

Quant à la roche elle-même, elle contient une quantité considérable de mica, et les teintes de polarisation de l'ensemble sont très vives.

La coloration noire de certaines zones est due :

1° A la présence d'une grande quantité de microlites de rutile très ténus;

2° A l'existence dans la roche d'ilménite, minéral noir et opaque, à contours irréguliers, sur lequel sont implantées des aiguilles de rutile;

3° A des poussières fines, de nature charbonneuse.

La masse fondamentale est composée, comme dans les autres schistes ardoisiers, de quartz et de séricite.

3. *Schiste ardoisier revinien* [1].

C'est une roche remarquable, tant par sa structure que par la diversité des éléments qui entrent dans sa composition.

La pâte est composée de quartz et de séricite, mais — chose curieuse — les feuillets de séricite, qui sont très longs et très minces, sont serrés les uns contre les autres, sans interposition de quartz. Le quartz, à son tour, forme des accumulations de grains pouvant être assez considérables pour donner par places l'illusion d'un quartzite; les grains sont anguleux et remplissent toutes les cavités de la roche.

De cette disposition des deux éléments principaux résulte une structure bandée très fortement marquée. Entre les feuillets sont disposés des cristaux d'ottrélite et de zoïsite. L'ottrélite est très fortement altérée et fusiforme, entourée d'une zone plus claire. Quant à la zoïsite, élément dont la présence n'a pas encore été signalée dans des roches schisto-cristallines, elle se présente en fragments à contours irréguliers, sans arêtes, fendillés dans tous les sens, légèrement dichroïques du verdâtre à l'incolore, d'un éclat nacré, et donnant entre nicols croisés une teinte bleue très profonde.

Comme éléments accessoires, il nous reste à signaler :

1° Des particules noires, opaques, irrégulièrement terminées d'ilménite, altérées en brun avec quelques implantations de rutile, assez rares du reste, ce dernier minéral ne se retrouvant pas autrement dans la roche;

2° Des grains brisés de zircon, à relief fortement accusé;

3° De la limonite, faisant office de pigment en quelques endroits;

4° Des sections hexagonales d'apatite, avec ses inclusions si caractéristiques.

[1] Provient du chemin de Revin, dans le voisinage de la cense Jacob.

MASSIF DU BRABANT.

DISTRIBUTION GÉOGRAPHIQUE.

Le massif du Brabant s'étend dans les provinces de Brabant, de Hainaut et de Liége; partout il est recouvert par des dépôts plus récents. Il s'ensuit que la contrée est loin de présenter le même aspect que les régions de Stavelot et de Rocroi. Les roches cambriennes n'affleurent qu'au fond des vallées, où elles ont été mises à découvert par l'érosion, et cela dans les vallées de la Senne et de la Sennette, de la Dyle et de la Geete. En outre, des roches cambriennes, surtout des quartzites, apparaissent en quelques points isolés dans la même région, notamment entre Opprebais et Thorembais-Saint-Trond, à Jauchelette, Offus, etc.

Le point le plus septentrional où le massif affleure est à Buysinghen, près de Hal; outre quelques schistes simples ou aimantifères, présentant de l'analogie avec les schistes de Tubize, on y découvre une carrière abandonnée de quartzite rose, rapportée aux quartzites de l'assise I (= devillien inférieur dans la légende de la Carte). En remontant le cours de la rivière jusqu'à Tubize et Clabecq, en passant par Hal, Rodenem, Lembecq et Malheyde, on peut trouver des affleurements de schistes gris verdâtre, souvent aimantifères, fréquemment altérés; en plusieurs endroits, les schistes sont accompagnés d'arkose (entre autres à Rodenem et Malheyde) et de bancs de quartzite intercalés. Ces roches constituent l'assise II.

A mesure qu'on s'avance vers le sud, la teinte de la roche schisteuse devient plus foncée, et à partir de Tubize jusqu'à Quenast, et de Clabecq jusqu'à Ittre par Oisquercq, on n'observe que des schistes ardoisiers gris bleuâtre, exploités pour dalles à Stihoux; ces schistes ont formé les roches types de l'assise III de Malaise et ont été notés dans la légende de la Carte d'abord Dvm, Dvn, et dans la suite Rv. L'aspect de ces roches se rapproche quelque peu de celui des roches reviniennes du massif de Stavelot; les schistes ont subi dans quelques cas des altérations très profondes et sont devenus entièrement rouge brique (Oisquercq).

Dans le bassin de la Dyle, on peut aussi, suivant la légende de la Carte, distinguer les trois assises : le devillien inférieur, composé de quartzite bleuâtre ou verdâtre, passant par altération au rougeâtre ou au blanchâtre, se rencontre au point le plus septentrional où le massif affleure dans la vallée, au sud-est de Wavre; mais il atteint son développement maximum à Blanmont, où il existe de vastes carrières de quartzite, et aux environs de cette localité (Hévillers, Nil-Pierreux, Nil-Saint-Vincent, etc.). Le devillien supérieur, qui est constitué par du schiste gris verdâtre, aimantifère, accompagné d'arkose et de bancs subordonnés de quartzite, est moins important que dans le bassin de la Senne; il se trouve un peu au sud de Wavre et se prolonge dans la même direction, par Limal et Limelette, jusqu'à Ottignies, est coupé ici par une zone à schistes noirs et se retrouve à l'est à Court-Saint-Étienne. La zone à schistes noirs de Court-Saint-Étienne a été rapportée au revinien; le schiste peut y être graphiteux et est généralement pyritifère.

Dans les vallées de la Grande et de la Petite Geete, la disposition respective des trois massifs est des plus irrégulières; aux environs de Jodoigne se rencontrent des roches noires pailletées, que Dumont considérait à tort comme ottrélitifères et qui seraient, d'après la Carte, des roches reviniennes; l'assise II manque complètement, et si l'on s'avance vers le sud, on observe des masses importantes de quartzite devillien inférieur à Dongelberg et Jauchelette, Glimes, Thorembais-Saint-Trond et Perwez.

Remarquons enfin que le quartzite se trouve encore à Offus et en quelques autres endroits.

HISTORIQUE.

Les premiers travaux un peu importants sur la nature des roches primaires du Brabant parurent en 1837-1838. A. Dumont communiqua alors à l'Académie, dans les rapports sur les travaux de la carte géologique [1], le résultat de ses observations sur le terrain ardoisier du Brabant; il y distingua deux systèmes qu'il identifia avec les deux systèmes inférieurs du terrain ardoisier

[1] *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1re série, t. III et V.

de l'Ardenne, dans lequel il avait établi trois systèmes l'année précédente. En 1838, à la suite d'un voyage fait en Angleterre avec d'Omalius d'Halloy et de Verneuil, il assimila le terrain ardoisier de l'Ardenne et du Brabant au système cambrien. Plus tard, en 1847-1848, dans son mémoire sur les terrains ardennais et rhénan [1], il décrivit complètement la formation ardoisière du Brabant et la rattacha, en se fondant sur des analogies lithologiques, au terrain rhénan. Il divisa le massif en deux systèmes : le gedinnien et le coblenzien, les roches qui nous occupent dans le présent travail étant toutes gedinniennes. Le gedinnien inférieur était constitué presque entièrement par du quartzite, avec des couches peu épaisses de schiste ardoisier simple et de schiste noir pailleté (aux environs de Jodoigne). Les roches qui composent le gedinnien supérieur sont du quartzite verdâtre et de l'arkose, des schistes simples et aimantifères, et se rencontrent dans les deux bassins hydrographiques de la Senne et de la Dyle. Enfin, un certain nombre de roches, classées actuellement comme cambriennes, correspondent à une partie du taunusien de Dumont, notamment les roches de Court-Saint-Étienne, Franquenies (schiste grenatifère), Clabecq, etc. En 1860, M. Gosselet trouva des fossiles siluriens à Grand-Manil et démontra que le massif du Brabant appartenait en partie au terrain silurien; en 1862, la collection des fossiles recueillis par M. Malaise mit hors de doute l'âge des couches en question. En 1873, M. Malaise, en réponse à une question de concours de l'Académie, publia une monographie des terrains du Brabant : il considéra quatre assises. Plus tard, en 1883, à la suite de nouvelles recherches, ce savant distingua dans cette région des assises qui devaient être rapportées au cambrien : ce sont celle des quartzites de Blanmont (I), celle des schistes aimantifères de Tubize (II) et celle des schistes bigarrés d'Oisquercq (III). La Commission de la Carte géologique de Belgique admet que l'assise I est du devillien inférieur, à l'exception des roches pailletées de Jodoigne, qui seraient du revinien; l'assise II devient du devillien supérieur, avec les bancs d'arkose subordonnés; l'assise III fut considérée comme du revinien. Toutefois, cette assise serait peut-être, en quelques endroits, du devillien d'un facies particulier et supérieur aux deux étages de l'Ardenne.

[1] *Mém. cour. et aut. mém. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1848-1849.

*
* *

Dans les pages suivantes, nous examinerons les roches que nous avons recueillies dans les diverses localités, au point de vue lithologique, et nous verrons s'il y a lieu d'établir une relation entre elles. Nous aurons ici à surmonter deux difficultés :

1° Celle de dénommer et de reconnaître les différentes variétés de roches;

2° Celle qui résulte des modifications amenées très probablement par les roches plutoniennes.

Nous envisagerons ainsi successivement :

1° Les quartzites;

2° Les schistes;

3° Les arkoses.

A. QUARTZITES.

Dumont les décrit de la manière suivante : « Le quartzite est formé de quartz hyalin vitreux, transparent ou translucide, en grains inégaux, plus ou moins distincts, qui n'atteignent jamais la grosseur d'un pois et qui sont tellement unis qu'ils paraissent fondus ensemble. On y distingue rarement quelques paillettes nacrées, des points très fins d'orthose d'un blanc mat (?), ou de petits fragments de schiste ardoisier grisâtre, plus ou moins altéré. Il est en bancs massifs, rarement stratoïdes, durs, tenaces, à cassure inégale, quelquefois subconchoïde et écailleuse, à bords tranchants et translucides, d'un éclat cireux ou mat, de couleur blanchâtre, gris pâle, etc., et traversé par des veines de quartz blanc laiteux, ou par des fentes tapissées par des cristaux de quartz hyalin, prismé, limpide ou rosâtre. Les bancs sont puissants, horizontaux, ondulés ou verticaux, juxtaposés ou séparés par des lits de schiste simple. »

DESCRIPTION MICROSCOPIQUE.

1. *Nil-Saint-Vincent.*

Les quartzites de cette localité se composent essentiellement de grains de quartz de même dimension moyenne et à contours généralement anguleux. Il y a, outre ces grains qui se présentent entièrement comme s'ils s'étaient formés sur place :

1° Des grains de quartz, de grande dimension, parfois 2-3 millimètres, entièrement arrondis par le frottement et dans lesquels seuls les angles émoussés indiquent le transport, très souvent brisés en un grand nombre de fragments, les fragments n'étant pas séparés par du ciment; la dimension de ces grains est cependant fort variable, et il n'est pas rare d'en rencontrer au milieu des grains anguleux, qui constituent la majeure partie du quartzite;

2° Des plages de quartzite à grain plus fin que la masse générale et offrant les mêmes caractères que celle-ci.

Dans certaines parties de la roche, le ciment est entièrement siliceux, et même dans des fragments fort considérables du quartzite, la proportion de mica est réduite à une quantité négligeable. Assez fréquemment, les grains de quartz volumineux, qui paraissent homogènes à la lumière ordinaire, se décomposent entre nicols croisés en une espèce de mosaïque, dont toutes les parties sont orientées différemment. L'extinction onduleuse, qui semble résulter de phénomènes de pression plus intenses, est plus rare. Outre des interpositions de rutile et d'apatite, il y a lieu de signaler la présence d'inclusions liquides, parfois en quantité relativement considérable.

Quant au ciment, il semble manquer absolument dans quelques cas, mais alors il est siliceux, et les contours primitifs des grains ne sont pas visibles. Le plus souvent toutefois, le ciment est micacé, le mica étant de la séricite; le ciment peut être aussi de la chlorite, colorée en rouge par un enduit de limonite.

Les minéraux accessoires et constants sont :

1° La tourmaline, qui est de tous le plus abondant; elle se présente tant à l'état de petits cristaux de forme irrégulière, qu'à l'état de prismes plus ou moins allongés. Elle est bleuâtre ou brunâtre;

2° Le zircon, qui se trouve en quantité variable; les grains sont petits et brisés;

3° Le rutile, qui s'observe à l'état de cheveux de Vénus dans le quartz, et à l'état de microlites — fort rares, il est vrai, — dans la pâte. Quelquefois on le voit émerger à l'état de fines aiguilles, d'amas bruns qui sont de l'ilménite en voie d'altération;

4° L'apatite;

5° La biotite, très rare;

6° La limonite, produit secondaire, à l'état d'enduit.

L'impression générale est que la plupart des éléments ont recristallisé sur place. Remarquons que c'est dans ces quartzites que l'on a trouvé le mispickel et d'autres minéraux assez remarquables. Une analyse de ce quartzite nous a donné les résultats suivants :

I. 1gr,1052 de substance, séchée à 110° et traitée par les carbonates alcalins, ont donné 1gr,074 de silice, 0gr,023 de Fe_2O_3 et Al_2O_3 et 0gr,0029 de CaO.

II. 0gr,578 de substance, séchée à 110° et traitée par les carbonates alcalins, ont donné 0gr,567 de silice, 0gr,009 de Fe_2O_3, 0gr,0014 de Al_2O_3, 0gr,0004 de CaO.

III. 1gr,152 de substance, séchée à 110°, ont donné comme perte au feu 0gr,005, soit 0.43 °/₀.

	I.	II.	III.
$SiO_2 + TiO_2$ . . .	97.18	98.20	
Al_2O_3	2.08	0.23	
Fe_2O_3		1.55	
CaO	0.26	0.07	
MgO.	traces	traces	
Mn	traces	traces	
Perte au feu . . .			0.43
	99.95	100.48	

2. *Blanmont.*

Les quartzites de Blanmont ne diffèrent que légèrement de ceux de Nil-Saint-Vincent; la masse fondamentale se compose tant de grains de dimensions moyennes que de grains de faibles dimensions, réunis par du ciment en général abondant. Les contours sont irréguliers et anguleux. Les inclusions de nature liquide sont nombreuses. Dans quelques grains roulés de 2-3 millimètres, on observe l'extinction onduleuse; dans d'autres cas, il y a des phénomènes de cassure.

Le ciment micacé est en général abondant entre les grains de quartz; il est coloré en quelques endroits par des enduits ferrugineux. La chlorite, qui entre aussi dans la composition du ciment, se présente parfois en paillettes considérables, qui permettent directement l'observation du dichroïsme.

Les éléments accessoires, fort abondants dans cette roche, sont la tourmaline, le rutile, l'apatite, la limonite, un peu de zircon et quelques paillettes d'ilménite intacte ou altérée.

Le quartzite de Blanmont se distingue des autres par la finesse et la ténuité des éléments qui le constituent.

Dans une des préparations, nous avons noté un filon de pyrite, composé de cristaux soudés les uns aux autres et présentant sur leur bord antérieur des sections régulières de cube, dodécaèdre pentagonal, etc.

3. *Opprebais.*

La structure des quartzites de cette localité rappelle celle des quartzites devilliens : les grains les plus volumineux portent tous les indices du transport, les grains plus petits les entourent et remplissent tous les vides. Le ciment reste abondant. On observe des inclusions de rutile : des cassures importantes et profondes, et le phénomène de l'extinction onduleuse dans les gros grains.

Le ciment est de nature sériciteuse; un peu de chlorite entre dans sa composition. Les paillettes vertes de chlorite sont en général plus étendues

que les paillettes de séricite, et s'en distinguent, outre les caractères ordinaires, par leur altération plus profonde, allant jusqu'à la production d'un enduit ferrugineux.

Parmi les éléments accessoires, le plus remarquable est de beaucoup le zircon, qui, s'il est peu abondant, se trouve en fragments très volumineux; quelques cristaux ont été brisés sur place; les joints de fracture sont remplis, non de quartz, mais de matière micacée, notamment de séricite qui y a été poussée sous l'effet de la pression.

Il y a en outre du rutile, de la tourmaline, un peu d'apatite et de la pyrite.

5. *Nil-Pierreux.*

Les grains de quartz ont des dimensions variables; ils sont plus ou moins arrondis, ce qui décèle nettement leur origine clastique. Parfois les contours sont très irrégulièrement sinueux; presque tous présentent l'extinction onduleuse ou l'extinction par bandes; les cassures sont fréquentes et profondes, souvent accompagnées d'interposition de ciment entre les fragments. Les inclusions sont parfois assez abondantes pour troubler la transparence des grains : inclusions de petites poussières noires, de paillettes de mica, d'apatite; en outre, des inclusions liquides et gazeuses pouvant être disposées en sections régulières.

Le ciment est composé d'un mélange de fort petits grains de quartz et de mica. Il est possible que les grains de quartz résultent de la destruction de grains plus considérables et que la séricite se soit interposée dans la suite. Le ciment était primitivement de la séricite; plus tard, la séricite a disparu et sa place est occupée par de la chlorite vert jaunâtre, légèrement dichroïque, en feuillets assez épais.

Parmi les éléments accessoires, le plus important est sans contredit la pyrite, qui cependant est encore loin de présenter le même développement que dans les arkoses; elle se trouve en petits cristaux ou en granules opaques, jaunâtres vers le bord. Il y a aussi du rutile en petits prismes, et de la limonite colorant le ciment. Plusieurs échantillons sont sillonnés de veinules de quartz hyalin, que l'on observe très nettement dans les préparations.

5. *Thorembais-Saint-Trond.*

Le quartzite de cette localité est remarquable par suite de la netteté de la structure pseudo-microporphyrique; il contient des grains de quartz fort gros, — ceux de 2 millimètres sont fréquents, — autour desquels se rangent les grains plus petits et plus abondants. Peu de fractures; l'extinction onduleuse est assez rare. Les inclusions liquides sont nombreuses.

Le ciment est un élément constitutif peu important dans cette roche; il est en majeure partie sériciteux, avec un peu de chlorite qui s'accumule parfois en amas considérables, disposés irrégulièrement; ce ciment est recouvert d'une poussière noire, rouge en certains endroits et colorant la roche.

A part la pyrite et un peu de limonite épigène, il n'y a pas d'éléments accessoires.

6. *Perwez.*

Le quartzite de Perwez est fort siliceux et ne se compose pour ainsi dire que de grains de quartz de même dimension, subanguleux ou arrondis, présentant pour la plupart l'extinction onduleuse ou l'extinction par bandes, et contenant de nombreuses inclusions liquides. Quantité de grains se sont brisés, et après la fracture le ciment a pénétré entre les divers fragments. Le ciment qui, à un moment donné, a été chloriteux, s'est presque totalement converti en limonite, le quartz tranchant sur l'altération générale par la fraîcheur de son aspect; il y a aussi dans le ciment de petites lamelles de séricite peu importantes.

7. *Jauchelette.*

Les quartzites que l'on trouve dans le petit massif de Jauchelette rappellent assez bien les roches reviniennes du massif de Rocroi : c'est la même structure consistant dans la réunion de grains de quartz subanguleux et de même dimension par un ciment micacé; toutefois, l'égalité de dimension n'est pas aussi complète, car à Jauchelette il y a des grains, d'un diamètre deux à trois fois plus considérable, qui se trouvent interposés dans quelques parties. Tous les grains ont été roulés; les bords sont arrondis. Ils contiennent de

nombreuses inclusions, surtout des inclusions de nature gazeuse. Quelques-uns d'entre eux ont été brisés; d'autres offrent l'extinction onduleuse.

Le ciment est peu abondant, et plutôt sériciteux que chloriteux; il est recouvert d'une poussière noire ou brune, peut-être charbonneuse. L'élément accessoire le plus important est la pyrite.

8. *La Ramée près Glimes.*

Ici s'observe la structure pseudo-microporphyrique; les gros grains de quartz sont arrondis ou roulés; une grande partie des petits grains semblent formés sur place, car ils s'enchevêtrent exactement les uns dans les autres, ce qui ne pourrait s'expliquer autrement que si l'on suppose des mouvements de compression d'une intensité très considérable. L'extinction onduleuse est fréquente, de même que la disposition en mosaïque dans un même grain entre nicols croisés. Les inclusions, qui sont liquides ou gazeuses, sont plus ou moins sériées; en outre, des paillettes de mica, de petits fragments d'apatite, des cheveux de Vénus ou des prismes de rutile peuvent se trouver inclus dans le quartz. Le ciment est vert, chloriteux; mais de la séricite entre néanmoins en proportion notable dans sa composition. Comme éléments accessoires, on ne peut guère signaler qu'un peu d'ilménite et de fort petits cristaux de pyrite.

B. SCHISTES.

Dans la description qui va suivre, nous n'avons considéré que deux variétés principales de schistes, nommément le schiste aimantifère et le schiste non aimantifère. Nous faisons remarquer en outre que nous n'avons établi cette distinction que pour la facilité, car la limite entre ces deux variétés est loin d'être nettement tranchée, et comme ces roches diffèrent assez sensiblement de localité à localité, — pour autant que des roches de cette nature peuvent offrir des particularités saillantes, — nous les avons rangées par groupes locaux, comprenant chaque fois la localité la plus importante et ses environs.

Nous considérerons ainsi successivement :

I. Le schiste aimantifère de Tubize, Rodenem, Buysinghen, Hal, Clabecq, Oisquercq, Court-Saint-Étienne, Mont-Saint-Guibert.

II. Le schiste non aimantifère de Buysinghen, Hal, Oisquercq, Tubize-Quenast, Ottignies, Franquenies, Court-Saint-Étienne.

III. Le schiste grenatifère de Franquenies, le schiste pailleté de Jodoigne, le schiste épidotifère de Clabecq, le schiste ilménitifère de Rodenem et de Limelette, le schiste oligistifère de Clabecq et d'Oisquercq.

SCHISTES AIMANTIFÈRES.

1. *Tubize.*

La roche est grise et pailletée. Les paillettes ne sont autre chose que les cristaux d'aimant, disséminés dans la pâte, qui, au microscope, présente une teinte uniformément grisâtre et paraît complètement homogène. Ces cristaux de magnétite offrent des sections en général très régulières, toutes les sections d'octaèdre que l'on observe dans les schistes devilliens de Rocroi. Sauf dans des cas très rares, ils sont disposés au milieu de la pâte, sans interposition de chlorite, et, n'atteignant que des dimensions peu considérables, il leur est impossible de déterminer l'existence de nœuds; tout au plus peut-on distinguer, entre les cristaux et les portions contingentes de la pâte, de petits prismes, de nature siliceuse, de quartz ou de calcédoine, disposés normalement aux faces de l'octaèdre. Parfois cependant les contours des sections de magnétite sont irréguliers et semblent appartenir à des individus non terminés ou corrodés. Les dimensions des grains sont très variables; quelques-unes ne dépassent guère celles des particules d'ilménite dont il va être question. La seule altération observée consiste dans leur transformation en limonite.

Quant à la pâte, elle est composée de quartz et de séricite; les grains de quartz sont à peu près tous de même dimension, elliptiques ou aplatis; quelques-uns d'entre eux sont brisés en plusieurs fragments et irrégulièrement terminés; la plupart contiennent des inclusions, surtout des inclusions liquides. La séricite se trouve en paillettes de peu d'étendue, bien moins

développées que dans les schistes ardoisiers du massif de Rocroi; elle présente une teinte bleuâtre, ou est complètement incolore. Par endroits, elle est remplacée par de la chlorite, qui est verte, nettement dichroïque, ce qui permet de la distinguer aisément de la séricite, malgré la teinte bleuâtre que celle-ci présente en lame mince; en outre, cette chlorite se trouve encore en agrégats plus ou moins fibreux, qui restent complètement éteints pour une rotation complète entre nicols croisés.

Les éléments accessoires observés sont :

L'apatite, relativement abondante pour une roche du Brabant, en prismes bien développés et remplis d'inclusions;

La tourmaline, en prismes hémimorphes, dichroïques dans les tons bleus et généralement de faibles dimensions;

Un peu de zircon et de rutile;

Et comme produit de décomposition de la magnétite, la limonite en cristaux épigènes ou en enduits; notons enfin des particules noires d'ilménite abondantes et contribuant d'une façon sensible à la teinte grise de la roche.

L'analyse de ce schiste nous a donné :

I. 1gr,114 de substance, séchée à 110° et traitée par les carbonates alcalins, donnèrent 0gr,764 de silice, 0gr,004 de chaux, 0gr,040 de phosphate de magnésium, 0gr,101 de sesquioxyde de fer, 0gr,165 d'alumine et des traces d'oxyde de manganèse.

II. 0gr,685 de substance, séchée à 110°, donnèrent 0gr,026 de Fe_3O_4 au barreau aimanté.

III. 1gr,190 de substance, séchée à 110°, donnèrent 0gr,852 de Fe_3O_4 au barreau aimanté.

IV. 0gr,584 de substance, séchée à 110° et dosée au moyen de permanganate de potassium, donnèrent 3.90 % de protoxyde de fer.

V. 0gr,644 de substance, séchée à 110° et traitée par les carbonates alcalins dans l'appareil de Sipöcz, donnèrent 0gr,021 d'eau.

	I.	II.	III.	IV.	V.
SiO_2	68.64				
CaO	0.36				
MgO	1.29				
Fe_2O_3	9.06				
Al_2O_3	14.63				
MnO	traces				
FeO				3.90	
Fe_3O_4		3.79	5.21		
H_2O					3.26

2. *Rodenem.*

C'est ici que se rencontrent les roches qui se rapprochent le plus des roches devilliennes du massif de Rocroi, tant par la grandeur des cristaux de fer aimant, que par la disposition et la nature des nœuds. Quoique ces cristaux n'atteignent pas les dimensions de ceux des roches de l'Ardenne, ils sont néanmoins sensiblement plus volumineux que ceux des autres roches du Brabant; leurs huit faces sont recouvertes de paillettes de chlorite dichroïque, disposées parallèlement à ces faces; de là les mêmes particularités dans le dichroïsme que dans les roches de l'Ardenne.

En outre, il y a eu ici une compression assez énergique, et cette compression a produit l'aplatissement, l'étirement des cristaux suivant un des axes, la chlorite étant restée intimement unie aux faces, et du quartz n'ayant par conséquent pas pu se déposer entre les deux minéraux. Il y a aussi dans la roche un très grand nombre de petits cristaux de fer aimant, à contours très nets, disposés sans ordre apparent, non enduits de chlorite, et de quartz dans la plupart des cas; disposés au contraire au milieu d'un amas de feuillets de chlorite dans d'autres.

La pâte se compose de séricite et de quartz, la séricite prédominant légèrement. Quelques paillettes sont plus grandes que la moyenne et présentent des phénomènes de torsion. Quant aux grains de quartz, qui sont fort petits, ils n'offrent aucune particularité saillante.

La masse fondamentale est parsemée d'éléments accessoires, en quantité fort considérable; ce sont :

1° De nombreux prismes de tourmaline, dichroïque dans les tons bleus, avec de nombreuses inclusions solides, caractérisée par la fréquence des lignes de cassure;

2° Des paillettes et des accumulations de chlorite;

3° Des prismes jaunâtres de rutile, fortement réfringents, polarisant très vivement. Les microlites de rutile manquent absolument.

Il faut rattacher au rutile de petites masses d'un minéral blanc brunâtre, d'où émergent de petites pointes, et qui, entre nicols croisés, laissent entrevoir des tons très élevés;

4° Quelques sections assez régulièrement hexagonales d'apatite bleue, pourvue à l'intérieur de nombreuses inclusions liquides ou solides, que l'indice de réfraction de l'apatite empêche de déterminer;

5° Des fragments de zircon et d'apatite;

6° Des particules noires d'ilménite.

Ce schiste ardoisier tranche sur les autres roches du Brabant par sa compacité, dont on peut voir une preuve dans le fait que les altérations sont limitées entièrement aux parois des lignes de fissure et ne pénètrent pas dans la masse même.

3. *Buysinghen.*

Les grains de fer aimant que l'on observe dans ce schiste ardoisier sont plus abondants, mais aussi bien plus petits que dans les roches de l'Ardenne. Leurs contours sont en général réguliers. Les cristaux sont disposés irrégulièrement dans la masse. Un certain nombre d'entre eux sont recouverts de chlorite, mais cette chlorite est en voie d'altération et sa séparation d'avec la pâte est peu tranchée; aussi elle est peu dichroïque et verdâtre; d'autres octaèdres sont entourés de mica blanc, incolore, polarisant vivement (cf. Geinitz); d'autres encore sont séparés de la masse de la roche par de petits prismes de quartz ou de calcédoine, ou même cette dernière couche siliceuse peut entièrement manquer. La dimension des cristaux est très variable et peut atteindre 10 μ; parfois plusieurs grains sont associés en chaîne.

Outre la chlorite qui enduit les grains de magnétite, il y a de la chlorite répandue dans la pâte, où elle se présente en agrégats lamellaires ou fibreux, d'une teinte brunâtre ou jaunâtre, avec toutes les traces d'une altération avancée.

La masse fondamentale est un mélange de quartz et de séricite; elle est verdâtre par suite de l'abondance des feuillets de chlorite interposés. Le quartz se trouve en grains irréguliers, de dimension moyenne, à contours plus ou moins anguleux, avec inclusions liquides ou gazeuses, souvent assez abondantes pour former au centre du cristal comme un noyau opaque. La séricite se présente en lamelles ou en aiguilles; sa teinte est bleuâtre, mais

passe insensiblement au vert de la chlorite, sans qu'il soit possible de tracer dans les roches de cette localité une distinction marquée entre les deux éléments.

Comme minéraux accessoires, nous pouvons signaler :

1° La tourmaline, en prismes toujours entiers;

2° Un peu d'apatite;

3° De petits cristaux et des globules de rutile;

4° De l'épidote en fragments jaunes, à indice de réfraction très élevé, avec des teintes de polarisation s'élevant au jaune de 2e ordre pour une épaisseur de plaque de 0.02 à 0.03 millimètre;

5° Des particules d'ilménite.

4. *Hal.*

Nous pouvons caractériser les roches de cette localité en disant que ce sont des roches aimantifères, à éléments magnétiques fort petits et ne présentant pas de traces d'étirement.

Les cristaux de fer aimant sont en général de faibles dimensions : les plus grands n'atteignent pas 70 μ; leurs sections sont régulières, les contours assez légèrement arrondis; les agglomérations de cristaux ne sont pas rares. Les grains sont disposés fort irrégulièrement dans la masse, dont ils ne sont du reste séparés ni par de la chlorite, ni par du quartz, ni seulement par l'un ou l'autre de ces deux éléments; mais, ce qui est assez remarquable, c'est que des lamelles de mica, qui sont véritablement du mica blanc, se sont appliquées contre une ou plusieurs faces de l'octaèdre et remplissent ainsi l'office de chlorite. Des altérations de la magnétite ne se laissent pas observer.

A un fort grossissement, la masse fondamentale se décompose en paillettes de séricite, incolores ou bleuâtres, à contours irréguliers ou effacés et fortement biréfringentes, et en petits grains de quartz anguleux, plus abondants en général que la séricite; plusieurs de ces grains permettent l'observation de nombreuses inclusions liquides. En outre, il y a dans la masse des lamelles de chlorite, peu dichroïque, restant complètement éteinte entre

nicols croisés, et, bien que peu abondante, cependant en quantité suffisante pour donner une teinte verdâtre à la roche.

Les éléments accessoires abondent; il y a :

1° Quelques sections hexagonales, bleuâtres, d'apatite;

2° Beaucoup de tourmaline en prismes ou en fragments de prismes; dichroïque dans les tons bleus; parmi les individus le mieux développés, il n'est pas rare d'en observer dont une des extrémités est bleue et l'autre jaune brunâtre; les inclusions sont fort nombreuses et accumulées vers le centre des cristaux;

3° Du rutile qui, au lieu de se présenter sous forme de « Thonschiefer-nädelchen », affecte l'aspect de globules, de grains fortement biréfringents, polarisant vivement, incolores au centre, bruns sur les bords et contenant assez souvent des poussières et des impuretés;

4° De petits cristaux de zircon;

5° De petites granulations d'ilménite;

6° Des cristaux altérés, légèrement jaunâtres et mats, d'apparence rhomboédrique, constitués très probablement par de la dolomie d'origine secondaire.

5. *Clabecq.*

Les schistes provenant de cette localité et que nous avons examinés, sont assez profondément altérés. Cette altération se traduit de deux manières :

1° Par la disposition du fer aimant;

2° Par la forte prédominance de la chlorite.

Les cristaux de fer aimant sont petits, de dimensions variables; ils sont disposés irrégulièrement dans la pâte; les contours de leurs sections sont en général rectilignes. La plupart sont simplement déposés dans la pâte; les autres sont enduits de chlorite. Ils sont presque tous altérés et transformés partiellement ou entièrement en limonite, qui enduit les parties voisines de la roche; cette altération est surtout sensible dans les cristaux qui sont pourvus d'un enduit de chlorite.

La séricite de la masse fondamentale se présente sous la forme de petites paillettes, polarisant vivement, légèrement bleuâtres à la lumière ordinaire

et plus abondantes que les grains de quartz, qui sont petits, plutôt arrondis et elliptiques qu'anguleux et qui sont englobés de toutes parts dans le réseau micacé. Quelques-uns d'entre eux offrent une extinction légèrement onduleuse; la plupart contiennent des inclusions liquides et gazeuses. La chlorite, qui est ici manifestement le principal produit d'altération, communiquerait à la roche une teinte verte, n'était la quantité considérable de particules noires d'ilménite dont la pâte est parsemée et sur lesquelles nous aurons à revenir dans la suite.

Les éléments accessoires sont peu importants : nous n'avons guère observé que quelques prismes de tourmaline, de rares sections d'apatite et de la limonite secondaire, résultant d'altérations.

Une chose assez digne de remarque, c'est la persistance de la structure schistoïde qui s'observe même en lame mince.

6. *Oisquercq.*

Les roches aimantifères d'Oisquercq sont bigarrées. Les octaèdres d'aimant qu'elles contiennent sont bien développés et englobés dans la pâte sans ordre apparent, sans interposition de chlorite ni de quartz; en outre, ils ne portent pas de traces d'étirement et sont assez abondants.

La masse fondamentale de la préparation tout entière est parfaitement claire et transparente; elle est composée de paillettes de séricite et de grains de quartz criblés d'inclusions. Elle présente cette particularité remarquable d'être parsemée dans toute son étendue de particules d'ilménite, et ce sont ces particules qui impriment à la roche ses différentes teintes, la teinte étant foncée et noirâtre là où ces particules sont le plus abondantes, et claires là où il y en a moins, la différence entre les quantités respectives de ces particules étant très difficile, sinon impossible à remarquer au microscope. On peut conclure de ce fait que, dans les schistes bigarrés, la coloration est un caractère secondaire.

Nous avons observé en outre, dans les roches de cette localité, de la tourmaline bien développée, un peu de chlorite et un peu de limonite, surtout sous forme d'enduit. La compacité de la roche est grande.

7. *Court-Saint-Étienne.*

Les roches aimantifères de cette localité sont caractérisées par la grande abondance de chlorite; cette chlorite n'entre pas à proprement parler dans la constitution de la pâte, mais se présente sous l'aspect d'agrégats feuilletés; on peut s'assurer de cette disposition par l'examen de plusieurs agrégats, qui permet de distinguer soit les feuillets posés à plat et restant complètement éteints, soit des séries de lamelles sectionnées perpendiculairement ou obliquement par rapport au feuilletage.

Le quartz, qui constitue, avec la séricite, la masse fondamentale, affecte la forme de grains, la plupart anguleux, ayant jusqu'à 60 μ. Ils contiennent quelques inclusions solides, entre autres de l'apatite et du rutile, et de nombreuses inclusions liquides fort petites. La séricite est l'élément essentiel de la roche; elle se présente, suivant la direction des sections, en lamelles ou en aiguilles.

Comme éléments accessoires, nous avons observé un peu d'apatite avec les inclusions du centre si caractéristiques, un peu de tourmaline et de rutile, et des particules d'ilménite.

Les grains de fer aimant sont disposés très irrégulièrement, et souvent plusieurs cristaux sont agglomérés; ils ne portent pas d'enduit de chlorite, si ce n'est accidentellement; ils sont séparés de la masse fondamentale par une légère couche de silice (quartz ou calcédoine), très probablement secondaire.

8. *Mont-Saint-Guibert.*

Ce sont des roches aimantifères, se rapprochant beaucoup de celles de Court-Saint-Étienne; les cristaux de fer aimant sont ici, comme dans toutes les roches du Brabant, trop petits pour pouvoir constituer des nœuds sensibles; en outre, ils sont recouverts d'un très léger enduit de chlorite. Il y a, comme à Court-Saint-Étienne, de petits nœuds de chlorite dans la pâte; pour le reste, quant à la masse fondamentale et aux minéraux accessoires, il

n'y a aucune particularité saillante, si ce n'est l'abondance des particules d'ilménite pour une roche aimantifère.

*
* *

Il ressort des descriptions précédentes que les roches aimantifères du Brabant sont des schistes simples dans lesquels se sont développés des cristaux de fer aimant, fort petits en général. Ces roches se trouvent dans toutes les parties de l'assise II de Tubize et dans un grand nombre de localités de l'assise III; elles se trouvent avec les schistes simples dans les mêmes rapports que, dans le massif de Rocroi, les schistes aimantifères de Monthermé avec les schistes ardoisiers de Deville et de Rimogne. Mais, tandis que dans l'Ardenne les schistes aimantifères constituent une zone et sont développés là où le métamorphisme est le plus intense, il n'est pas possible d'établir une telle séparation dans le Brabant, où il semble que le simple métamorphisme dynamique ne suffit pas pour interpréter la présence de cristaux d'aimant, et où il faut attribuer une plus forte influence au métamorphisme de contact.

SCHISTES NON AIMANTIFÈRES.

Dans cette catégorie, nous considérerons toutes les roches que Dumont appelait des schistes simples, sans tenir compte des distinctions entre les schistes notés Dv 2 et les schistes notés Rv dans la dernière édition de la légende de la Carte.

1. *Hal.*

Cette roche offre une teinte grisâtre, due à la présence de nombreuses particules d'ilménite; en de rares endroits, on peut observer des enduits, du reste assez peu étendus, d'oxydes de fer.

Un caractère assez remarquable, c'est la présence dans la masse d'accumulations de matière chloriteuse verte; ces accumulations sont lamellaires, plus grandes qu'aucun autre constituant de la roche, et restent à peu près

complètement éteintes entre nicols croisés; là seulement où les feuillets ne sont pas disposés entièrement à plat, on distingue des teintes de polarisation d'un bleu foncé. Quelques-unes parmi les particules minérales sont transparentes en rouge cochenille; on peut les considérer comme de l'oligiste. La plupart cependant sont noires, opaques, ont des contours irréguliers, sont excessivement petites et réparties uniformément dans la masse; les plus grandes d'entre elles ont une tendance à avoir des contours légèrement sphériques; nous démontrerons plus loin que l'on a affaire à de l'ilménite. Quant aux enduits d'oxyde de fer, ils semblent résulter de l'altération de la chlorite, dont on voit de nombreux individus passant du vert brunâtre au vert pâle, puis au jaune et au rouge.

La séricite de la pâte est bleuâtre; ses lamelles ont des contours irréguliers; les sections transversales polarisent vivement. Toutefois la présence de particules d'ilménite empêche l'examen détaillé de ces deux éléments, de même que l'observation des minéraux accessoires, parmi lesquels on ne parvient à distinguer que la tourmaline, en prismes hémimorphes, assez considérables, dichroïque dans les tons bleus (bleuâtre au bleu verdâtre) et disposée à plat suivant le feuilletage.

2. *Oisquercq.*

La pâte des roches d'Oisquercq est composée de séricite et de quartz, la quantité de quartz semblant plus considérable que celle de séricite.

Le quartz se trouve en individus cristallins, à contours irréguliers et contenant des inclusions liquides et gazeuses. Au milieu de la masse fondamentale sont disposés de petits nœuds de matière chloriteuse, de couleur verte ou seulement verdâtre, le plus souvent à dichroïsme net; ces amas sont constitués par la superposition d'un certain nombre de lamelles et sont fort abondants dans la plupart des roches d'Oisquercq.

Les éléments accessoires sont relativement rares; on peut découvrir :

1° Quelques prismes de rutile, terminés et intacts, parfois maclés;

2° De la tourmaline; les prismes sont assez grands et bien développés, mais tellement remplis d'inclusions que la netteté du dichroïsme en est affaiblie,

ce dichroïsme allant du bleu pâle au bleu foncé; la plupart des individus ne sont pas terminés et présentent des cassures transversales;

3° De l'épidote assez rare (Clabecq);

4° De la limonite, d'origine secondaire;

5° Un peu de grenat (vers Tubize et Quenast).

Quant aux particules noires, que toutes les préparations du Brabant renferment en quantité plus ou moins considérable, elles ont généralement des contours irréguliers; quelquefois cependant elles présentent des contours qui se rapportent à un minéral cubique ou hexagonal; il n'est guère probable que ces particules soient de l'oligiste, car :

1° Tandis que, aux forts grossissements, l'oligiste est transparente en rouge cochenille, les particules considérées restent noires et opaques;

2° Les roches qui en renferment de grandes quantités, comme c'est le cas pour les roches de Fumay et de Viel-Salm, ont une teinte violâtre, alors que les roches du Brabant sont au contraire grises ou noires.

On n'a pas affaire non plus à de la magnétite, du moins pas à de la magnétite pure, car, même quand les dimensions en sont faibles, les individus de magnétite conservent des contours réguliers, ce qui n'est pas le cas ici.

Il ne peut pas non plus être question de particules charbonneuses, car comment expliquer, dans ce cas, l'aspect que nous présente une roche trouvée à Oisquercq, dans le voisinage de la gare, roche d'un rouge brique, où la teinte est due à la présence de particules rouges, ayant le même aspect, à part la couleur, et la même disposition que les particules noires, dont elles proviennent manifestement par altération?

Quant à la pyrite, elle se laisse toujours aisément distinguer et donne par altération de la limonite.

Une seule hypothèse reste ouverte : que les particules noires sont de l'ilménite. Une analyse de la roche (voir ci-dessous) nous a montré l'existence d'une forte quantité d'acide titanique, qui ne peut se trouver que dans ces particules, aucun autre élément de la roche n'étant susceptible d'en laisser entrer dans sa composition.

Quant aux particules rouges du schiste altéré, ce ne peuvent être qu'une des variétés d'oxyde de fer hydraté, très probablement de la göthite.

Détermination de la nature des particules noires des schistes du Brabant.

1. Un premier essai de séparation des particules noires fut tenté au barreau aimanté sous l'eau et ne donna pas de résultat.

2. L'électro-aimant ne donna pas non plus de résultat.

Il devenait peu probable que ces particules fussent de la magnétite.

*
* *

3. 4. L'attaque par les acides chlorhydrique et nitrique n'eut d'autre résultat que la décomposition de la chlorite avec production de sels ferreux et ferriques, mais n'eut pas pour effet la disparition des particules noires.

L'hypothèse suivant laquelle on aurait affaire à de l'oligiste ou à de la pyrite se trouvait écartée.

*
* *

5. On a chauffé d'abord un poids déterminé de la substance, puis une plaque mince de la roche pendant environ trois quarts d'heure dans un courant d'oxygène dans le creuset de Rose, sans résultat.

Les particules ne sont donc pas du graphite.

*
* *

6. Sous l'action prolongée de l'eau régale, les particules disparurent.

*
* *

7. $3^{gr},583$ de substance chauffée à 110° furent attaqués d'abord par l'acide fluorhydrique, à l'effet de chasser la silice, puis par l'acide sulfurique concentré, à l'effet de dissoudre les autres éléments. Le fer, l'alumine et l'acide titanique furent précipités ensemble; le fer fut séparé par le sulfure

d'ammonium; puis l'alumine et l'acide titanique furent dosés suivant la méthode de Gooch [1]. Les résultats de l'analyse sont :

Fe_2O_3	0gr,3700.	10.33 %.
TiO_2	0gr,1222.	3.407 %.
Al_2O_3.	0gr,7476.	20.865 %.

*
* *

8. Des procédés de triage mécanique, entre autres le procédé de Thoulet [2], avec un tube haut de 1 mètre, furent essayés, mais sans résultat, ce qui est dû à la ténuité des éléments.

3. *Buysingen.*

Les roches de Buysingen, considérées par Dumont comme du gedinnien inférieur, par Malaise comme du devillien, malgré leur position au nord des quartzites, diffèrent des roches d'Oisquercq par la pâleur de leur teinte. Comme on pouvait s'y attendre, cette différence résulte du fait qu'il y a ici moins de particules d'ilménite. Pour le reste, la structure est la même : la masse fondamentale se compose de quartz et de séricite; les grains de quartz sont arrondis et sphériques plutôt que discoïdes, le mica sériciteux est fort abondant.

Quant à la chlorite, élément important dans ces roches, elle se trouve disposée d'une façon fort remarquable, en petits amas sphériques, nodosiformes, tels que nous en avons déjà décrits.

Les éléments accessoires sont peu considérables; il n'y a guère que de la tourmaline et des produits d'altération, entre autres de la limonite.

[1] Fresenius, *Zeitschr. f. anal. Chem.*, 1887, p. 342.
[2] Michel Levy et Fouqué, *Microgr. des roches éruptives.*

4. Ottignies-Franquenies.

La masse fondamentale de ces roches est formée, comme dans les autres, par l'assemblage du quartz et de la séricite. Le quartz est abondant, plus que le mica; mais il se trouve en grains tellement petits qu'il est fort difficile de le distinguer et qu'il est absolument impossible de l'examiner en détail. Les paillettes de séricite sont très fortement enchevêtrées et très minces. En plusieurs endroits, la séricite est remplacée par de la chlorite.

Outre les particules d'ilménite, il y a de l'oligiste en grains ou en paillettes à contours réguliers et hexagonaux, transparents en rouge cochenille; l'élément accessoire le plus important est l'apatite, qui présente les mêmes caractères et la même disposition que dans les schistes ardoisiers verts de l'Ardenne, sans toutefois se rencontrer en quantité aussi forte. La rutile et la tourmaline semblent manquer absolument.

Les infiltrations ferrugineuses sont abondantes.

5. *Court-Saint-Étienne et environs.*

Ces schistes présentent la même structure que les autres schistes du Brabant; ils n'en diffèrent que :

1° Par leur altération moins avancée;

2° Par la quantité bien moindre de chlorite et l'état de fraîcheur de cette dernière.

Cette chlorite se trouve en petits amas constitués par plusieurs feuillets et donnant, quand ils sont sectionnés perpendiculairement au plan des feuillets, naissance à un assemblage d'aiguilles vertes. Le dichroïsme va du jaune au vert pâle; les teintes d'interférence sont légèrement bleues; parfois les couleurs sont d'un ordre plus élevé, et même on peut, dans certains cas, observer des couleurs qui se rapprochent de celles de la séricite, ce qui semble indiquer une interpénétration de ces deux minéraux.

Les grains de quartz de la masse fondamentale sont ou bien relativement volumineux, arrondis ou anguleux, et en quelque sorte englobés dans la

pâte, ou bien discoïdes et aplatis. La séricite affecte son aspect ordinaire.

Les éléments accessoires sont rares et peu importants : tourmaline — un peu d'apatite — très peu de rutile — oligiste — pyrite — un carbonate spathique et de la limonite — du zircon fort rare — de l'épidote et peut-être de la cordiérite.

SCHISTE GRENATIFÈRE DE FRANQUENIES.

Cette roche est à la fois aimantifère et grenatifère, et se rapproche par conséquent plus des roches aimantifères que des roches que nous avons décrites en dernier lieu.

Les cristaux de magnétite sont petits, offrent des sections rhombiques, hexagonales, triangulaires, etc.; parfois deux ou plusieurs individus sont enchevêtrés. Les cristaux sont décomposés, soit en totalité, soit seulement sur les bords, et dans ce dernier cas les contours sont très irréguliers; ils ne sont séparés de la masse même de la roche ni par de la calcédoine, ni par du quartz, ni par de la chlorite.

La chlorite est abondante, mais n'est pas fraîche, et plusieurs feuillets sont transformés intégralement en oxyde de fer; de là une teinte jaune-brune.

Le mica de la masse est de la séricite, qui, comme le quartz, présente le même aspect que dans les autres roches et n'offre aucune autre particularité que d'atteindre des dimensions fortes pour un schiste. Les éléments accessoires manquent complètement.

Mais on observe de nombreux cristaux incolores, à bords foncés, à indice de réfraction fort élevé, — d'où un aspect chagriné, — restant éteints pour une rotation complète entre nicols croisés, et de sections assez variables : c'est du grenat.

SCHISTES PAILLETÉS DE JODOIGNE.

Ce sont des roches noires pailletées, à teneur en silice élevée. La pâte claire est composée de mica incolore et de quartz; examinée à un fort grossissement, elle est parsemée d'une poussière noire très fine, consistant surtout en particules charbonneuses, excessivement ténues, et de petites microlites

de rutile, plus abondants que dans aucune autre roche du massif. Ces microlites se présentent sous la forme de petits prismes jaunes, fortement réfringents, non maclés. Quant aux paillettes noires, elles offrent des contours plus ou moins réguliers, qui se rapportent à un minéral hexagonal; elles sont constituées, pensons-nous, par de l'oligiste.

Il y a dans la roche des fragments assez volumineux d'apatite et des prismes bleuâtres, très fins de tourmaline, avec un peu d'épidote.

SCHISTE ÉPIDOTIFÈRE DE CLABECQ.

Le schiste examiné porte quelques cristaux de fer aimant, recouverts d'un léger enduit de chlorite sur toutes leurs faces. Pour le reste, la roche se rapproche des autres schistes de Clabecq-Oisquercq. Elle s'en distingue parce qu'elle contient un nombre fort important d'individus d'épidote; ce sont des grains à contours émoussés et arrondis, fortement réfringents, ayant entièrement l'aspect de grenats, avec bords bruns et surface chagrinée, mais s'en distinguant par leur action sur la lumière polarisée; ils sont légèrement jaunâtres et translucides, ne sont pas sensiblement pléochroïques; nous les avons déterminés comme épidote, par comparaison avec des sections plus étendues que nous présentait ce minéral dans d'autres roches; aussi à l'extinction longitudinale des sections parallèles à l'allongement, là où cet allongement était sensible.

SCHISTE OLIGISTIFÈRE DE CLABECQ ET D'OISQUERCQ.

Ce sont des roches ne différant des schistes simples des mêmes localités que par le plus grand développement des lamelles de fer oligiste; ce fer oligiste se trouve aussi en granules, granules et lamelles étant transparents en rouge cochenille, comme dans les schistes violets de Fumay, dont les roches considérées diffèrent par l'absence complète de rutile.

La pâte est de séricite et de quartz, avec un peu de chlorite; les éléments accessoires observés sont de l'ilménite, un peu d'apatite, de tourmaline et de magnétite.

SCHISTE ILMÉNITIFÈRE DE RODENEM ET DE LIMELETTE.

Nous considérons ces roches comme constituant une variété spéciale, parce que les individus d'ilménite qu'elles renferment sont bien autrement développés que dans les autres roches du massif. Ce sont des cristaux noirs, présentant des sections parfois fort allongées, entourées de chlorite très dichroïque (du vert au jaune); quelques sections peuvent avoir des contours inégaux, et dans le cas où l'altération est profonde, être entourés de leucoxène, ou présenter des teintes de polarisation très vives, ou montrer des implantations de rutile. Pour le reste, le schiste est gris clair. La chlorite qu'il contient a une tendance à se trouver en petits nœuds dont les contours sont irréguliers et pouvant présenter des interpositions de séricite et des inclusions de diverse nature.

Le mica de la masse fondamentale se trouve en lamelles incolores et légèrement bleuâtres, à contours très irréguliers, posées entre les grains de quartz, et en aiguilles ou sections transversales de paillettes; cette séricite est transparente. Les dimensions des grains de quartz sont en général faibles; il y a des inclusions liquides.

Les éléments accessoires sont peu importants; outre quelques sections de rutile et d'apatite, il faut signaler la tourmaline, en prismes hémimorphes, le plus souvent brisés. En quelques endroits aussi, des enduits ferrugineux.

*
* *

Les schistes du Brabant diffèrent, — en laissant à part leur degré d'altération et les phénomènes qui en résultent (quantité de chlorite, présence de limonite et probablement d'épidote, altération profonde de l'ilménite, etc.), — des roches du massif de Rocroi par les caractères suivants :

1° Ils ne contiennent qu'une quantité très faible de rutile, alors que les roches devilliennes et reviniennes de l'Ardenne en renferment des quantités notables;

2° Les cristaux de magnétite sont bien moins développés et leur production doit être attribuée à des causes probablement différentes dans les deux massifs;

3° On n'observe dans l'Ardenne rien qui se rapproche des particules d'ilménite du Brabant. Tout au plus pourrait-on dire que dans les schistes ardoisiers simples devilliens, il y a des paillettes d'ilménite, et dans les autres roches, du rutile; mais la structure et la disposition diffèrent;

4° Dans le Brabant, la cristallisation est loin d'être aussi parfaite que dans l'Ardenne, et les éléments accessoires sont loin d'y présenter la même importance que dans cette dernière région.

C. ARKOSES.

QUARTZITES ET SCHISTES FELDSPATHIQUES.

Toutes les roches de cette espèce ont été considérées par Malaise comme du Devillien supérieur. Si l'on pense, comme nous, qu'il n'y a pas lieu d'appliquer, dans le Brabant, les subdivisions usitées pour le massif de Rocroi, cette désignation doit disparaître. Dumont [1] distinguait deux variétés d'arkose, qui se distinguent par la grosseur de leurs parties constituantes, mais qui passent souvent l'une à l'autre. La première est l'arkose pisaire, l'autre est l'arkose miliaire; elles se montrent principalement dans ce qu'il considérait comme la partie moyenne de son étage gedinnien, c'est-à-dire sur les rives de la Senne, entre Hal et Oisquercq (à Hal, au sud de Lembecq, au nord de Tubize, au sud de Clabecq et vis-à-vis d'Oisquercq). Ces roches sont subordonnées aux schistes de la partie septentrionale du massif.

Nous distinguerons les arkoses de Clabecq, de Rodenem, de Malheyde-Lembecq et d'Oisquercq.

1. *Clabecq.*

Il entre dans la composition de l'arkose de Clabecq trois éléments, visibles macroscopiquement : ce sont le quartz, un feldspath et du mica

[1] *Loc. cit.*, p. 251.

blanc. Ces trois éléments sont compris dans un ciment de nature micacée, renfermant en outre les nombreux éléments accessoires, parmi lesquels il peut y en avoir d'origine secondaire.

Le quartz se trouve en grains ayant généralement 1-2 millimètres de diamètre et dépassant rarement ces dimensions. Il frappe avant tout par son état de fraîcheur; en outre, il porte toutes les traces du transport, car il est pour ainsi dire toujours arrondi, ou du moins ses arêtes sont émoussées. Il contient le plus souvent des inclusions, surtout des inclusions gazeuses et liquides, et parmi ces dernières, il y en a dont la libelle et les autres particularités sont excessivement nettes; il peut aussi renfermer des fragments d'apatite, et, dans un cas spécial, un individu de quartz présentait les inclusions si curieuses d'helminth, qui n'est, on le sait, qu'une variété spéciale de chlorite. La roche a été soumise à des mouvements de compression intenses, qui se traduisent de diverses façons : assez souvent les grains sont simplement fendillés, qu'il y ait eu ou non des infiltrations ultérieures, de nature ferrugineuse, entre les divers fragments; dans d'autres cas, on peut observer l'extinction onduleuse, ou ce que Sollas appelle l'extinction bandée, c'est-à-dire que pour une rotation de la table du microscope il ne passe pas une ombre, mais plusieurs ombres, séparées par des zones claires, sur un même cristal, de manière à présenter à un certain moment l'aspect d'un feldspath maclé entre nicols croisés; enfin il arrive aussi que des grains, semblant entiers et homogènes à la lumière ordinaire, se résolvent en un amas d'individus cristallins, s'adaptant parfaitement les uns aux autres et orientés d'une façon différente au point de vue optique entre nicols croisés.

Le feldspath des arkoses est en général fort altéré; on observe surtout des sections prismatiques d'orthose, mais on distingue aussi des lamelles polysynthétiques. Les macles sont relativement fréquentes, suivant la loi de Carlsbad. Nous avons aussi observé la structure microperthitique, c'est-à-dire l'enchevêtrement dans un seul individu de deux feldspaths différents, l'un étant de l'orthose, l'autre un plagioclase. Quant aux inclusions, qui paraissent nombreuses, il est impossible de se prononcer sur leur nature, à cause du degré d'altération. La plus fréquente de ces altérations est la kaolinisation,

le kaolin présentant des teintes excessivement brillantes entre nicols croisés; quand l'altération est plus avancée et à peu près définitive, l'espace rempli primitivement par le feldspath est occupé tout entier par de fort petits grains de quartz, formant une mosaïque à petits éléments. La quantité de feldspath peut être égale à celle du quartz; elle est rarement supérieure.

Le mica blanc est celui des trois éléments dont les proportions varient le plus; dans quelques préparations, il manque totalement; dans d'autres, il est bien développé. Il se présente en accumulations de feuillets; parfois des feuillets de ces accumulations ne sont pas du mica, mais de la chlorite; de là des différences assez notables dans l'aspect des amas, surtout entre nicols croisés. La chlorite est verte et finement lamellaire; il arrive qu'elle accompagne de la magnétite.

Les éléments accessoires de l'arkose de Clabecq sont abondants et variés. Citons :

1° De la pyrite, en cristaux opaques, à bords légèrement jaunâtres, bien terminés, peu ou point altérés;

2° De la magnétite, en sections régulières; parfois en accumulations de forme irrégulière, entremêlées de chlorite verte, dichroïque; enfin elle se présente encore en petites particules;

3° De l'helminth (v. plus haut);

4° Du zircon en grains plus ou moins arrondis, avec de nombreuses lignes de cassure. C'est un élément constant, atteignant $^3/_{10}$ de millimètre;

5° Très peu de rutile et un peu de leucoxène;

6° Très peu d'apatite;

7° Des prismes bien développés à une de leurs extrémités, détruits à l'autre, de tourmaline dichroïque en quantité assez variable, mais toujours notable;

8° De la hornblende brune et verte;

9° De la limonite épigène sur pyrite;

10° Quelques rares grains d'épidote;

11° Des sections de carbonate spathique.

2. *Rodenem.*

Les arkoses et les quartzites feldspathiques de cette localité sont composés de grains de quartz de dimensions variables et parfois assez différents, maintenus ensemble par un ciment de mica et de petits grains de quartz, qui englobe aussi un peu de feldspath.

Les dimensions des grains de quartz sont variables dans d'assez fortes proportions; les grains les plus volumineux ont été distinctement roulés; les autres ont conservé des angles et des arêtes. Ils contiennent, pour la plupart, de fort belles inclusions liquides, ainsi que des inclusions gazeuses, rarement sériées. Les phénomènes d'extinction onduleuse ne sont pas rares; en outre, un nombre assez considérable de grains ont été brisés sur place après le dépôt, en une multitude de fragments, et le ciment ayant pénétré entre les fragments, l'ensemble produit l'illusion d'une recristallisation complète.

Les feldspaths qui entrent dans la composition de ces roches sont assez peu abondants; ils appartiennent surtout au groupe des plagioclases et se présentent en grains assez volumineux, portant les traces du transport; l'orthose est fortement kaolinisée; sa surface est trouble, blanchâtre. La kaolinisation a été accompagnée de la formation de petites paillettes de mica, qui se trouvent à l'état d'inclusions dans le feldspath; celui-ci contient en outre des inclusions liquides et surtout un nombre considérable d'inclusions gazeuses. Il est assez remarquable que quelques cristaux aient conservé des contours réguliers, tout en étant englobés dans la pâte; il y a aussi lieu de remarquer qu'ils offrent tous une tendance à être tabulaires suivant M.

Le ciment est composé de grains de quartz et de mica; le mica a dû être primitivement de la séricite; dans la suite, une proportion assez forte de chlorite s'y est substituée. Le ciment est très abondant et constitue environ 50 % de la masse totale. Quelques individus de séricite atteignent des dimensions assez considérables pour pouvoir être considérés comme de la muscovite.

Les éléments accessoires sont fort nombreux, comme dans les autres arkoses; les principaux sont :

1° Du zircon en grains à contours irréguliers, émoussés, très foncés; le relief est fort accusé. Les individus contiennent des inclusions abondantes, dont l'indice de réfraction élevé empêche de reconnaître la nature. Les lignes de fracture ne sont pas rares;

2° Des prismes de tourmaline bleue, brisée, présentant quelques inclusions liquides et des inclusions de petits fragments de magnétite;

3° Des octaèdres bien développés de magnétite non accompagnés de chlorite, mais plus ou moins entourés de quartz, relativement abondants

4° Un peu de pyrite;

5° Un peu d'apatite;

6° Des fragments jaunes d'épidote, irréguliers, polarisant avec des teintes élevées, sensiblement dichroïques;

7° Chlorite et éléments secondaires.

3. *Malheyde-Lembecq.*

Le feldspath est assez peu abondant; il y a des grains qui sont anguleux; d'autres sont arrondis; plusieurs présentent entre nicols croisés les lamelles polysynthétiques; un grand nombre sont altérés avec production de kaolin, dont l'abondance semble caractéristique pour les roches de cette localité; les plus grands n'ont cependant jamais plus de $0^{mm},5$ de diamètre. Le quartz est l'élément le plus abondant; il tranche fortement sur les autres par sa transparence et la fraîcheur de son aspect. Les dimensions des grains peuvent atteindre $1^{mm},6$. La forme est généralement variable; les grains les plus gros sont arrondis; leurs arêtes ne sont pas tranchantes, mais à mesure que la dimension diminue, l'arrondissement des bords est moins considérable. Plusieurs individus présentent l'extinction onduleuse; quelques-uns, qui semblent former à la lumière ordinaire un seul individu, se résolvent entre nicols croisés en une mosaïque. Dans quelques cristaux, les inclusions sont particulièrement nombreuses, au point de troubler la transparence; ces inclusions sont pour la plupart liquides; il y a très peu d'inclusions solides, par exemple d'apatite, etc.

Il y a aussi des plaques de mica blanc, interférant vivement. Le ciment qui unit les grains de quartz et de feldspath est micacé; le mica se présente sous forme de petites paillettes ou de feuillets assez étendus, à teintes de polarisation fort vives. Très souvent la chlorite entre dans la composition du ciment et y constitue des accumulations.

Les éléments accessoires sont assez remarquables :

1° Du zircon très abondant, à teintes de polarisation très vives, en grains volumineux ou en prismes émoussés; lignes de cassure profondes;

2° De la magnétite titanifère, partiellement décomposée sur les bords avec leucoxène;

3° De la pyrite, bien cristallisée, jaunâtre sur les bords;

4° Des grains d'épidote, résultant probablement de la destruction du feldspath;

5° De la titanite brune, à relief très accusé;

6° Deux ou trois grains arrondis, transparents, dichroïques de l'incolore au bleu intense, à biréfringence négative et teintes de polarisation peu vives; probablement de la glaucophane, et une substance lamellaire, fortement dichroïque du bleu à l'incolore, avec teintes de polarisation très vives, l'angle d'extraction étant de 18° sans axe optique visible : hornblende brune;

7° Un peu de calcite et de limonite.

4. *Oisquercq.*

L'arkose d'Oisquercq ne diffère pas sensiblement de la précédente; le quartz, le feldspath, le mica blanc, le ciment, tous les éléments présentent la même disposition.

Un premier point à noter, c'est que le zircon possède une forte tendance à la fragmentation; un autre consiste dans l'importance de l'ilménite en cristaux gris d'acier, opaques, bruns aux parties en voie d'altération, avec implantations de microlites de rutile et accompagnement de chlorite.

En plusieurs endroits, il y a dans la masse de l'arkose comme des fragments de quartzite, composés d'un assemblage de petits grains de quartz sans ciment.

MASSIF DE STAVELOT.

DISTRIBUTION GÉOGRAPHIQUE.

Le massif cambrien de Stavelot constitue une bande s'étendant du sud-ouest au nord-est, renflée au sud-ouest, allongée au nord-est. Il forme le plateau qui domine le pays et dont les parties les plus élevées, fortement marécageuses, sont les hautes Fanges.

Dumont [1] considérait dans ce massif trois étages : l'étage devillien, l'étage revinien et l'étage salmien. D'après lui, l'étage devillien constitue deux bandes : la première, vers le milieu de laquelle est situé le village de Grand-Halleux, a une forme allongée du sud-sud-ouest au nord-nord-est (bande de Grand-Halleux, coupe de la Salm); la seconde forme un massif allongé de l'ouest-nord-ouest à l'est-sud-est, qui commence en Belgique au nord de Stavelot et se termine en Prusse à l'ouest de Ligneuville : c'est la bande de Falize. En 1868, Gosselet et Malaise [2] pensèrent que les roches de Hourt et de Grand-Halleux, que Dumont rangeait dans la première bande, étaient plus récentes que les schistes noirs (reviniens d'après Dumont) qui s'étendent de Trois-Ponts à Rogelinval; plus tard, en 1874, von Dechen prétendit que les roches blanches ne seraient qu'un facies particulier des roches noires; mais, comme le fait remarquer Gosselet [3], « comment se ferait-il que les masses décolorées soient nettement séparées des masses de roches non modifiées, qu'elles soient limitées par des lignes droites, qu'il n'y ait pas autour d'elles une sorte d'auréole de moindre altération, qu'elles ne contiennent pas quelques parties intactes, etc.? » La Commission de la Carte, suivant en cela l'avis de Dewalque, reprit la classification de Dumont et

[1] Dumont, *loc. cit.*, p. 97.

[2] *Observations sur le terrain diluvien de l'Ardenne* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 2e série, t. XXXI, p. 61, 1868).

[3] *L'Ardenne*, p. 129.

rangea le massif de Hourt dans le devillien inférieur, les roches de Grand-Halleux (schistes, etc.) dans le devillien supérieur.

Le revinien constitue la partie la plus étendue du massif de Stavelot; il commence en Prusse près de Wénau et forme, à partir de ce point, une bande qui s'élargit vers Jalhay et se rétrécit entre Spa et Malmedy, puis s'élargit en patte d'oie et se divise en plusieurs bandes irrégulières, qui vers le sud-ouest prennent un grand développement.

Quant à l'étage salmien, qui ne s'observe que dans ce massif, il forme autour de l'extrémité sud-ouest du système revinien une bande irrégulière, acquérant une grande étendue vers l'ouest et vers le sud. Il se divise en deux étages : celui de Viel-Salm et celui de Salm-Château. L'étage de Viel-Salm comprend des quartzophyllades zonaires ou feuilletés et des schistes ardoisiers gris bleuâtre, avec du psammite et du quartzite pailleté. L'étage de Salm-Château est constitué par du quartzophyllade feuilleté ou zonaire, des schistes ardoisiers simples, oligistifères et ottrélitifères, du coticule et des filons de manganèse.

En 1868, Gosselet et Malaise distinguèrent dans l'étage des schistes oligistifères de Viel-Salm les zones suivantes :

Schistes. . . . { de Lierneux.
violets oligistifères.
ottrélitifères.

Si l'on rapproche les massifs de Rocroi et de Stavelot l'un de l'autre, on voit que le premier correspond au noyau du second, puisque le système salmien y manque. Les quartzites de Revin répondraient aux quartzites des Hautes-Fanges; les quartzites et les schistes ardoisiers vert blanchâtre de Deville, aux roches de même nature des environs de Grand-Halleux, et Gosselet signale même une dernière analogie — fort douteuse — qui, avec la légende actuelle de la Carte, n'a pas de raison d'être : celle des ardoises de Fumay avec celles de Viel-Salm, c'est-à-dire la partie supérieure du salmien — cela, toutefois, sous les plus grandes réserves.

A. SYSTÈME DEVILLIEN.

1. *Quartzite blanc de Hourt.*

Il ne se trouve qu'à Hourt. Il a une texture grenue, subgrenue ou compacte; il est formé de grains de quartz, réunis par un ciment siliceux. Il est d'un blanc grisâtre, translucide vers les bords. Sa cassure est inégale. On y remarque quelques veines de quartz. Vers la partie méridionale de la bande, il forme « un dôme elliptique, allongé du sud-ouest au nord-est, à sommet tronqué, dont les pentes s'enfoncent sous les autres roches du système devillien et sous celles du système revinien. Ce dôme, profondément entamé par la vallée de la Salm entre Rencheux et Hourt, présente, surtout à la rive droite de la rivière, des escarpements considérables, connus sous le nom de rochers de Hourt, qui mettent l'observateur à même d'en saisir la structure [1] ».

Description microscopique. — La disposition et la structure des éléments de ce quartzite sont variables; toutefois, rien ne permet de le rapprocher des roches reviniennes du massif de Rocroi, dont il diffère sous bien des rapports.

Les grains de quartz se laissent rapporter à deux catégories, au point de vue tant de la dimension que de l'aspect :

1° Ceux qui sont de grande taille, ayant au moins $^1/_4$ de millimètre de diamètre;

2° D'autres, bien plus abondants, qui n'atteignent pas le tiers de cette dimension.

Parmi les premiers, la plupart sont fracturés; d'autres présentent le phénomène de l'extinction onduleuse ou de l'extinction par bandes d'une façon remarquable, cette extinction étant le résultat de phénomènes de pression ou de torsion très intenses. Bien souvent il s'est déposé entre les

[1] *Loc. cit.*, p. 97.

divers fragments d'un même grain du ciment micacé, ce qui donne à l'ensemble l'aspect d'une origine non clastique. D'autre part, il peut arriver que divers individus de quartz, qui à la lumière ordinaire ne semblent former qu'un seul cristal, présentent entre nicols croisés l'apparence d'une mosaïque. Les inclusions sont en général rares; parmi elles, il y a lieu de signaler les inclusions d'apatite. Tous ces grains ont été roulés et ont leurs arêtes émoussées ou subanguleuses. Quant aux autres grains, ils sont entièrement anguleux et semblent avoir recristallisé sur place; il est possible toutefois que seule une zone externe de nature siliceuse se soit déposée autour d'individus roulés par le transport; ils contiennent des inclusions liquides, le plus souvent sériées, et présentent comme les premiers, mais d'une façon moins sensible, l'extinction onduleuse.

La matière micacée constituant le ciment se présente sous la forme de paillettes incolores ou légèrement bleuâtres, droites ou tordues, de nature sériciteuse; les proportions respectives des quantités de quartz et de séricite sont variables; dans certaines préparations, le ciment est peu abondant et ne constitue que des couches fort minces entre les divers grains de quartz; dans d'autres, au contraire, il entre pour une proportion notable dans la composition de la roche. Dans certaines parties des préparations, il peut même se faire que la matière micacée soit accumulée en amas, dans lesquels toutes les paillettes constituantes sont orientées dans la même direction et ressemblent ainsi plus ou moins à un petit nœud de schiste dans la masse quartziteuse. C'est le ciment qui englobe tous les minéraux accessoires. Dans quelques cas, la chlorite s'est substituée à la séricite, dont elle se distingue par sa teinte verte et son dichroïsme.

Les éléments accessoires sont variés et se trouvent en quantité relativement considérable; ce sont :

1° De l'apatite, tant à l'état d'inclusion dans le quartz qu'en grains isolés, englobés dans le ciment; en général très impure, par suite de la présence à la surface des grains de petites poussières brunes; les sections sont régulièrement terminées, prismatiques ou hexagonales. Dans quelques individus, il existe un léger dichroïsme;

2° La tourmaline se trouve en prismes, entiers ou fracturés, dichroïque

dans les tons bruns, répartie dans toutes les parties des préparations examinées;

3° Une substance grise ou jaune, qui se trouve dans toute la masse de la roche, en certains points en accumulations assez considérables, et déterminée à un fort grossissement comme rutile;

4° Des cristaux de zircon, à contours peu nets, très foncés, à surface chagrinée, à couleurs de polarisation très vives entre nicols croisés, légèrement bleuâtres en lumière ordinaire, très abondants;

5° Une section de plusieurs paillettes de biotite, à pléochroïsme très intense, du brun au noir, à biréfringence forte;

6° Quelques rares sections d'amphibole brune, dichroïque du brun pâle au brun foncé, biréfringence négative;

7° Ilménite.

2. *Quartzites devilliens supérieurs.*

Le quartzite devillien supérieur est gris verdâtre et peut passer au gris jaunâtre; il est rarement veiné, et quelquefois pailleté; il est subgrenu ou subcompact. Il ne s'observe guère sans altération que sur la rive droite de la Salm, entre le moulin de Rogelinval et Grand-Halleux, au sud de Hourt et au Fait-du-Diable, rocher isolé, de 700 à 800 mètres cubes, situé sur une montagne à quelques centaines de mètres au sud-sud-est de Wanne. Ordinairement il est transformé par altération en gris verdâtre, rougeâtre, rosâtre, jaunâtre, blanchâtre ou bigarré, passant au quartzophyllade grenu. C'est ce qu'on peut observer en nombre d'endroits.

Description microscopique. — Les échantillons que nous avons examinés proviennent de trois localités : Grand-Halleux, Viel-Salm (Bois-d'Aire) et Rogelinval. Le quartzite de cette dernière localité s'écartant trop des deux autres, sera décrit à part.

Les grains de quartz sont en général petits et à contours irréguliers. Quelques-uns sont plus grands et déterminent par leur disposition entre les autres la structure que nous avons déjà observée dans les quartzites devil-

liens du massif de Rocroi. L'extinction est dans quelques cas onduleuse ou bandée; la disposition en mosaïque peut également s'observer. Les inclusions sont pour la plupart liquides; quelques-unes sont gazeuses; elles sont disposées en séries. Il arrive aussi que de petites aiguilles de séricite ou de petits individus de rutile ou d'apatite soient inclus dans le quartz.

La matière qui fait office de ciment est chloriteuse, légèrement verdâtre, faiblement dichroïque. Il y a aussi de la séricite, qui se présente en paillettes de dimensions très faibles. Les altérations sont assez sensibles dans quelques roches; dans un quartzite de Grand-Halleux, nous avons observé une accumulation assez considérable de chlorite, dichroïque du vert pâle au vert brunâtre.

Les éléments accessoires sont :

1° De l'apatite, en sections hexagonales et prismatiques, bleuâtre, les individus étant pour la plupart traversés par des fissures profondes;

2° De la tourmaline, très peu abondante, en fines lamelles, à contours peu définis, et dichroïque;

3° Du zircon, peu abondant;

4° Des masses brunes de rutile et d'ilménite en voie d'altération;

5° De l'oligiste et de la limonite;

6° De fines veines de quartz secondaire.

*
* *

Le quartzite de Rogelinval présente des différences assez notables d'avec ceux de Grand-Halleux et de Viel-Salm. Les grains de quartz sont disséminés dans une pâte à très petits éléments, de nature schisteuse et au moins trois fois plus abondante que le quartz. Ces grains sont en général arrondis, parfois subangulaires; ils présentent l'extinction onduleuse. Ils contiennent pour la plupart des inclusions gazeuses ou liquides, disposées en séries régulières, et il peut même se faire qu'une série d'inclusions se continue dans deux ou trois grains juxtaposés, ce qui indique nettement une cassure sur place après dépôt.

La partie schisteuse de la roche est très fortement micacée; elle se

compose d'un assemblage de grains de quartz, de feldspath et de paillettes de séricite et de chlorite, ces divers éléments étant très intimement unis.

Comme éléments accessoires, nous signalons :

Des cristaux de magnétite et de pyrite;

Des sections d'apatite;

Du rutile et de l'ilménite;

Et des produits d'altération (chlorite, limonite, etc.).

Toutes les préparations sont traversées par des zones où le fer aimant a passé à l'état d'oxyde, en colorant les éléments en brun dans les parties avoisinant ces zones.

3. *Schistes ardoisiers devilliens.*

Ils sont feuilletés, schisto-compacts ou schisto-terreux, présentent une teinte gris pâle, verdâtre ou bleuâtre et un aspect mat. Presque toujours altérés à la surface du sol, ils y montrent plusieurs teintes de rouge, de jaune, de gris, se désagrègent et se réduisent en terre (Petit-Halleux, entre le moulin de Rogelinval et Enval, entre Mont et Farnière). Ils sont quelquefois aimantifères (au sud des rochers de Hourt). On trouve dans ces roches des filons de quartz. Dans la bande de Falize, le schiste ardoisier est trop peu feuilleté pour se prêter à la fabrication des ardoises. Il est quelquefois coloré en rougeâtre par des infiltrations ferrugineuses (au nord de Stavelot), et le plus souvent altéré en schiste terreux rouge ou jaune.

Description microscopique. — Ce sont des schistes qui, sauf quelques particularités d'importance secondaire, rappellent assez bien au microscope l'aspect des schistes verts qui, dans le massif de Rocroi, sont subordonnés aux schistes violets de Fumay. La masse fondamentale de la roche se compose de grains de quartz ou de séricite; les grains de quartz sont petits, à contours très irréguliers; ils présentent de petites inclusions avec ou sans libelle, et peuvent avoir englobé dans leur masse de petites paillettes de mica. Malgré la faiblesse de leurs dimensions, ils montrent l'extinction onduleuse d'une façon bien nette. Parfois des grains de quartz ayant entre

40 et 60 μ sont englobés dans la masse fondamentale; ils contiennent comme les autres des inclusions, les inclusions sans libelle prédominant; leurs contours sont irréguliers. De toutes parts, les grains de quartz sont limités par de la séricite, qui offre son aspect habituel et se trouve en paillettes d'une très grande ténuité; ses teintes de polarisation sont fort vives. En général, on peut dire qu'elle est un constituant moins important que le quartz.

Dans quelques cas, assez rares du reste, la fonction de la séricite est remplie par de la chlorite; cette chlorite restant à peu près éteinte entre nicols croisés, est dichroïque et communique aux schistes verts la teinte qui les caractérise. En outre, la chlorite est un élément constitutif de la roche sous forme de petites accumulations analogues aux amas observés dans les schistes verts de Fumay, dont ils ne diffèrent que par la dimension; ces amas ne sont autre chose que des accumulations de plusieurs feuillets; ils sont dichroïques du vert au jaune; leur limite avec la masse avoisinante n'est pas toujours bien nette.

Plusieurs de ces roches sont aimantifères; les cristaux d'aimant qu'on y observe sont petits, nettement terminés, disposés dans la pâte sans ordre apparent et n'ont pas subi d'étirement sensible; ils sont pour la plupart entourés de chlorite. En quelques endroits, ils peuvent se trouver en nombre très considérable. Les roches qui en contiennent sont pailletées. Assez souvent, les dimensions de ces cristaux d'aimant sont très faibles et n'ont que quelques μ; dans ce cas, les contours sont irréguliers. Ils sont toujours sujets à altération en limonite.

Les minéraux accessoires des schistes devilliens sont peu variés, mais abondants et constants; ce sont :

1° Du rutile, tant sous la forme si caractéristique de « Thonschiefernädelchen », disposés irrégulièrement dans tous les sens et criblant toute la pâte, que sous la forme de petits prismes jaunâtres, assez épais, de 3 à 4 μ de diamètre et de 10 à 12 μ de longueur, souvent maclés;

2° De la tourmaline en prismes bleuâtres, ou en sections suivant d'autres directions. Cette tourmaline contient toujours des inclusions non déterminables;

3° Un peu de grenat (observé seulement dans une préparation de Grand-Halleux);

4° De petits amas bruns d'ilménite altérée, d'où émergent des aiguilles de rutile;

5° De l'oligiste en petites paillettes transparentes, d'une teinte rouge cochenille;

6° Un peu d'apatite.

Quand ces roches sont altérées, elles contiennent en outre de la chlorite, de la limonite et, dans un cas, de l'épidote. Cette limonite peut enduire tous les éléments et est alors le pigment; d'autres fois elle se répand suivant le plan du feuilletage et provoque alors par sa disposition un aspect zonaire.

B. SYSTÈME REVINIEN.

1. *Quartzites.*

Le quartzite est à grains fins, serrés, comme fondus ensemble, presque toujours plus compact que grenu. Sa cassure est écailleuse ou inégale, son éclat gras ou cireux; sa teinte varie du gris-bleu au noirâtre. Il est traversé en tous sens par des veines de quartz blanc et ressemble alors à certains marbres du carbonifère. On y trouve beaucoup de cubes de pyrite et de limonite épigène, ou des cavités cubiques qui ont servi de gîte à des cristaux semblables. On voit assez souvent, vers deux angles opposés diagonalement d'un cube ou d'une cavité cubique, de petites masses de quartz blanc fibreux. Ce quartzite forme des bancs puissants, massifs ou schistoïdes, à feuillets ondulés et pailletés à leur surface; il offre quelquefois sur les plateaux une couleur gris pâle ou même blanchâtre, résultant des altérations qu'il a éprouvées.

Description microscopique. — Au point de vue microscopique, ces roches présentent, quand elles n'ont pas subi d'altérations, une structure des plus caractéristiques. Elles se distinguent par leur haut degré de cristallinité : on dirait que tous les cristaux de quartz ont recristallisé et se sont, dans

leur croissance, engagés les uns dans les autres. En outre des fissures que l'on observe à l'examen microscopique, dans toutes les plaques de cette roche, on distingue de petits filonnets de quartz secondaire, tantôt peu distincts, tantôt, au contraire, bien développés.

Les grains de quartz sont unis les uns aux autres pour ainsi dire sans ciment; les dimensions de ces grains, à peu près égales dans certaines préparations et reproduisant alors l'aspect des quartzites reviniens du massif de Rocroi, varient au contraire en d'autres préparations dans les plus fortes proportions, les grains les plus considérables pouvant atteindre $0^{mm},4$, les grains les plus petits étant à peine sensibles; en général, la dimension est de 50 à 60 μ. Les grains de $0^{mm},3$ à $0^{mm},4$ portent encore toutes les traces du transport et sont entièrement arrondis. Quant aux autres, il n'est pas possible d'y découvrir de vestige quelconque du transport, tant est intime leur enchevêtrement; on doit admettre qu'après le dépôt, des infiltrations siliceuses se sont effectuées dans la roche, infiltrations qui ont eu pour effet, d'une part, la production de nouveaux cristaux, d'autre part, l'accroissement des cristaux déjà existants. Après les infiltrations, la roche a dû subir des phénomènes de compression d'une grande intensité, phénomènes qui se traduisent tant par l'existence de l'extinction onduleuse que par la présence de fissurations profondes, etc. En général, les inclusions sont assez abondantes, de nature liquide ou gazeuse, troublant rarement la transparence du quartz. Dans un quartzite de Trois-Ponts, les grains de quartz contiennent des microlites de rutile en abondance, ces microlites donnant aux grains un aspect strié, par suite de leur disposition les uns à la file des autres, et cela en plusieurs rangées parallèles.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les préparations de ces quartzites reviniens sont sillonnées dans tous les sens de veines de quartz disposées de façon très irrégulière; les grains de quartz de ces filonnets sont pour la plupart remarquablement purs et ne contiennent que des inclusions liquides ou gazeuses, fort petites, visibles seulement à un fort grossissement et ne diminuant pas la transparence du grain; les grains des filonnets sont plus volumineux qu'aucun autre grain de la roche; ils n'ont qu'une profondeur peu considérable, mais leur diamètre transversal équivaut au diamètre

de la veinule; eux aussi ont subi des phénomènes de compression intense; la plupart présentent l'extinction onduleuse.

Le ciment des roches considérées est siliceux et micacé. On peut regarder comme ciment siliceux les petits grains de quartz qui ont cristallisé sur place suivant toute apparence. Le peu de séricite qui entre dans la constitution de la roche se trouve en fines paillettes qui forment une couche d'une épaisseur très minime, interposée entre les grains de quartz. Il peut arriver que ce ciment soit enduit d'oxyde de fer.

Quelques quartzites présentent ces taches jaunes que Götz a déterminées comme de l'ilménite en voie d'altération.

Les éléments accessoires, peu importants, sont pourtant assez variés :

1° Pyrite;

2° De l'ilménite avec implantations d'aiguilles de rutile;

3° Des cristaux de zircon, en général bien développés, à contours arrondis, fissures profondes, inclusions nombreuses, mais non déterminables à cause de l'indice de réfraction;

4° Des prismes de tourmaline, fracturés et brisés dans tous les sens, terminés à la partie inférieure par plusieurs individus;

5° Un peu d'apatite;

6° De la titanite en petite quantité;

7° De l'oligiste, de la limonite, etc.

*
* *

Parmi les nombreux quartzites reviniens que nous avons examinés, il y en a quelques-uns qui s'écartent assez notablement du type général dont nous avons donné la description ci-dessus. Ce sont :

1° Un quartzite pyritifère de Viel-Salm;

2° Un quartzite qui se trouve sur la route de Trois-Ponts à Rogelinval et sur celle de Spa à Francorchamps.

Le premier se caractérise par sa structure caverneuse et tuffacée. Les grains de quartz sont petits et tous à peu près de même dimension; ils sont maintenus ensemble par un ciment sériciteux peu abondant; ils sont angu-

leux et irréguliers. Les inclusions sont sans importance. L'extinction onduleuse est fréquente. Quant au ciment micacé, bien que peu abondant, il l'est cependant plus que dans les roches appartenant au type général. La pyrite cubique s'est altérée à plusieurs endroits, et l'oxyde de fer résultant de l'altération a coloré le ciment, en lui donnant un aspect plus ou moins zonaire. Quant à la séricite elle-même, elle reste bien intacte; elle est bleuâtre et interfère très vivement; très peu de chlorite s'y est substituée par places. Comme éléments accessoires, du zircon, un peu de tourmaline, de la pyrite et des poussières noires d'une ténuité extrême, paraissant être de nature charbonneuse, peu abondantes du reste.

Le second type aberrant se distingue par l'abondance de la matière fondamentale qui englobe complètement les grains de quartz du quartzite. Les grains les plus volumineux sont arrondis et roulés; ils présentent à un haut degré l'extinction onduleuse; ils contiennent des inclusions de nature gazeuse en petite quantité, parfois disposées en séries régulières. Parfois aussi, il y a à l'état d'inclusions des microlites de rutile (cheveux de Vénus), de l'apatite et du mica. La pâte elle-même est composée d'un mélange de séricite et de petits fragments de quartz; elle est généralement verdâtre ou brunâtre. C'est elle qui renferme les éléments accessoires, notamment les aiguilles de rutile, des zircons, de l'apatite, de la tourmaline et de la limonite, qui se trouve aussi dans la roche sous forme de veinules noires, donnant naissance à l'aspect zonaire qui s'observe dans ces roches.

2. *Schistes ardoisiers reviniens.*

Quand il n'a pas éprouvé d'altération, le schiste est feuilleté dans un sens parallèle ou oblique aux joints de stratification; il est d'un gris bleuâtre ou d'un noir bleuâtre, faiblement luisant ou mat. Rarement il est subcompact, pâle et tendre. Mais celui qui a été exposé aux agents atmosphériques offre une couleur gris pâle ou même blanchâtre, et n'a que peu de dureté et de cohérence. Il renferme souvent de la pyrite en petits cubes très nombreux, en cubes isolés ou en dendrites, de la limonite en cubes épigènes et en enduits brunâtres et irisés à la surface des feuillets (La Gleize).

Description microscopique. — Les schistes reviniens du massif de Stavelot sont en général à grain très fin; la masse fondamentale est presque incolore, parfois très légèrement verdâtre; elle se compose de grains de quartz et de paillettes de séricite. Les grains de quartz peuvent atteindre dans quelques préparations jusqu'à 22 μ; la plupart d'entre eux ont des contours irréguliers et des arêtes anguleuses; très peu sont discoïdes et arrondis. Les plus volumineux présentent l'extinction onduleuse. Les fissures sont profondes et à peu près générales, chaque grain restant cependant complètement homogène au point de vue optique. Quelques grains sont fort purs et ne contiennent pas d'inclusions; les autres présentent des inclusions de nature diverse, consistant principalement en petites poussières noires, très ténues, peut-être charbonneuses.

L'autre constituant essentiel de la roche est la séricite; il y a lieu de remarquer que cette séricite est ici fort généralement altérée et que, dans un grand nombre de schistes examinés, elle a disparu pour faire place à de la chlorite. Dans quelques-uns des schistes reviniens, notamment ceux de Vaux-Chavanne, que Dumont [1] considérait comme une variété spéciale, la masse fondamentale contient de grands grains de quartz, qui ne renferment pas d'inclusions et qui peuvent sur certaines plaques imprimer à la roche un aspect gréseux par suite de leur abondance. Le mica blanc et la chlorite peuvent y atteindre des dimensions plus considérables que celles qu'on observe généralement chez ces minéraux.

Ces roches contiennent en quantité variable du rutile; quelques-unes d'entre elles se présentent comme parsemées de petits corps bruns, parfois accumulés par zones; ces corps bruns, examinés à un fort grossissement, se résolvent en individus bien nettement terminés de rutile, parfois simples, le plus souvent maclés et soudés les uns aux autres; ils se distinguent par l'élévation de leur indice de réfraction. En outre, le rutile se trouve encore à l'état de microlites très aigus; d'autres fois, en individus isolés et plus considérables (20-30 μ).

Un autre élément accessoire qui a son importance dans cette roche est la

[1] *Loc. cit.*, p. 108.

pyrite; elle se trouve en cristaux presque toujours cubiques, colorant le schiste : c'est elle qui détermine la teinte noire si prononcée des schistes reviniens. La pyrite est accompagnée souvent de particules charbonneuses qui rendent le schiste ardoisier tachant; les particules charbonneuses sont plus ténues que les plus fines particules de pyrite et sont semées dans toute la roche.

Signalons encore :

1° La magnétite et l'ilménite;

2° L'apatite, parfois en sections d'une certaine dimension, généralement criblée d'inclusions à la partie centrale, les inclusions étant solides. Dans un schiste revinien du Bois-d'Aire, un cristal d'apatite avait ses bords corrodés, comme s'il s'était trouvé en contact avec un milieu corrosif;

3° De la tourmaline;

4° De l'oligiste et de la limonite;

5° Dans les schistes qui ont subi des altérations ou qui sont enduits de limonite, de petits cristaux octaédriques avec des faces de pyramide bien développées, à axe *c* assez allongé, dont il est difficile de déterminer le système, de couleur gris terne, plus ou moins translucides au centre, mais à bords foncés, à relief chagriné, à indice de réfraction élevé, les sections restant éteintes entre nicols croisés. Cette dernière particularité exclut la possibilité de les considérer comme étant de l'anatase, qui, même pour une très faible épaisseur, présente des teintes de polarisation d'ordre élevé entre nicols croisés.

Une préparation taillée dans un filonnet traversant une des roches nous présente quelques particularités intéressantes : certaines parties quartzeuses sont constituées par du quartz laiteux, dont chaque grain se résout au microscope en une mosaïque; ce sont ces individus de quartz qui constituent les parties les plus externes du filon; les parties les plus internes sont occupées par de la pyrite cubique ou pyritoédrique. Dans ces filons se rencontrent en outre des plaques assez étendues de mica blanc.

Enfin, à Coo et à Viel-Salm, le schiste revinien peut être zonaire. Cette structure est due à une double cause :

1° A une alternance à peu près régulière de couches micacées, constituées

essentiellement par de la séricite, et des couches de grains de quartz, atteignant jusqu'à 100-150 μ;

2° A la disposition de l'oxyde de fer, limonite, qui s'est répandue suivant certains feuillets et les a colorés de façon très intense.

Il y a encore à noter que ces schistes zonaires renferment de la pyrite en proportions variables, et de dimensions plus ou moins considérables, des particules charbonneuses, et les autres éléments accessoires des schistes reviniens simples.

C. SYSTÈME SALMIEN.

Quartzites et grès.

Les quartzites et les grès jouent un rôle peu important dans la constitution du système salmien; ils ne se trouvent guère en masses quelque peu importantes que vers la partie supérieure du salmien inférieur. Ils y constituent des bancs massifs ou stratoïdes gris bleuâtre ou gris verdâtre, devenant rougeâtres ou brunâtres par altération, parfois bigarrés de rouge et veinés de quartz. Très souvent la surface des bancs est revêtue d'un enduit micacé, pailleté et luisant, d'une teinte plus foncée que celle de la masse quartzeuse elle-même. On observe des roches de transition entre le quartzophyllade feuilleté et le quartzite ou psammite pailleté.

Nous avons considéré trois variétés secondaires de quartzite :

Grès de Viel-Salm; grès de Jalhay; quartzite salmien proprement dit.

Description microscopique. — Le grès salmien qui se trouve à Viel-Salm présente la même structure que les quartzites devilliens du massif de Rocroi. Les grains les plus grands sont à contours très irréguliers et sont séparés les uns des autres par des grains de plus faible dimension. Ils ont subi une compression intense qui se traduit par la présence fréquente de bandes d'extinction. Les extinctions sont de nature diverse; les plus caractéristiques sont des inclusions de paillettes de mica; il y a également des inclusions gazeuses et des inclusions de poussières diverses, surtout de nature ferrugineuse. Le ciment de la roche est micacé, fort légèrement chloriteux et fibreux. Comme éléments accessoires, on peut observer du rutile, de l'ilmé-

nite, de la magnétite, divers oxydes de fer et d'assez grands fragments de tourmaline.

*
* *

Le grès salmien de Jalhay et des environs a un aspect zonaire; cet aspect est dû à la présence de bandes subparallèles d'oxyde de fer très rapprochées les unes des autres et colorant les zones en brun foncé. Les grains de quartz qui entrent dans la composition de ce grès sont à peine plus grands que ceux que l'on peut observer dans un schiste quelconque. Le ciment est abondant. L'oxyde de fer provient, suivant toute probabilité, de l'altération de la chlorite; en quelques endroits, il se présente en masses; sa forme la plus générale est cependant celle d'enduit. Quant à la séricite, elle ne se trouve dans la roche qu'en proportions peu considérables; elle est bleuâtre et se distingue par ses teintes d'interférence élevées; on en observe des feuillets accumulés en petites masses et ayant subi des phénomènes de torsion. Dans ce cas, les teintes d'interférence sont particulièrement brillantes. Les plus grands des grains de quartz sont arrondis ou subanguleux; les plus petits se sont probablement formés en place; ils ne contiennent que peu d'inclusions. L'extinction onduleuse est rare dans cette roche. Les éléments accessoires observés sont : des microlites de rutile, de l'ilménite et de la magnétite; de la tourmaline, de la chlorite et de l'apatite. Aussi en grandes quantités, des poussières brunes, noirâtres, qui, à un fort grossissement, se présentent en octaèdres allongés, comme dans les schistes reviniens.

*
* *

Le vrai quartzite salmien se compose de grains de quartz de même dimension : environ $^1/_{10}$ de millimètre; ces grains sont réunis par un ciment micacé peu abondant; ils sont arrondis ou subanguleux; un grand nombre semble avoir recristallisé sur les bords. La plupart présentent des inclusions de séricite; les inclusions liquides avec libelle sont plus rares. Le ciment est composé partiellement de chlorite, partiellement de séricite. Enfin, le seul minéral accessoire important, à part les oxydes de fer, — limonite et oligiste, — est la tourmaline.

Schistes.

Nous décrirons successivement :

Salmien inférieur : quartzophyllades.

Salmien supérieur : schiste ardoisier oligistifère, schiste ardoisier ottrélitifère, coticule.

1. *Quartzophyllades salmiens* Sm1.

Dumont [1] distingue dans l'étage salmien inférieur deux variétés principales de quartzophyllades. La première, qui domine presque exclusivement dans la partie nord-ouest de l'étage et qu'il désigne sous le nom de quartzophyllade feuilleté, est formée de feuillets ondulés de quartzite ou de grès argileux, compact ou subgrenu, grisâtre ou gris verdâtre, de 1 millimètre à 1 centimètre d'épaisseur, séparés par du schiste en feuillets minces, divisible suivant un plan parallèle à la stratification. Il se peut aussi que les feuillets de schiste ne forment qu'un enduit luisant ou pailleté, d'un gris bleuâtre ou verdâtre, plus foncé que celui des couches quartzeuses. Ce quartzophyllade offre sur les plateaux, lorsqu'il est altéré, un aspect terreux, une teinte jaunâtre, et plus ou moins de friabilité. La seconde variété de quartzophyllade, que Dumont nomme quartzophyllade zonaire, règne dans la partie sud ou sud-est de l'étage. Elle diffère de la première en ce que les zones de schiste gris bleuâtre qui alternent avec les zones quartzeuses sont proportionnellement plus épaisses, et divisibles en feuillets non pailletés, obliques au plan de stratification. Les zones quartzeuses ou quartzophylladeuses sont assez minces, droites ou ondulées, grenues ou subgrenues, d'un gris bleuâtre ou verdâtre, moins foncé que celui des zones schisteuses, et pailletées sur des plans parallèles à ceux de stratification. On y trouve de la pyrite. En s'altérant, les zones schisteuses deviennent tendres et prennent diverses nuances de gris-rose; les zones quartzeuses deviennent friables et prennent une couleur analogue, mais plus pâle.

[1] *Loc. cit.*, p. 118.

Description microscopique. — Au microscope, les quartzophyllades feuilletés se différencient à première vue des schistes ardoisiers proprement dits par la grandeur des éléments qui entrent dans leur composition, et surtout par le développement de la séricite. Le quartz se trouve en grains de dimensions variables, à contours arrondis ou anguleux, ayant en moyenne 40-60 μ, mais pouvant être plus petits; l'extinction onduleuse s'observe chez un certain nombre d'individus, mais elle est en général peu sensible; il y a des inclusions gazeuses en proportion variable, des inclusions liquides moins abondantes, et des inclusions de poussières de nature diverse, brunâtres pour la plupart et non déterminables. Le ciment micacé qui unit les grains de quartz était primitivement entièrement sériciteux; mais dans la suite, en rapport avec les transformations profondes que ces roches ont subies, de la chlorite s'est substituée à la séricite sur des parties notables de la préparation; les paillettes de mica ont des contours irréguliers, fort vaguement hexagonaux.

L'élément accessoire le plus important dans cette roche est l'oxyde de fer; il se trouve à l'état :

1° De paillettes d'ilménite, décomposées sur leurs bords avec production de leucoxène, le noyau restant absolument opaque et inaltéré;

2° De limonite brune, qui enduit les feuillets d'une couche à éclat faiblement métallique;

3° De granules d'oligiste;

4° De petites particules de fer aimant.

On observe comme autres éléments accessoires :

1° Des microlites et de petits prismes de rutile;

2° De la tourmaline bleue;

3° De l'apatite;

4° Le minéral octaédrique déjà signalé plus haut.

*
* *

Dans les quartzophyllades de Viel-Salm et des environs, on observe des zones alternativement claires et obscures, les zones claires étant en général

plus larges que les zones obscures. La teinte foncée de ces dernières est due à la proportion plus forte de particules noires qu'elles contiennent, ainsi qu'au grand développement de nœuds de chlorite fortement altérables. Les zones claires sont les plus quartzeuses; elles renferment des grains de quartz assez volumineux, à contours fort irréguliers, avec peu d'inclusions. Ces grains sont cimentés par de la séricite assez abondante.

Les zones obscures rappellent assez bien la structure et l'aspect des schistes de Grand-Halleux.

Comme éléments accessoires, nous avons observé :

1° De petits fragments de feldspath;
2° De l'apatite, de la tourmaline (rare);
3° Des microlites de rutile et un peu de zircon;
4° De la pyrite et de la magnétite;
5° De la limonite et de l'épidote.

2. *Schistes ardoisiers oligisteux et oligistifère.*

On a réuni sous cette dénomination des roches que Dumont rangeait sous le nom de phyllade simple et de phyllade oligistifère [1].

Le schiste ardoisier simple est en couches divisibles en feuillets très minces, plans, quelquefois ondulés; sa teinte est d'un rouge violet ou d'un rouge lie de vin; souvent les feuillets présentent à leur surface un enduit noir d'oxyde de manganèse. Par altération, il prend une couleur rouge brique, un aspect terreux et se désagrège au point de se délayer dans l'eau. Quant au schiste oligistifère, l'oligiste y apparaît en grains brun violâtre, visibles macroscopiquement. Rarement ces grains atteignent la grosseur d'un petit pois; ils n'ont souvent que celle d'un grain de millet, et sont plus souvent encore imperceptibles à l'œil. Lorsque ces grains sont volumineux, le schiste ardoisier est moins fissile que lorsqu'ils sont très fins, et suivant qu'ils sont orientés, la surface des feuillets est grenue ou fibro-grenue. Dans ce dernier cas, le schiste se laisse très aisément diviser suivant un plan paral-

[1] *Loc. cit.*, p. 127.

lèle aux fibres, formant avec le plan du feuillet un angle assez ouvert, et d'où il résulte des parallélipidèdes dans le sens des fibres. La couleur est d'un rouge violet.

Description microscopique. — La masse fondamentale de ces roches se compose de grains de quartz et de paillettes de séricite, les paillettes de séricite prédominant en général assez sensiblement sur l'autre élément constitutif. Les grains de quartz sont pour la plupart fort petits; leurs contours sont irréguliers ou noyés dans la masse micacée; ils sont remplis d'inclusions gazeuses; dans des cas très rares, ils renferment aussi des paillettes de chlorite. Quant à la séricite, elle se présente ici comme dans les autres schistes ardoisiers; parfois elle peut atteindre des dimensions relativement considérables pour de la séricite de schiste, et présenter dans ce cas des phénomènes de torsion très intenses.

Dans la plupart des schistes salmiens, la chlorite est tout à fait accessoire. Dans quelques-uns cependant, elle se substitue en grande quantité à la séricite, dont elle remplit alors les fonctions. Elle est verte ou verdâtre, dichroïque; son aspect est frais; toujours elle est nettement délimitée; la seule altération est celle en limonite jaunâtre.

Dans une des préparations examinées, nous avons observé un filon dont les salbandes étaient tapissées par du mica blanc et dont la partie centrale était occupée par de la chlorite, accompagnée de particules noires, probablement de magnétite.

Un élément accessoire à peu près constant dans tous ces schistes oligistifères, c'est le grenat; il se trouve tantôt en petits grains arrondis, jaunâtres, à surface chagrinée comme dans le coticule, tantôt en individus plus grands, de forme irrégulière, pouvant présenter des inclusions en nombre considérable et des altérations progressant à partir du centre; ou encore en petites accumulations de plusieurs individus, accolés les uns aux autres, ayant chacun ses contours propres et terminés du côté externe, et renfermant vers la partie centrale de nombreuses inclusions, non déterminables par suite de l'élévation de l'indice de réfraction de cet élément.

La teinte rouge de la roche est due à de l'oligiste; l'oligiste se présente

sous divers états; elle peut affecter la forme de paillettes — c'est le cas le plus rare — ayant parfois des contours assez régulièrement hexagonaux, le plus souvent irréguliers, transparents en rouge cochenille, la partie centrale restant opaque. L'oligiste peut aussi se trouver en granules de très faibles dimensions, transparents en rouge à un fort grossissement et répartis uniformément dans toute la roche. Ce n'est que dans les schistes ardoisiers zonaires que l'oligiste peut manquer dans certaines zones, qui en ce cas sont vertes ou à peu près incolores et ne renferment d'autre élément caractéristique que le grenat. A la lumière réfléchie, les granules ne présentent pas de reflets métalliques, tandis que les paillettes nous offrent parfois, au contraire, des reflets extrêmement brillants; l'explication de ce fait est des plus simples : la surface des granules n'a pas été entamée par le polissage, tandis que celle des paillettes qui sont plus épaisses et par conséquent aussi moins transparentes, a été soigneusement polie avec la préparation.

Un élément normal dans la plupart de ces roches est l'ottrélite, sauf dans les zones les plus claires. Les paillettes ont des dimensions variables, mais moindres que dans le schiste ardoisier ottrélitifère proprement dit; au lieu d'être bleues ou vertes, elles sont entièrement noires; leurs contours sont irréguliers; elles ont presque toujours subi un étirement. La matière micacée de la roche rayonne à partir des individus d'ottrélite, de la même façon que dans le coticule autour des taches (voir plus loin). L'ottrélite reste éteinte entre nicols croisés; sa teinte propre en lumière ordinaire semble être à un fort grossissement un ton gris-brun; ce ton est peut-être dû à la présence de très nombreuses inclusions d'oxyde de fer à un état de ténuité extrême; outre ces inclusions de poussières, il y a des inclusions abondantes de granules analogues à ceux qui se trouvent dans la masse du schiste ardoisier, et que nous avons considérés comme étant de l'oligiste. On peut se demander à quel phénomène est due la concentration de ces particules à l'intérieur des individus d'ottrélite; il est possible que l'ottrélite ait, à un moment où la roche était sous l'effet de l'une ou de l'autre cause légèrement plastique, agi comme un centre d'attraction sur les particules d'oligiste qui se trouvaient dans son voisinage immédiat, et les ait englobées dans sa masse : cette manière de voir expliquerait parfaitement le fait que l'ottrélite se trouve en

général au milieu d'une zone plus claire que le reste de la roche. D'autre part, M. Gosselet [1] a suggéré l'idée que, dans certaines de ces roches du moins, ces grains, qu'il considère à tort comme de la limonite, proviendraient d'infiltrations ultérieures. Nous pensons que la première hypothèse est la plus plausible et explique aussi mieux la présence dans le voisinage de l'ottrélite de plus grands grains de quartz et de paillettes de mica en quantité plus considérable. Notons encore que les cristaux d'ottrélite ont dû subir des phénomènes d'étirement et de dislocation intenses, décrits en détail par M. Gosselet. Notons aussi que, dans certaines parties de ces roches, il y a des taches noires entre nicols croisés, entièrement analogues à celles que nous décrirons dans le coticule et ne se signalant en lumière ordinaire que par une accumulation plus grande des particules noires.

Signalons, pour terminer, les divers éléments accessoires observés, outre ceux que nous avons déjà décrits (chlorite, grenat, oligiste, ottrélite):

1° De la magnétite en petits octaèdres et de l'ilménite;

2° Du rutile, en prismes bien développés, assez souvent maclés, rarement en *Thonschiefernädelchen;*

3° De la tourmaline (rare);

4° Des sections diverses d'apatite bleuâtre, en quantité variable;

5° Du zircon;

6° De la limonite.

Ces éléments accessoires, quoique constants, sont peu importants, sauf la magnétite et le rutile.

3. *Schiste ardoisier ottrélitifère.*

Il est en général moins feuilleté que le schiste salmien oligistifère, mais il est cependant encore assez fissile pour pouvoir, dans un grand nombre de cas, se prêter à la fabrication des ardoises. Parfois les feuillets sont épais et ne sont pas susceptibles de division régulière. Les feuillets sont droits et se laissent rompre avec plus ou moins de facilité suivant un plan déterminé,

[1] *Note sur l'ottrélite* (Bull. Soc. géol. Nord, XV, p. 197).

le plan de longaine. Les paillettes d'ottrélite y sont petites, presque imperceptibles, font saillie à la surface de la roche qu'elles rendent rude au toucher, et présentent souvent une sorte d'orientation qui donne à la roche un aspect fibreux ou réticulé. Dans les schistes où la division est grossièrement feuilletée, les paillettes d'ottrélite atteignent 1 millimètre de diamètre, quelquefois plus encore, et sont irrégulièrement disséminées. Les couleurs que présentent ordinairement ces roches sont le gris bleuâtre passant au gris verdâtre, et quelquefois au rougeâtre, ces couleurs variant par altération.

Description microscopique. — D'après von Lasaulx, « la masse principale du schiste ardoisier ottrélitifère est un mélange composé de lamelles jaunâtres et soyeuses, et de fibres tordues d'un minéral talqueux ou micacé. Entre le réseau apparaît nettement, en lumière polarisée, une masse monoréfringente constituant le ciment du schiste. Les éléments clastiques ne se laissent que rarement déterminer. » Von Lasaulx décrivit aussi les microlites que Zirkel, Credner et Umlauft considérèrent comme de la hornblende et de l'augite, Kalkowsky comme de la staurotide, Renard comme du chrysobéryl, Cathrein, Götz et Van Werveke comme du rutile. Quant aux stries différemment colorées de l'ottrélite, — entre nicols croisés, — elles furent attribuées à une structure lamellaire. Rosenbusch et Renard reconnurent dans la roche la présence de grenats.

Les éléments constitutifs des schistes à ottrélite sont l'ottrélite, le quartz, la séricite, la chlorite, le grenat spessartine, la magnétite, un mica ferrifère, du rutile, de la tourmaline, de l'apatite et du zircon, — aucun de ces minéraux n'ayant, suivant toute probabilité, une origine clastique.

Van Werveke, qui a fait une étude détaillée de ces roches, en considère quatre variétés principales :

1° Le schiste à ottrélite proprement dit, composé essentiellement de quartz, d'ottrélite, de séricite et de chlorite;

2° Le schiste à ottrélite grenatifère;

3° Le schiste à ottrélite aimantifère;

4° La brèche quartzeuse à ottrélite.

Ce qui caractérise surtout l'ottrélite, c'est que, tandis que la séricite est

toujours disposée parallèlement à la schistosité, les lames d'ottrélite occupent des positions très variables par rapport au feuilletage. Elle contient des inclusions liquides à libelle nette, et en outre elle renferme de petits granules noirs d'ilménite ou de magnétite; très fréquemment les lamelles sont brisées ou fendillées profondément dans diverses directions. En outre, elles peuvent être altérées sur les bords et avoir donné naissance à de la limonite. Autour de ce minéral s'observe un groupement des autres minéraux de la pâte, surtout de la séricite; les paillettes de séricite se rangent en couches parallèles, en partie dans la direction des sections d'ottrélite et en partie sous des angles très variables par rapport à cette direction.

Les deux variétés, grenatifère et aimantifère, sont caractérisées par la présence d'un de ces deux éléments, qui se traduit macroscopiquement par des différences de coloration, le schiste à grenat étant gris clair, le schiste à magnétite de couleur foncée, presque noire.

Quant à la quatrième variété de Van Werveke, la brèche quartzeuse à ottrélite, Gosselet lui reproche d'être trop locale et de manquer de précision; il semble qu'il faille se rallier à l'avis de Gosselet, qui, lui aussi, a fourni de ces roches une étude très détaillée.

4. Coticule.

Le coticule ou pierre à rasoir forme dans le schiste ardoisier violet ou oligistifère des couches nombreuses, d'un ou plusieurs centimètres d'épaisseur, parallèles entre elles et au plan de stratification, et assez rapprochées l'une de l'autre. Ces couches sont à feuillets droits ou ondulés, comme dans certaines agates, assez souvent divisibles en prismes et en fragments à surface droite ou subconchoïde.

En général, cette pierre est d'un jaune clair, quelquefois gris verdâtre pâle, rarement violâtre, d'un éclat mat ou cireux et d'apparence talqueuse lorsqu'on l'observe à la loupe. On y voit aussi quelquefois des lamelles brillantes de même couleur, ou légèrement rosâtres, qui se laissent aisément rayer. Les feuillets ont ordinairement une même couleur; le coticule est rayé par l'acier, mais il est plus dur que le schiste; quelquefois on

observe un passage minéralogique entre les deux roches. On trouve parfois dans le coticule des veines de quartz.

Description microscopique. — Une étude microscopique de cette roche a été faite d'une façon très approfondie par M. Renard [1].

La masse fondamentale est constituée en grande partie par de la substance micacée; les paillettes de mica sont peu étendues et forment un réseau serré, qui englobe tous les autres éléments et qui interfère très vivement entre nicols croisés. Dans certaines parties des préparations examinées, on n'observe que cette séricite accompagnée d'un peu de quartz; dans d'autres zones, au contraire, la séricite est associée à divers minéraux. Les grains de quartz n'ont que des contours peu nets et renferment généralement des inclusions gazeuses.

Les deux autres éléments constituants de la roche ont été déterminés l'un comme du grenat spessartine [2], l'autre comme du rutile. Les grenats se trouvent en petits granules, en individus globulaires, tantôt agglomérés en quantité considérable, tantôt assez épars dans la pâte. Leurs contours sont plus ou moins réguliers et sont ceux des différentes sections de rhombododécaèdre à arêtes courbes; ils sont jaunâtres; leurs bords sont très foncés; leur indice de réfraction est très élevé; leurs dimensions varient entre 2 et 5 μ; ce n'est que fort rarement que l'on en observe des individus atteignant 10 à 15 μ et exceptionnellement des individus de 0.1 millimètre.

Le troisième élément important est le rutile; il se trouve dans ces roches en petits prismes jaunâtres simples ou maclés, présentant toutes les formes de macles observées, la macle en cœur étant de beaucoup la plus rare. Les individus les plus volumineux n'atteignent guère plus de 20 μ.

Parmi les minéraux accessoires, il en est un qui acquiert dans le coticule un développement considérable : c'est la tourmaline, en petits prismes bleuâtres, fréquemment brisés, rarement terminés à leurs deux extrémités.

[1] *Mémoire sur la structure et la composition minéralogique du coticule* (MÉM. COUR. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, t. XLI, 1877).

[2] RENARD, *loc. cit.*, p. 22.

Quant à l'apatite, elle s'observe aussi dans ces roches, en sections prismatiques, parfois hexagonales, avec ses inclusions si constantes.

Entre nicols croisés, le coticule interfère vivement; cela est dû à la quantité de séricite qui entre dans sa constitution. Mais dans la plupart des préparations, il y a des zones, des plages qui restent entièrement éteintes pour une rotation complète entre nicols croisés; de ces taches rayonnent des paillettes de séricite et de nombreux petits prismes de quartz. Le diamètre de ces taches est de $^1/_3$ à $^1/_{10}$ de millimètre; elles sont parfois accumulées en certaines parties de la préparation. W. Maynard Hutchings[1] rapporte ces taches à un phénomène de contact, tout en reconnaissant que l'on ne signale pas de roche éruptive dans le voisinage des gîtes de coticule. Gosselet[2] les a également observées dans ses préparations de coticule et les a décrites d'une façon très complète; il les appelle noyaux et les rapproche, sans insister cependant sur le rapprochement, des nœuds de *Knotenthonschiefer* de Rosenbusch. Dans ces nœuds nous avons pu constater l'absence à peu près complète de prismes de rutile et la présence de rutile à l'état de *Thonschiefernädelchen,* à diamètre à peine sensible. Ce qui y abonde, ce sont de fort petits cristaux de grenat, n'atteignant pas même les dimensions déjà si minimes des grenats de la roche même; en outre, il y a une masse fondamentale entièrement isotrope. Alors que, dans la grande majorité des cas, rien ne trahit en lumière ordinaire la présence de ces taches, nous avons cependant eu une préparation où chaque partie isotrope était jaunâtre en lumière ordinaire, la coloration jaunâtre ne semblant pas être due à un enduit de limonite, mais provenir plutôt d'une altération de la masse fondamentale, ce qui semblerait indiquer une composition chimique différente dans les deux cas.

[1] *Geol. Magaz.*, avril 1895.
[2] *Ann. Soc. géol. Nord,* XV, 1888, p. 205.

CONCLUSION.

Résumons maintenant les observations que nous avons faites.

Pour les quartzites verts et blanchâtres (Dv1 et Dv2) du massif de Rocroi, nous n'avons pas maintenu dans la description microscopique la distinction établie par Dumont, ces deux séries de roches présentant les mêmes particularités de structure. Toutes deux sont constituées par des grains de quartz anguleux de dimension moyenne qui englobent des grains plus volumineux et roulés, autour desquels ils forment, avec le mica, comme une pâte, comme une masse fondamentale; de là cette structure qui rappelle la structure microporphyrique de certaines roches éruptives. Les quartzites reviniens s'en différencient nettement : ils sont constitués par des grains de quartz, mais ayant tous à peu près la même dimension, et également enserrés dans un réseau micacé. Quant aux éléments accessoires de ces deux roches, ce sont à peu près les mêmes, sauf que la pyrite est plus importante dans le revinien que dans le devillien.

La particularité de structure la plus importante des schistes ardoisiers simples devilliens du massif de Rocroi, c'est la présence de paillettes noires, fusiformes d'ilménite, atteignant parfois 1 millimètre de longueur, mais ne dépassant guère $0^{mm},15$ de largeur et ayant certainement une épaisseur encore moindre. La masse fondamentale se compose de quartz et de séricite, de chlorite et accessoirement d'apatite, de tourmaline, de rutile et de zircon. Dans les roches de même étage de la bande de Fumay, l'élément principal est la séricite; ensuite viennent le quartz et des nœuds de chlorite, toute la roche étant parsemée de particules de fer oligiste, en paillettes ou en globules en déterminant la coloration; un caractère important consiste dans la présence d'une grande quantité de microlites de rutile; accessoirement, tourmaline, apatite et calcite; les schistes verts de la même bande diffèrent assez notablement des schistes verts de Monthermé-Rimogne : le grain est beaucoup plus fin, l'ilménite est bien moins abondante et peut être absente, et la chlorite forme des nœuds, dont nous avons donné la description détaillée;

les microlites de rutile sont caractéristiques par leur abondance; en outre, on observe de la tourmaline (abondante), de l'apatite, de la limonite, de la calcite, de l'oligiste, du zircon et de la magnétite (peu).

Les schistes aimantifères de Monthermé offrent les nœuds de fer aimant dont la structure a déjà fait l'objet de nombreuses études et est bien connue. La pâte se compose de quartz et de séricite; l'apatite, la tourmaline et le rutile sont trois éléments importants; accessoirement on y trouve de la chlorite, du graphite et des particules charbonneuses, de l'ilménite, de l'oligiste, de la calcite, plus rarement du zircon.

Quant aux schistes reviniens, dans lesquels le quartz et la séricite jouent encore le rôle principal, ils se distinguent très nettement de tous les autres par leur teinte noire, qui est due à la présence tant de particules charbonneuses que de pyrite et d'ilménite; le rutile se trouve en accumulations de microlites prodigieuses. Très souvent la structure est légèrement zonaire, ce qui est dû à des variations dans les proportions de pigment. Accessoirement il y a de la tourmaline, de l'oligiste et de l'apatite. Ce schiste ardoisier est, avec celui de Fumay, le plus aphanitique de tous les schistes du massif de Rocroi.

*
* *

Dans la description microscopique des roches du Brabant, il nous a été impossible de tenir compte des divisions établies par la Commission de la Carte, et nous avons décrit l'une après l'autre, tant pour les schistes que pour les quartzites et les arkoses, les roches de ce massif. La seule division que nous ayons maintenue est celle des schistes en schistes aimantifères et schistes non aimantifères, mais cette division, nous l'avons maintenue plutôt pour la facilité des descriptions que parce qu'il y aurait eu lieu de le faire par suite de différences profondes qui auraient séparé ces deux catégories de roches.

Pour les quartzites, il est fort difficile de résumer leur structure générale en quelques mots : notons qu'ils sont fortement siliceux; l'analyse a donné pour celui que nous pouvons considérer comme un type de quartzite important, celui de Nil-Saint-Vincent, 98 % de SiO_2. Quant à la structure

de la roche, aux dimensions respectives et à la forme des grains, il n'est guère possible de formuler une conclusion générale : parmi les quartzites, un grand nombre se rapprochent de ceux du devillien, un nombre moins considérable de ceux du revinien de l'Ardenne. Le ciment est micacé ou siliceux; de la chlorite peut également entrer dans sa composition. Les éléments accessoires observés sont le rutile, l'apatite, la tourmaline, le zircon, la biotite, l'ilménite, la pyrite, des poussières charbonneuses, le mispickel et de la limonite.

Les schistes du Brabant contiennent tous des particules noires, que l'analyse chimique a permis de déterminer comme ilménite; ces particules sont très ténues et se trouvent en quantité variable tant dans les schistes aimantifères que dans les schistes non aimantifères, et c'est cet élément qui, dans la plupart des cas, détermine la coloration de la roche, un des deux caractères sur lesquels est basée la division de ces roches d'après la légende de la Carte; nous sommes en droit de prétendre que c'est là un caractère accessoire, dont on ne doit plus tenir compte dans la classification. L'autre caractère est la présence ou l'absence de fer aimant : notons d'abord que les schistes aimantifères se présentent ici d'une façon toute différente de celle dont ils se présentent dans le massif de Rocroi. Tandis que, dans ce dernier, ils constituent une zone entière et que leur présence ne contredit pas l'hypothèse de Dumont sur la zone métamorphique, ils se trouvent, dans le Brabant, dans un grand nombre de localités, où ils accompagnent des schistes non aimantifères et ne permettent donc pas l'interprétation de leur origine par le métamorphisme dynamique seul. Pour le reste, les roches offrent une cristallinité bien moins parfaite; les éléments accessoires, tels que tourmaline, apatite et rutile, jouent un rôle plus effacé, et l'ensemble du dépôt a été l'objet de modifications profondes à la suite des altérations produites par les eaux et par l'atmosphère; la chlorite s'est substituée très souvent, du moins partiellement, à la séricite dans la constitution du ciment, et des minéraux tels que la limonite et l'épidote se sont bien développés. Remarquons, pour terminer, que la composition de ces roches ne doit pas être un obstacle dans la classification, et que si des découvertes ultérieures viennent prouver, pour des raisons stratigraphiques ou paléontologiques,

qu'il y a lieu soit de les rapprocher, soit de les séparer de celles de l'Ardenne, l'étude que nous en avons faite nous permet de dire que la structure lithologique ne sera ni une preuve ni un argument dans l'un ou l'autre sens.

La composition des arkoses ne peut être d'aucune utilité dans la détermination des relations entre les trois massifs, puisque ce genre de roches ne se trouve ni dans celui de Rocroi ni dans celui de Stavelot. Les trois éléments macroscopiques sont le quartz, le feldspath et le mica blanc, dont l'étude confirme en tous points l'origine sédimentaire; autour d'eux vient se grouper le ciment sériciteux ou chloriteux ; les éléments accessoires sont : la pyrite, la magnétite, le zircon, le rutile, l'ilménite, l'apatite, la tourmaline, la hornblende, la titanite, la glaucophane (?), et la limonite, l'épidote et la calcite, produits d'altération.

*
* *

L'étude du quartzite de Hourt nous a fourni la preuve qu'il n'y a pas lieu de le considérer comme revinien; il se rapproche bien plus du quartzite devillien de Rocroi; le ciment est micacé, plus ou moins abondant; les éléments accessoires sont l'apatite, la tourmaline, le rutile, le zircon, la biotite (rare), l'amphibole et l'ilménite. Les quartzites de Grand-Halleux sont fort semblables au précédent et présentent la structure pseudo-microporphyrique : ciment sériciteux ; accessoirement : apatite, tourmaline, zircon (rare), rutile, ilménite, oligiste ; secondairement de la limonite; de la magnétite, très rare.

Les schistes devilliens du massif de Stavelot rappellent, sauf quelques particularités d'importance secondaire, l'aspect des schistes verts qui, dans le massif de Rocroi, sont subordonnés aux schistes violets de Fumay; quelques-uns d'entre eux sont aimantifères; comme éléments accessoires, de grandes quantités de *Thonschiefernädelchen,* de la tourmaline, du grenat, de l'ilménite, de l'oligiste et de l'apatite; en cas d'altération, de la chlorite, de la limonite et de l'épidote.

Les quartzites reviniens présentent une structure des plus caractéristiques; on dirait que tous les grains de quartz ont recristallisé et se sont, dans leur

croissance, engagés les uns dans les autres; de plus, la structure veinée que la roche offre à l'examen macroscopique, se retrouve sous le microscope; le ciment est siliceux ou micacé, les éléments accessoires sont peu importants. Les schistes reviniens se composent de grains de quartz, avec de la séricite et un peu de chlorite, la séricite étant le constituant essentiel de la roche; le rutile s'y trouve en quantité très variable, parfois très considérable; parmi les autres éléments accessoires, la pyrite est le plus important et colore la roche en noir, comme dans le massif de Rocroi; on observe en outre de la magnétite, de l'ilménite, de l'apatite, de la tourmaline, de l'oligiste, de la limonite et un autre minéral non déterminé, résultant probablement d'altération. La structure peut être zonaire.

De même que les arkoses dans le Brabant, les roches salmiennes dans le massif de Stavelot ne sont d'aucune utilité pour la détermination des relations entre les trois massifs. Nous avons donné une description lithologique détaillée :

1° Des quartzites et des grès qui sont composés de grains de quartz de même dimension, d'un ciment chloriteux ou sériciteux, et accessoirement de tourmaline;

2° Des schistes et quartzophyllades. La structure des quartzophyllades est fort compliquée; outre le quartz et la séricite dont nous avons indiqué la disposition, on y observe de l'ilménite, de l'oligiste, du fer aimant, du rutile, de la tourmaline et de l'apatite. Les schistes oligisteux et oligistifères sont caractérisés par l'oligiste qu'ils contiennent; la masse fondamentale est constituée par du quartz et de la séricite; la chlorite peut ne jouer qu'un rôle secondaire; un élément accessoire important est l'ottrélite, qui renferme de nombreuses inclusions d'oligiste; une particularité de structure réside dans la présence, entre nicols croisés, de taches noires. Quant au schiste ottrélitifère, il se distingue du précédent par la dimension des paillettes d'ottrélite et par leur importance; il peut être grenatifère ou aimantifère; le coticule présente, outre la pâte essentiellement sériciteuse, du grenat et du rutile; il offre, lui aussi, entre nicols croisés, les taches déjà observées dans le schiste oligistifère.

On peut regretter que l'étude du massif de Stavelot, au point de vue

stratigraphique, ne soit pas plus complète; bien des points doivent encore être éclaircis, d'abord quant aux relations entre le devillien et le revinien, puis quant à la délimitation nette du revinien et du salmien.

*
* *

La quantité d'oxyde titanique qui se trouve dans toutes les roches cambriennes est peut-être un indice sur la nature des roches éruptives qui leur ont donné naissance par leur désagrégation; on peut admettre qu'elles proviennent de roches ayant contenu beaucoup d'ilménite, telles que des diabases ou des diorites. Des recherches ultérieures pourront peut-être élucider la question. Pour le moment, il importe surtout de compléter les notions stratigraphiques et d'étudier la nature des phénomènes de métamorphisme qui ont transformé les dépôts primitifs.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Fig. 1. — Quartzite devillien, en lumière polarisée. Cette figure montre les deux espèces de grains qui composent la roche et lui impriment par leur juxtaposition la texture microporphyroïde.

Fig. 2. — Schiste grisâtre de Rimogne, taillé perpendiculairement à la schistosité. Cette figure montre le feuilletage parfait de la roche et l'intercalation de petites paillettes d'ilménite entre les sections.

Fig. 3. — Schiste ardoisier violet d'Haybes. La préparation a été photographiée avec un grossissement relativement considérable et montre les fragments d'oligiste caractéristiques pour les roches de cette localité.

Fig. 4. — Schiste ardoisier aimantifère de Monthermé. Cette figure sert à illustrer la texture de la masse fondamentale, telle qu'elle se présente dans une section faite parallèlement à la schistosité; elle montre en outre des sections de tourmaline et de rutile.

Fig. 5. — Schiste ardoisier vert de Fumay. Belle-Joyeuse. Cette figure montre surtout l'aspect sous lequel se présentent les petits cristaux de rutile qui abondent dans cette roche.

Fig. 6. — Quartzite revinien. Revin. La masse est constituée par des grains de quartz, à peu près tous de même dimension et cimentés par la séricite très abondante.

PLANCHE II.

Fig. 1. — Schiste de Revin. Revin. La photographie nous présente une portion de bande claire et une portion de bande obscure. On voit aussi les particules charbonneuses et l'abondance des petits cristaux de nature diverse.

Fig. 2. — Quartzite de Blanmont. Un de ces quartzites du Brabant caractérisés par l'absence presque complète de ciment micacé; la photographie montre en outre la disposition des grains de quartz.

Fig. 3-4. — Quartzite rougeâtre de Nil-Saint-Vincent, en lumière ordinaire et en lumière polarisée. Le grain volumineux se résout, en lumière polarisée, en un grand nombre de parties orientées différemment. Dans la plage photographiée se trouve un fragment de filon quartzeux.

Fig. 5. — Quartzite de Thorembais-Saint-Trond. Le type de quartzite du Brabant où la structure microporphyroïde des grains de quartz est le plus développée.

Fig. 6. — Schiste aimantifère de Rodenem : le schiste aimantifère du Brabant où le fer aimant atteint la dimension la plus considérable et forme des nœuds avec la chlorite, mais coexiste toutefois avec des particules d'ilménite.

PLANCHE III.

Fig. 1. — Schiste bigarré d'Oisquercq. La pâte se compose d'un mélange de séricite et de quartz, peu distinct dans la photographie, qui sert à montrer la disposition des particules d'ilménite.

Fig. 2. — Schiste ardoisier devillien de Wanne. La figure montre de nombreuses aiguilles de rutile, sous la forme si caractéristique de *Thonschiefernädelchen*, réparties abondamment dans la masse fondamentale.

Fig. 3. — Schiste ardoisier revinien de Coo-Trois-Ponts. La figure nous représente une plage d'un schiste où les petits cristaux de rutile sont accumulés d'une façon remarquable.

Fig. 4. — Quartzophyllade salmien. La figure sert à montrer la grandeur des grains de quartz et le développement exceptionnel de la séricite caractéristique de cette espèce de roches.

Fig. 5. — Schiste ardoisier oligistifère salmien. Outre l'oligiste en granules fort petits, on voit sur la figure des sections d'ottrélite, moindres toutefois que dans le schiste ottrélitifère proprement dit, le ton brun de cette ottrélite étant dû à l'abondance des inclusions d'oxyde de fer.

Fig. 6. — Coticule de Salm-Château, en lumière polarisée. La photographie montre les « noyaux » déjà signalés par Maynard Hutchings et décrits page 85 du travail.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

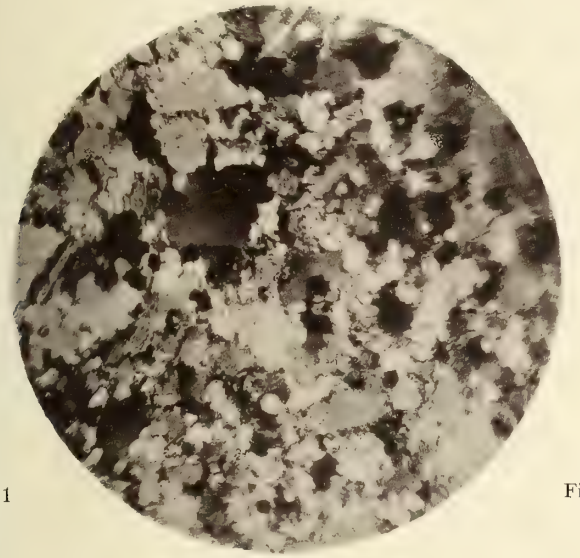


Fig. 1

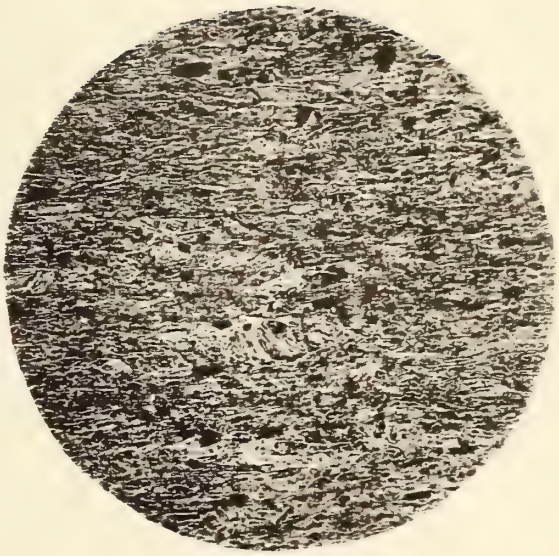


Fig. 2

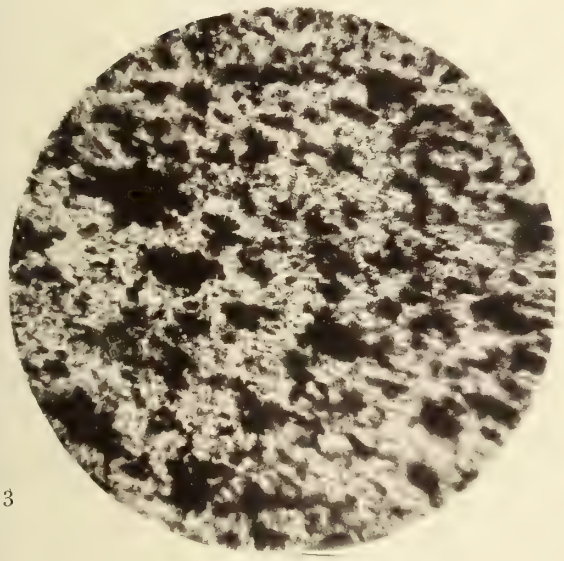


Fig. 3

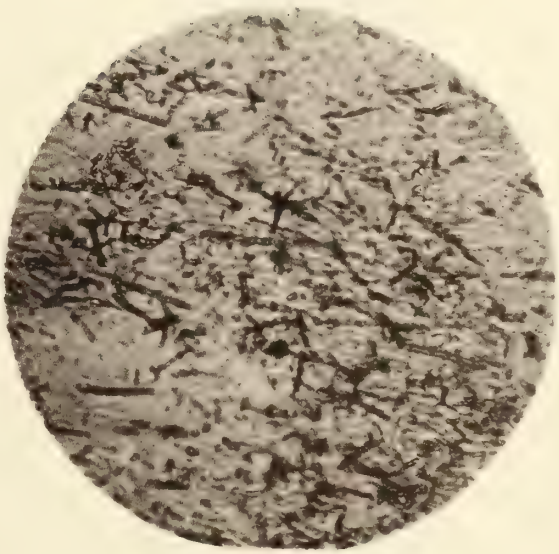


Fig. 4

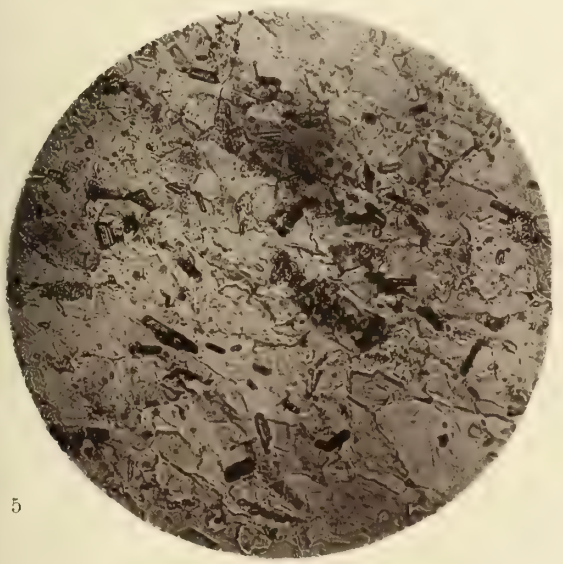


Fig. 5

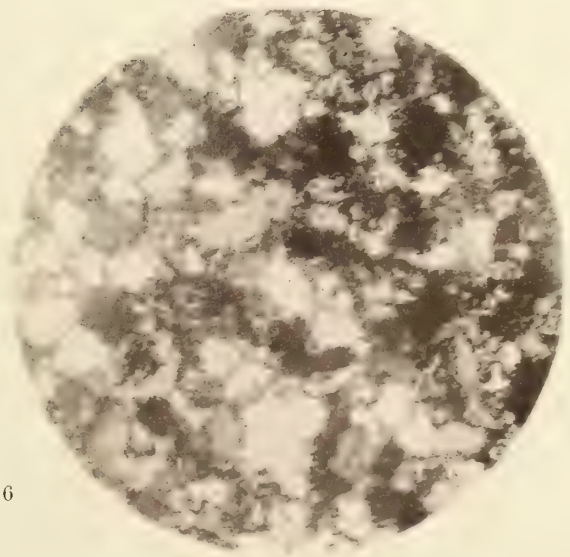


Fig. 6

Phototypie de F. Bruckmann, Munich

BRITISH MUSEUM
NATURAL HIST

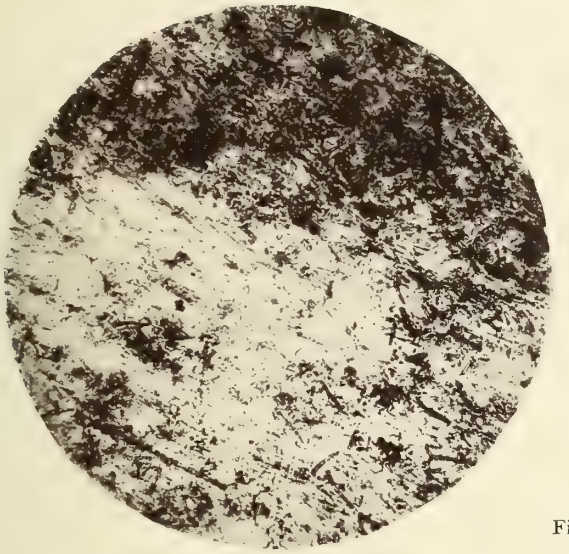


Fig. 1

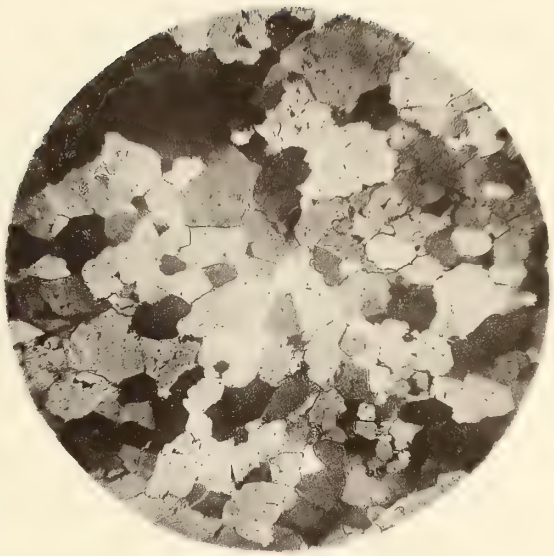


Fig. 2

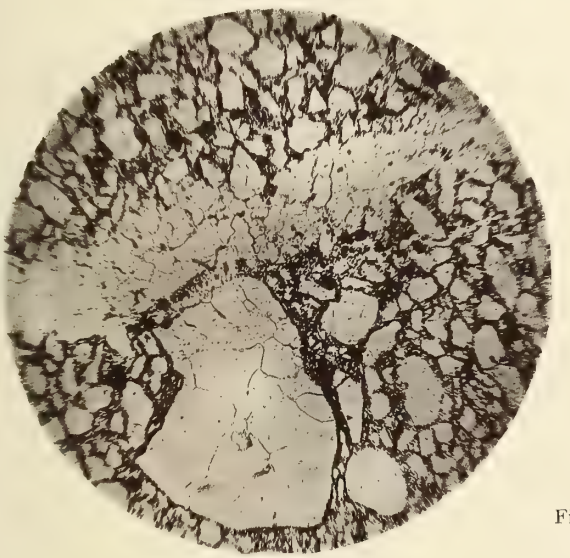


Fig. 3

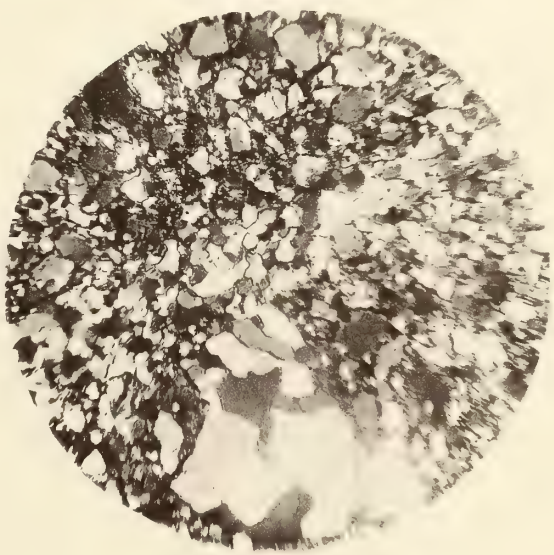


Fig. 4

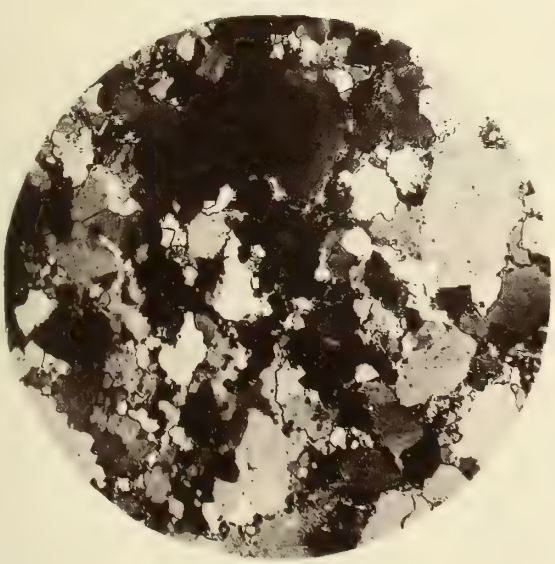


Fig. 5

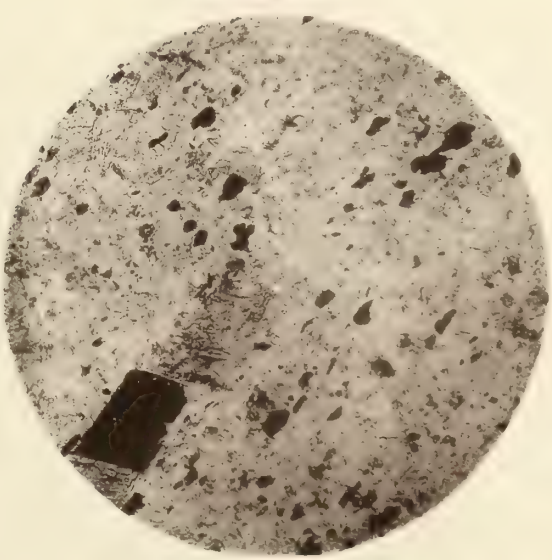


Fig. 6

BRITISH MUSEUM
NATURAL HIST.

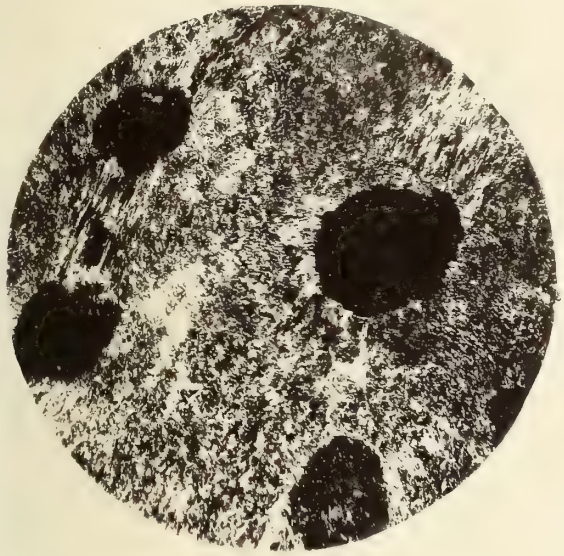


Fig. 1

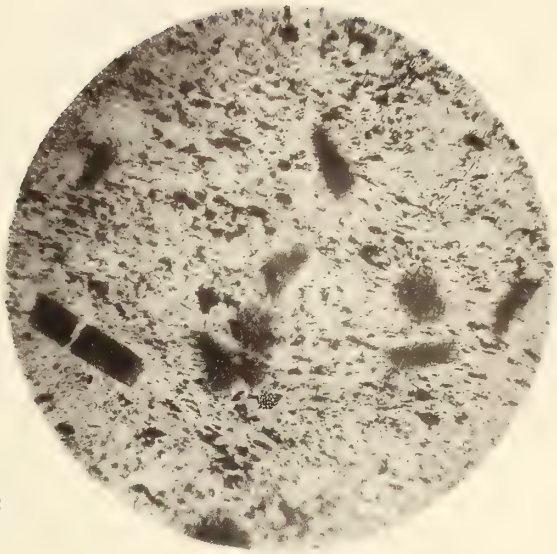


Fig. 2

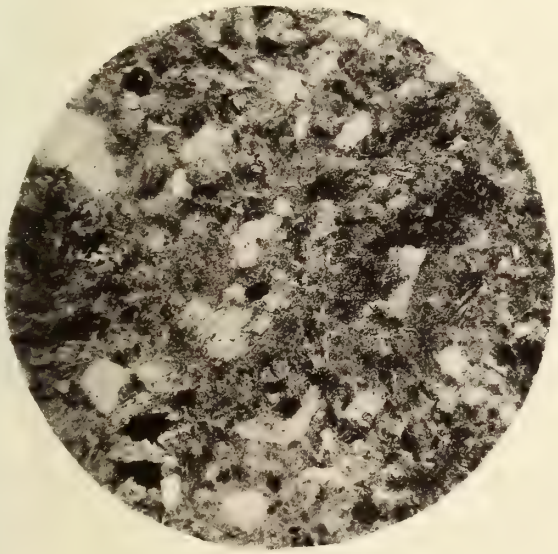


Fig. 3

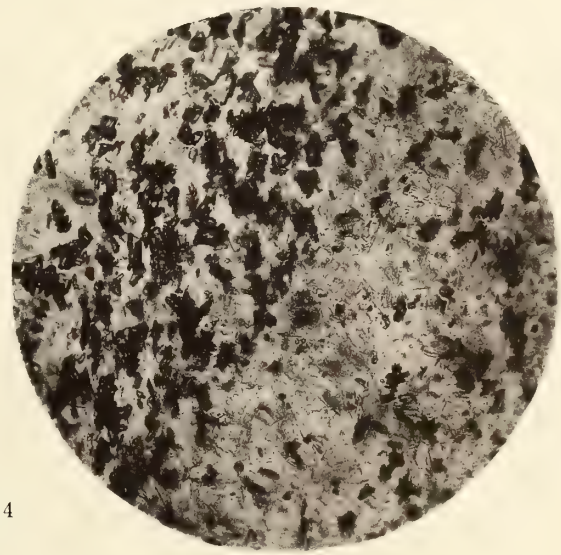


Fig. 4

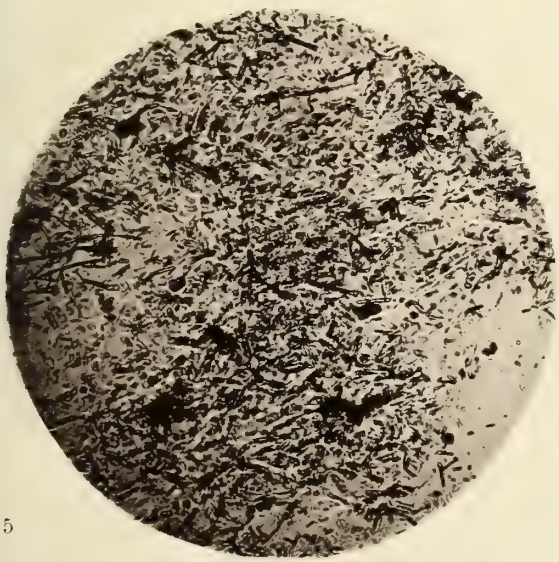


Fig. 5

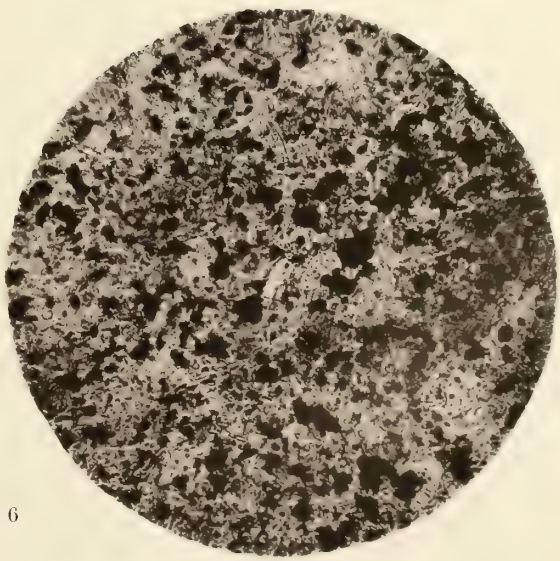


Fig. 6

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

HISTORIQUE 3

MASSIF DE ROCROI :

Disposition géographique et données historiques 7

A. Système devillien :

1. *Quartzites blancs et verts* 9
2. *Schiste ardoisier simple de Rimogne* 11
3. *Roches devilliennes de la bande de Fumay*. 14
4. *Schiste ardoisier aimantifère de Monthermé* 18

B. Système revinien :

1. *Quartzites noirs*. 21
2. *Schistes noirs reviniens* 22

C. Roches subordonnées :

1. *Schiste ardoisier noir de Monthermé* 25
2. *Schiste ardoisier ottrélitifère de Monthermé* 25
3. *Schiste ardoisier ottrélitifère revinien* 26

MASSIF DU BRABANT :

Distribution géographique 27

Historique 28

A. Quartzites 30

B. Schistes :

Schistes aimantifères 37
Schistes non aimantifères 45
Schistes grenatifère, pailleté, épidotifère, etc. 51

C. Arkoses 54

Pages.

MASSIF DE STAVELOT :

Distribution géographique 59

A. Système devillien :

1. *Quartzite blanc de Hourt* 62
2. *Quartzites devilliens supérieurs* 64
3. *Schistes ardoisiers* 66

B. Système revinien :

1. *Quartzites* 68
2. *Schistes ardoisiers* 71

C. Système salmien :

Quartzites et grès salmiens 74
1. *Quartzophyllades* 76
2. *Schistes ardoisiers oligisteux et oligistifère* 78
3. *Schiste ardoisier ottrélitifère* 81
4. *Coticule* 83

CONCLUSIONS 86

PRIX JEAN-SERVAIS STAS

DÉTERMINATION

DU

POIDS ATOMIQUE DU MOLYBDÈNE

PAR

le Dr Adolphe VANDENBERGHE

PRÉPARATEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND

« Celui qui observe ou expérimente à l'aventure n'est qu'un empirique, du travail duquel il n'y a rien à attendre. »

J.-S. STAS.

(Couronné par la Classe des sciences dans la séance du 15 décembre 1897.)

La Classe des sciences avait proposé comme sujet de ce concours spécial de :

« *Déterminer, par des recherches nouvelles, le poids atomique d'un ou de plusieurs éléments pour lesquels cette constante physique est encore incertaine aujourd'hui.* »

DÉTERMINATION

DU

POIDS ATOMIQUE DU MOLYBDÈNE

PREMIÈRE PARTIE

I. — Introduction.

La détermination des poids atomiques est un problème fort important dont la résolution doit intéresser tous les chimistes, ne fût-ce qu'au point de vue abstrait de la recherche de la vérité scientifique.

Ceux qui se placent sur le terrain de la pratique attachent une grande importance à la connaissance du poids atomique exact des éléments usuels, de ces éléments qu'on a à doser tous les jours. Les plus illustres chimistes

de ce siècle se sont consacrés à ce gigantesque travail. On attachera une importance tout aussi grande à la fixation rigoureuse de l'équivalent de certains éléments qu'on est plus rarement dans le cas de devoir doser, mais qui, comme le platine dans les chloroplatinates, servent à amener sous une forme convenable des corps simples dont le dosage doit être effectué.

Si l'on se place à un point de vue plus théorique, on applaudira aux efforts faits pour déterminer rigoureusement le poids atomique de quelques éléments moins importants en apparence, le tellure, par exemple, mais auxquels il s'agit d'assigner une place exacte dans le système de Mendelejeff.

Mais en dehors de ces deux catégories de corps simples, il en est quelques-uns que l'on n'a à doser que fort exceptionnellement et dont la place dans la classification du célèbre chimiste russe ne paraît pas être en discussion. De ce nombre est le molybdène. Jusqu'ici les composés de ce métal n'ont servi qu'à préparer le phosphomolybdate d'ammonium, qui n'est qu'une forme transitoire par laquelle on fait passer l'acide phosphorique dans l'analyse quantitative. Mais on vient de préconiser une méthode d'après laquelle le phosphomolybdate d'ammonium acquerrait une composition constante, ce qui permettrait de le peser directement (*). Rien qu'à ce point de vue, la détermination rigoureuse du poids atomique du molybdène paraîtrait désirable.

La détermination du poids atomique du molybdène (O = 15.96) a fait l'objet de nombreux travaux, dont je donne le résumé dans le tableau synoptique suivant (**) :

(*) Villers et Borg, *Bull. de la Soc. chimique de Paris*, 1893, t. IX, p. 486.

(**) F. W. Clarke, *The constants of nature. A recalculation of the atome weights.* (Smithsonian Miscellaneous collections, vol. XXVII.)

L. Meyer und K. Seubert, *Atomgewichte.*

Ostwald, *Lehrbuch der allgemeinen Chemie*, t. I.

AUTEUR.	PUBLICATION.	SUBSTANCE ANALYSÉE.	MOLYBDÈNE DOSÉ SOUS FORME DE	POIDS ATOMIQUE.
Berzélius	*Pogg. Ann.*, 8, 23.	$PbMoO_4$	$Pb(NO_3)_2$	95.21
Berlin	*Journ. f. prakt. Ch.*, 49, 444.	$(NH_4)_4Mo_5O_{17}, 3H_2O$	MoO_3	91.98
v. d. Pfordten . .	*Zeit. f. anal. Chemie*, 23, 611.	$(NH_4)_3Mo_7O_{24}, 4H_2O$	Mo	95.84
Bucholz	*Pogg. Ann.*, 8, 23.	MoS_2	$BaSO_4$	95.31
Svanberg et Struve.	*Journ. f. prakt. Ch.*, 44, 301.	MoS_2	MoO_3	94.7 et 92.9
Rose	*Pogg. Ann.*, 40, 400.	MoS_2	Ag Cl	93.0
Liechti et Kempe .	*Lieb. Ann.*, 169, 344.	MoS_2	Ag Cl	95.73; 95.98; 95.93
Rose	*Pogg. Ann.*, 40, 400.	MoO_2Cl_2	Ag Cl	99.4
Svanberg et Struve.	*Journ. f. prakt. Ch.*, 44, 301.	MoO_2Cl_2	»	101.6
Liechti et Kempe. .	*Lieb. Ann.*, 169, 344.	$MoCl_5$	»	96.04
» . .	»	$MoCl_5$	MoS_2	95.79
» . .	»	$MoCl_4$	Ag Cl	95.60
» . .	»	»	MoS_2	96.11
» . .	»	$MoCl_2$	»	95.73
» . .	»	»	Ag Cl	96.23
Debray.	*Comptes rendus*, 66, 732.	MoO_3	Ag_2MoO_4	95.78
Svanberg et Struve.	*Journ. f. prakt. Ch.*, 44, 301.	MoO_3	K	91.66
» .	»	MoO_3	MoS_2	91.2
» .	»	MoO_3	Mo_2O_3	90.5
» .	»	MoO_3	MoO_2	88.8
Delafontaine . .	*Journ. f. prakt. Ch.*, 95, 137.	Calculé d'après les travaux de Svanberg et Struve.		91.72
Dumas	*Lieb. Ann.*, 113, 32.	MoO_3	Mo	95.65
Debray.	*Comptes rendus*, 66, 732.	»	»	95.3
Rammellsberg . .	*Monatsheft Berl. Akademie*, 1877, 573.	»	»	96.18
Seubert et Pollard.	*Zeit. f. anal. Chemie*, 8, 434.	»	Ag Cl	95.73
» .	»	»	Mo	95.74
Smith et Maas . .	*Zeit. f. anal. Chemie*, 5, 280.	Na_2MoO_4	Na Cl	95.84
» . .	»	»	Ag Cl	95.86

Un coup d'œil jeté sur ce résumé montre aisément que de nouvelles recherches sont nécessaires. Si je fais abstraction des travaux de Rose, de Berlin et de ceux de Svanberg et Struve, dont les résultats paraissent fort inexacts, je trouve que le poids atomique assigné à cet élément par Berzélius, Dumas, Debray, Rammelsberg, Lothar Meyer, v. d. Pfordten oscille entre 95.21 et 96.18 (O=15.96). On n'est donc pas même sûr de la première décimale. La cause en gît dans la difficulté d'obtenir ce métal ou la plupart de ses combinaisons à un degré de pureté suffisant pour ce genre de déterminations. Il faut ajouter que souvent les méthodes analytiques employées présentent des imperfections nombreuses et que leur complexité multiplie les causes d'erreur. Seubert et Pollard (*) en ont fait une excellente critique dans leur travail sur le poids atomique du molybdène. Je crois devoir dire dès à présent que ce travail a paru quand j'avais déjà entrepris les expériences qui font l'objet du présent mémoire.

Les recherches sur le poids atomique du molybdène peuvent se diviser en deux catégories. Les unes ont pour but de déterminer directement l'équivalent de ce métal par rapport à un élément de poids atomique connu et pris comme terme de comparaison; les autres, qu'on peut appeler méthodes indirectes, ont cherché à établir l'équivalence d'une combinaison du molybdène par rapport à une autre combinaison chimique de poids moléculaire connu. Toutes les méthodes de la première catégorie reviennent à établir l'équivalent du molybdène en fonction de l'oxygène dans l'anhydride molybdique (MoO_3), dont la constitution paraît bien établie et qu'on peut obtenir à un haut degré de pureté. Seulement, au lieu d'unir le molybdène à l'oxygène, on a réduit l'anhydride molybdique par l'hydrogène. Or rien ne garantit que la réduction fût complète même aux plus hautes températures; en outre, la volatilisation inévitable d'une partie de l'anhydride molybdique au début de l'opération entraîne toujours des pertes, ce qui conduit fatalement à des erreurs. Je n'en veux d'autre preuve que les résultats obtenus par Dumas : entre les mains de cet illustre opérateur, cette méthode a donné des écarts allant de 95.41 à 96.32 (O = 16).

(*) Seubert et Pollard, *Zeitschrift f. anorg. Chem.*, 8, p. 434

Inversement, l'oxydation directe du molybdène n'a pu être faite jusqu'ici, parce que le métal nécessaire à cette opération ne pouvait s'obtenir que par réduction de l'anhydride molybdique. Or ce procédé donne un produit impur : à la température très élevée où s'opère cette réduction, il se forme soit des siliciures, soit des platinures de molybdène, selon la nature des vases mis en œuvre.

La réduction du sulfure est tout aussi peu pratique. Comme je l'ai montré (*), le molybdène obtenu par réduction du sulfure, suivant la méthode de v. d. Pfordten, ne présente aucune garantie de pureté.

Quant au molybdène de M. Moissan (**), il renferme toujours des traces de scories.

Les méthodes indirectes, quoique théoriquement moins rigoureuses que la méthode directe (***), ont été beaucoup plus fréquemment utilisées pour la détermination du poids atomique du molybdène. Signalons d'abord les travaux de Liechti et Kempe (IV), qui ont opéré sur les chlorures de molybdène et fourni à Lothar Meyer (V) des données à l'aide desquelles il a calculé l'équivalence de ces composés par rapport au chlorure d'argent et au bisulfure de molybdène. Ces résultats sont fort sujets à caution, car l'obtention des chlorures de molybdène exempts d'oxychlorures est à peu près impossible. Le dosage du molybdène sous forme de bisulfure, obtenu lui-même en réduisant le polysulfure par l'hydrogène, ne paraît pas devoir inspirer beaucoup de confiance. Il est en effet impossible de garantir que dans ces réductions on s'arrête juste au bisulfure, et qu'à son tour celui-ci n'est pas réduit plus profondément. Aussi L. Meyer arrive-t-il à des résultats qui oscillent entre 95.16 et 97.03.

Le procédé de Smith et Maas (VI) consiste à transformer l'orthomolybdate de sodium en chlorure de sodium et en dihydroxychlorure de molybdène

(*) Vandenberghe, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e série, t. XXX, nos 9-10.
(**) H. Moissan, *Comptes rendus*, Paris, t. CXX, p. 1320.
(***) W. Ostwald, *loc. cit.*, p. 24.
(IV) Liechti et Kempe, *Liebig's Ann. d. Chem.*, 169, p. 344.
(V) L. Meyer, *Idem*, p. 360.
(VI) Smith et Maas, *Zeitsch. f. anorg. Chemie*, 5, p. 280.

suivant la réaction décrite d'abord par M. Pêchard (*), et à établir l'équivalence entre l'anhydride molybdique et le chlorure de sodium et le chlorure d'argent. Cette méthode tombe sous la critique qui s'adresse à toute méthode indirecte, quoique les résultats obtenus par les auteurs semblent indiquer un travail soigné, fait avec des produits aussi purs que possible. Ces chimistes obtiennent 96.13 maximum et 96.03 minimum (O = 16).

Seubert et Pollard (**) neutralisent l'anhydride molybdique par un excès de soude titrée et dosent l'excès de soude par un acide chlorhydrique dont le titre est établi en fonction du chlorure d'argent. Tout en admirant le soin avec lequel ils ont exécuté leur important travail, on ne peut s'empêcher de se demander jusqu'à quel point une détermination de poids atomique basée sur des essais alcalimétriques échappe à toute critique, étant donnée l'extrême altérabilité des solutions alcalines tant par le verre des récipients que par l'acide carbonique de l'air.

Ces auteurs obtiennent un minimum de 95.686 et un maximum de 95.757.

Ces deux dernières séries de recherches, celles de MM. Smith et Maas d'une part, celles de MM. Seubert et Pollard d'autre part, n'ont pas donné des résultats identiques. Et cependant ces habiles expérimentateurs semblent s'être entourés de tant de précautions qu'on ne peut qu'admirer le soin qu'ils ont apporté à leurs travaux. Les premiers arrivent aux nombres moyens 95.84 ($Na_2 Mo O_4 : 2 Na Cl$) et 95.86 ($Na_2 Mo O_4 : 2 Ag Cl$); les seconds, à 95.73 ($Mo O_3 : 2 Ag Cl$) et 95.74 ($Mo O_3 : Mo$) (***).

J'ai pensé que cette divergence tient à quelque imperfection des méthodes employées et j'ai cru pouvoir continuer les recherches que j'avais entreprises de mon côté, en réponse à la question posée par l'Académie royale des sciences de Belgique.

Je m'y suis cru d'autant plus autorisé que ma méthode est totalement différente de celles qui ont été mises en œuvre jusqu'à ce jour. Elle est basée

(*) E. Pêchard, *Comptes rendus*, t. CXIV, p. 173.
(**) Seubert et Pollard, *Zeitsch. f. anorg. Chemie*, 8, p. 434.
(***) O = 15.96. Voir Seubert et Pollard, *loc. cit.*

sur l'oxydation directe du molybdène pur, et sa transformation en anhydride molybdique.

Pour l'intelligence des détails qui vont suivre, je dirai dès à présent que je prépare le molybdène pur en réduisant son bibromure par l'hydrogène, et que j'oxyde ensuite par l'acide nitrique le métal obtenu, en vue de déterminer la quantité d'oxygène qu'il fixe en se transformant en anhydride molybdique.

II. — Préparation du brome pur.

(Figures 1, 2 et 3.)

L'illustre Stas (*) nous a fait connaître une excellente méthode de purification du brome, qui permet de le dépouiller des traces de chlore et d'iode qu'il peut contenir, mais qui ne le débarrasse pas des matières organiques et notamment du bromoforme qu'il contient d'ordinaire. Ce détail n'avait pas d'importance pour le grand savant, puisque son brome devait servir à la préparation de l'acide bromhydrique, dont il éliminait facilement les matières organiques par simple ébullition (**).

Pour me débarrasser des composés organiques qui souillent le brome du commerce, je le transforme en bromure et en bromate de baryum par la baryte. Ce mélange est fondu et le bromure résultant est décomposé par un excès d'anhydride chromique, qui remet le brome en liberté. A cet effet, je dissous le brome du commerce dans de l'eau de baryte maintenue en léger excès, c'est-à-dire jusqu'à disparition de toute coloration jaune. Cette solution est évaporée à sec et le résidu calciné dans un creuset en porcelaine dans le four de Perrot. La masse fondue est coulée dans une capsule d'argent (***) et, après refroidissement, dissoute dans l'eau distillée

(*) J.-S. Stas, *OEuvres complètes*, t. I, p. 839.

(**) Idem, *Ibid.*, p. 844.

(***) On peut également employer une plaque de fer. Il se formera bien un peu de bromure de fer, mais comme le produit est franchement alcalin, le fer s'en sépare aisément à l'état d'hydroxyde, dès qu'on dissout la masse dans l'eau.

pure (*). A cette dissolution concentrée, j'ajoute une solution également concentrée d'anhydride chromique. Ce dernier est préparé en décomposant le dichromate de potassium pur par de l'acide sulfurique également pur (**). Les cristaux d'anhydride chromique sont essorés, fondus jusqu'à commencement de décomposition pour détruire les traces de matières organiques qu'ils pourraient encore contenir, et, après refroidissement, dissous dans un minimum d'eau.

La décomposition du bromure de baryum par l'acide chromique se fait au bain-marie, dans un appareil entièrement en verre et représenté par la figure 2 (***).

Le brome ainsi obtenu est exempt de matières organiques, mais peut renfermer encore du chlore et de l'iode. Pour enlever ces derniers, j'ai suivi le procédé de Stas qui consiste à distiller le brome en présence d'une dissolution de bromure de potassium tenant de l'oxyde de zinc en suspension. J'ai remplacé toutefois le bromure de potassium par du bromure de baryum préparé comme précédemment. La distillation s'est faite dans l'appareil figure 3. Le ballon est en verre de Schott et le col en est rodé sur un tube en verre de Bohême, servant de réfrigérant. Le liquide condensé est recueilli dans un petit ballon également en verre de Schott et muni d'un bouchon à l'émeri. La distillation est faite au bain-marie.

Le mode de préparation du brome par l'anhydride chromique et le bromure de baryum présente deux avantages. Il évite l'emploi de l'acide sulfurique et donne par conséquent un brome exempt de cet acide. Les traces

(*) L'eau distillée a été préparée en redistillant l'eau distillée du laboratoire d'abord avec du permanganate de potassium acide et puis sur de la chaux pure, fraîchement préparée. L'appareil distillatoire était formé d'une cucurbite en cuivre étamé et d'un tube réfrigérant en verre de Bohême. Le joint était en feuille d'étain (fig. 1).

(**) Zettnow, *Pogg. Ann.*, n° 219, p. 471.

(***) Dans les différents appareils distillatoires que j'ai dû employer, je me suis servi d'un déflegmateur d'une forme spéciale, présentant le grand avantage de pouvoir être construit facilement. A la sortie du ballon distillatoire, le tube à condensation est plié en courbes successives. Si une projection se produit, elle est brisée plusieurs fois et jamais je n'ai observé le moindre entraînement. Dans l'appareil représenté par la figure 2, j'ai muni le déflegmateur d'une boule (*p*) renfermant des perles, parce que la réaction qui produit le brome est parfois un peu vive.

d'acide sulfurique qui peuvent se trouver dans l'anhydride chromique restent dans le ballon à l'état de sulfate de baryum.

L'attaque du bromure de baryum par l'acide chromique se fait facilement et rapidement, et l'on n'a pas à lutter contre les difficultés auxquelles s'est heurté M. Brauner (*). Ce dernier, dans ses recherches sur la détermination du poids atomique du tellure, avait essayé d'employer l'acide chromique et le bromure de potassium; mais le rendement était trop faible et il s'est vu obligé de remplacer l'acide chromique par un mélange de dichromate de potassium et d'acide sulfurique.

III. — Purification de l'anhydride phosphorique.

(Figure 4.)

Le brome pur dont la préparation vient d'être décrite doit encore être rigoureusement desséché. On y parvient en le redistillant en présence de l'anhydride phosphorique pur. Ce dernier, dont je vais décrire le mode de purification, servira également à dessécher tous les gaz dont il sera fait mention au cours de ce travail.

L'anhydride phosphorique réputé pur du commerce contient toujours de l'anhydride phosphoreux et des grains de phosphore résultant d'une combustion incomplète ou d'un entraînement. Parfois même j'y ai trouvé des fragments de papier ou de toile plus ou moins carbonisés.

Tous les auteurs qui ont dû utiliser cette substance disent qu'il faut resublimer l'anhydride commercial dans un courant d'oxygène, mais ils ont omis d'indiquer l'appareil qu'ils ont employé à cette fin.

Après bien des essais infructueux, je me suis arrêté au procédé suivant (fig. 4).

Un tube en verre de Bohême, long d'environ $1^m,50$, est relié d'un côté à un gazomètre rempli d'oxygène, d'autre part à un ballon R servant à recevoir le produit sublimé. Le tube est rempli aux quatre cinquièmes de sa

(*) B. Brauner, *Monatshefte für Chemie*, t. X, 1889, p. 431.

longueur d'anhydride à purifier. Après s'être assuré que l'appareil ferme bien et que le courant d'oxygène passe facilement, on chauffe fortement l'espace libre du tube situé en A. Puis on commence la sublimation en allumant successivement les flammes de A en *b* et en ne chauffant le tube que sur une longueur de 5 centimètres à la fois. L'anhydride phosphorique se sublime et est entraîné dans le ballon R. Une tringle en verre permet de dégager le tube coudé dans le cas où il se formerait un tampon de substance sublimée.

Le produit ainsi obtenu se dissout intégralement dans l'eau en donnant une dissolution absolument incolore et dénuée de tout pouvoir réducteur.

IV. — Préparation du bibromure de molybdène.

(Figure 5.)

Les bromures de molybdène ont été étudiés par Atterberg (*). Pour les obtenir, cet auteur met le molybdène dans une nacelle disposée dans un tube en verre de Bohême; il chauffe fortement et fait arriver en même temps des vapeurs de brome entraînées par un courant d'anhydride carbonique. Il se produit de l'oxybromure très volatil, du tétrabromure et du tribromure moins volatils, et enfin du bibromure fixe qui reste dans les nacelles où l'on a placé le métal.

La formation de l'oxybromure est facile à comprendre. Dans un travail récent (**), j'ai montré que le molybdène, à chaud, décompose le gaz carbonique en donnant des oxydes de molybdène et de l'oxyde de carbone. Il en résulte qu'en entraînant le brome par l'anhydride carbonique, il doit se produire pendant toute l'opération des oxydes de molybdène, et partant, de l'oxybromure qui viendra constamment souiller les bromures

(*) Al. Atterberg, *Nagra bidrag till Kannedonnen om Molybden. Akademisch afhandling.* Stockholm, 1872.

(**) A. Vandenberghe, *loc. cit.* Ce fait se confirme par une expérience toute récente de M. Moissan (*Comptes rendus*, 6 juillet 1896) qui prouve que le tungstène se laisse également oxyder par l'anhydride carbonique.

volatilisés. On peut éviter cet inconvénient en remplaçant le gaz carbonique par un courant d'azote, puisque j'ai fait voir que ce gaz est sans action sur cet élément (*).

Mon appareil à bromuration se compose d'un tube en verre de Bohême renfermant les nacelles à molybdène. Ce tube porte à l'entrée un bouchon en liège percé de deux trous. Dans l'une des ouvertures vient affleurer le tube amenant l'azote; par l'autre passe le tube d'amenée du brome. Ce tube dépasse le bouchon de 30 centimètres. Cette disposition a pour but d'éviter tout contact entre le liège et le brome. Pour ce même motif, j'incline fortement le tube à bromuration; le brome étant très dense remonte difficilement le tube dans le cas où un arrêt se produirait dans le courant d'azote. L'appareil qui doit fournir les vapeurs de brome est une sorte de gros tube en U, muni de deux bouchons à robinet. Sa branche horizontale contient le brome mélangé d'anhydride phosphorique et peut être chauffée. Sa branche verticale, par où les vapeurs de brome doivent passer pour pénétrer ensuite dans le tube à bromuration, porte un étranglement destiné à soutenir une colonne de perles d'environ 20 centimètres de haut, et dont le rôle est d'empêcher tout entraînement mécanique de traces d'anhydride phosphorique.

Tout l'air contenu dans ce tube est déplacé par un courant d'azote. Il en est de même pour toutes les autres pièces de l'appareil; le passage de l'azote y a été maintenu pendant six heures, et le vide y a été fait à plusieurs reprises, pour bien éliminer les dernières traces d'air condensées à la surface des corps solides mis en œuvre.

Le molybdène que j'ai bromuré a été préparé en réduisant par l'hydrogène pur (**) de l'anhydride molybdique sublimé. Ce molybdène renferme des traces de fer et de siliciures de molybdène que j'ai éliminées en traitant

(*) J'ai préparé l'azote par l'action réciproque du nitrite de soude et du sulfate d'ammonium. Pour le débarrasser de toute trace d'oxygène et des matières organiques provenant des amines du sulfate d'ammoniaque, je le dirige dans un tube chauffé au rouge et renfermant du cuivre réduit et de l'oxyde de cuivre. Le gaz carbonique résultant de cette combustion est absorbé par une colonne de potasse caustique et l'azote est enfin desséché par l'anhydride phosphorique.

(**) La préparation de l'hydrogène sera décrite plus loin.

successivement le métal par l'acide chlorhydrique et le fluorhydrique (*). L'excès de ces acides a été enlevé par un lavage très soigné, puis le molybdène a été rapidement séché à l'étuve. A la suite de ces opérations, il renferme des traces d'oxydes, car j'ai constaté toujours qu'au contact de l'eau il colore lentement celle-ci en bleu. La formation d'une trace d'oxybromure est donc inévitable. Mais comme ce composé, de même que le tétrabromure, est très volatil, je l'écarte par sublimation et il me reste un sublimé bien moins volatil de tribromure qui, sous l'action d'une température plus élevée, se convertit en bibromure fixe. C'est le bibromure ainsi obtenu qui doit servir de point de départ à la préparation du molybdène pur. Voici le détail de ces opérations :

La bromuration du molybdène demande beaucoup de soin et de précaution, si l'on veut éviter l'obstruction du tube par les bromures volatilisés. On commence par chauffer fortement le tube en verre de Bohême à l'endroit où se trouvent les nacelles en porcelaine renfermant le métal. Puis on distille une petite quantité de brome, et lorsque deux ou trois gouttes de ce liquide tombent dans le tube à bromuration, on retire la flamme de l'appareil distillatoire. Une grande quantité de bromures volatils se produit et tend à obstruer le tube, mais les petites flammes que l'on entretient sous le tube au delà des nacelles permettent de maintenir un canal libre à sa partie inférieure. Puis on fait distiller quelques nouvelles gouttes de brome et ainsi de suite. L'opération dure de quatre à cinq heures pour bromurer 10 grammes de molybdène répartis en quatre nacelles. Lorsqu'on veut arrêter la bromuration, il suffit d'enlever l'appareil à brome et de fermer l'ouverture *b* par un bouchon, après avoir fait passer le courant d'azote pendant quelques instants, afin de balayer les traces de brome que le tube *t* pourrait contenir encore.

Les produits de cette opération sont des polybromures volatils ainsi que du bibromure fixe et encore mélangé de molybdène inaltéré, bibromure qui

(*) Ces acides ont été obtenus en distillant les acides les plus purs du commerce dans un appareil entièrement en platine et en ne récoltant que le deuxième tiers de l'acide employé. L'acide chlorhydrique était conservé dans une bouteille en verre d'Iéna et l'acide fluorhydrique dans une bouteille en platine.

reste dans les nacelles et dont je n'ai évidemment pu me servir. Dans le tube se sont sublimés, suivant l'ordre décroissant de leur volatilité, le tribromure, le tétrabromure et l'oxybromure de molybdène. Le tribromure affecte la forme d'un tissu feutré d'aiguilles cristallines vertes et peut facilement retenir des traces des deux autres, et surtout du tétrabromure. Or la présence de ce dernier pourrait devenir fort gênante, car il s'altère rapidement par l'humidité atmosphérique en engendrant de l'oxybromure. On ne peut donc pas employer le tribromure tel quel : il faut, pour obtenir un produit inaltérable à l'air, le chauffer fortement, ce qui le convertit en bibromure, tout en éliminant les produits volatils qui lui communiqueraient des propriétés fâcheuses.

Il est difficile, sinon impossible, d'achever cette calcination dans le tube même où le mélange des bromures s'est formé, car le mélange occupe la voûte supérieure du tube et reçoit ainsi moins directement l'action de la flamme.

Pour me débarrasser de l'oxybromure et du tétrabromure très volatils, je chauffe fortement pendant une heure et dans un courant lent d'azote, le mélange des bromures dans le tube même où la bromuration s'est accomplie. L'oxybromure va se condenser dans les parties froides de l'appareil; le tétrabromure est en partie décomposé, en partie entraîné avec l'oxybromure. Quant au tribromure, qui n'est volatil que dans une atmosphère de brome, il commence déjà à se détruire, ce qu'on reconnaît à la teinte jaunâtre que prend le sublimé. A ce moment, on laisse refroidir l'appareil, on coupe l'extrémité du tube pour rejeter les produits les plus volatils qui s'y sont condensés, on l'ouvre à l'autre extrémité pour en retirer prudemment les nacelles et on en détache le tribromure par de petites secousses. Ce tribromure, qui contient déjà un peu de bibromure, est placé dans des nacelles de porcelaine qu'on engage dans un nouveau tube en verre de Bohême, pour les chauffer fortement pendant deux heures dans un courant lent d'azote.

J'obtiens ainsi une masse spongieuse, orangée, de bibromure, ne pouvant plus renfermer que des traces de tribromure et absolument inaltérable à l'air. C'est ce composé qui m'a servi à préparer le molybdène pur.

V. — Préparation du molybdène pur.

Le bibromure de molybdène, préparé comme je viens de l'indiquer, a été introduit dans des nacelles en porcelaine placées dans un tube en platine communiquant avec un appareil d'où sortait un courant d'hydrogène pur (*). Le courant d'hydrogène a été maintenu à blanc pendant douze heures, afin de balayer autant que possible tout l'air de l'appareil, dans lequel j'ai d'ailleurs fait le vide à différentes reprises avant de commencer la réduction. Pour opérer cette réduction, il suffit de chauffer doucement le tube de platine dans un petit fourneau de Wiesnegg : elle est terminée en une demi-heure quand on opère avec deux nacelles contenant chacune environ 1 gramme de bibromure.

On reconnaît que la réaction est terminée quand le tube ne laisse plus échapper d'acide bromhydrique. On pourrait reconnaître les dernières traces de ce gaz par son action sur les sels d'argent; mais il arrive mélangé de beaucoup d'hydrogène, et plusieurs observateurs ont constaté qu'un courant prolongé d'hydrogène réduit les solutions argentiques (**) en produisant un trouble qui rend les constatations difficiles. J'ai préféré recourir à la réaction si sensible de la phénolphtaléine, dans les conditions que je vais dire.

Chacun sait que le verre ordinaire est attaqué quelque peu par l'eau distillée et qu'il se produit ainsi une solution légèrement alcaline. Et pourtant cette eau ne se colore pas en rouge par la phénolphtaléine : c'est parce que la soude s'y trouve à l'état de bicarbonate. Mais qu'on y fasse barboter un gaz inerte, au bout de cinq minutes, la dissociation du bicarbonate permet le départ de l'anhydride carbonique et la liqueur se colore en rouge. La moindre trace d'acide volatil empêchera cette coloration de se manifester.

(*) L'hydrogène a été préparé par l'action réciproque du zinc pur du commerce et de l'acide sulfurique pur dilué dans de l'eau où j'avais mis une trace de sulfate de cuivre. Le gaz se purifie d'abord dans un long tube de Thörner contenant du permanganate de potassium acidulé; il est chauffé ensuite dans un tube contenant du cuivre réduit ainsi que de la mousse de platine, à l'effet de le débarrasser des traces d'oxygène qu'il pourrait contenir. Il traverse enfin deux tubes en U remplis l'un de potasse caustique, l'autre d'anhydride phosphorique.

(**) Dammer, *Handbuch der anorganische Chemie*, t. I, p. 375.

Une dizaine de minutes après que les vapeurs d'acide bromhydrique ont cessé de se montrer et d'exercer une action sensible sur le papier de tournesol, je dirige le gaz hydrogène sortant du tube de platine dans un petit appareil à boules de Geissler contenant de l'eau distillée ordinaire additionnée d'une trace de phénolphtaléine. Ce liquide, primitivement incolore, rougit après quelques minutes, preuve certaine qu'il ne reçoit pas d'acide bromhydrique et que la réduction est totale.

Quand le tube s'est complètement refroidi dans le courant d'hydrogène, j'en retire les nacelles. Celles-ci renferment un beau métal gris, spongieux, mais se transformant sous le laminoir en un ruban compact, doué de l'éclat de l'acier. Il est remarquable par sa grande activité chimique : l'acide nitrique concentré l'attaque avec une violence extrême. Pour peu qu'on le chauffe dans une atmosphère de brome, il s'y combine avec incandescence, même à une température peu élevée, tandis que le molybdène de Debray exige une chaleur beaucoup plus forte et ne devient jamais incandescent. Quand on l'oxyde, en le chauffant sur une feuille de platine, il brûle vivement et se transforme en un anhydride molybdique qui se volatilise complètement sans laisser la moindre trace de résidu. L'anhydride molybdique obtenu par l'oxydation de ce molybdène à l'aide de l'acide nitrique se dissout intégralement dans l'ammoniaque.

La basse température à laquelle s'est effectuée la réduction du bibromure fait que les nacelles en porcelaine, même après dix opérations, n'avaient pas subi la moindre altération.

Le molybdène préparé comme je viens de le dire ne se modifie pas au contact de l'air. Il n'en est pas de même du métal contenant encore des traces d'oxygène et qu'on voit bleuir progressivement.

VI. — Détermination du poids atomique du molybdène.

(Figures 6 et 7.)

Ainsi que je l'ai annoncé au début de ce travail, j'ai déterminé le poids atomique du molybdène en transformant ce métal en anhydride molybdique (MoO_3). J'ai renoncé dès l'abord à faire cette oxydation par l'air ou par

l'oxygène, parce qu'il est impossible d'éviter la volatilisation d'un peu d'anhydride molybdique, quelques précautions qu'on prenne. Cette oxydation se fait aisément et sans perte par l'acide nitrique, en opérant de la manière suivante :

Je pèse le molybdène dans une éprouvette pèse-filtre de 8 centimètres de haut et 3 centimètres de large (fig. 6). Je remplace alors le bouchon par un petit entonnoir et je recouvre le métal d'une couche d'eau distillée pure (*) d'environ 1 centimètre de haut. Je verse alors par l'entonnoir quelques gouttes d'acide nitrique concentré et absolument pur (**). La réaction commence aussitôt, sans qu'il soit nécessaire de chauffer. Quand elle semble vouloir s'arrêter, il suffit d'ajouter quelques gouttes d'acide, et l'on répète cette addition jusqu'à ce que tout le molybdène ait disparu.

Pour achever l'oxydation des oxydes de molybdène formés, je chauffe l'éprouvette, tout en y maintenant l'entonnoir, dans un bain-marie de porcelaine, alimenté à l'eau distillée. J'obtiens ainsi un beau produit blanc, présentant parfois à la surface supérieure un reflet légèrement rosé. J'enlève alors l'entonnoir, ce qui permet une évaporation plus rapide de l'eau et d'une partie de l'acide nitrique. La dessiccation au bain-marie laisse un résidu tout à fait blanc. Pour le dessécher complètement et le débarrasser de tout produit nitreux, je le chauffe dans un courant d'oxygène pur. A cet effet, j'adapte sur le pèse-filtre une pièce façonnée comme un bouchon de Drechsel et je place l'appareil ainsi disposé sur un anneau de porcelaine placé au fond d'un gobelet de verre (*Becherglas*) (fig. 7). Tout ce système est chauffé entre 350° et 400° C. au sein d'un bain de limaille de fer. A cette température, la dessiccation est complète et aucune volatilisation n'est à redouter, comme je m'en suis assuré d'ailleurs par des pesées réitérées. J'ai remarqué qu'entre 200° et 300° C. le produit prenait une nuance légèrement bleuâtre, qui disparaissait entre 350° et 400° C., en faisant place à la teinte jaunâtre de l'anhydride molybdique chauffé. J'ai laissé refroidir l'appareil en main-

(*) Cette eau a été redistillée dans un appareil de platine et était volatile sans résidu.

(**) Cet acide nitrique a été obtenu en distillant, dans un appareil entièrement en platine, de l'acide nitrique pur du commerce et en n'en recueillant que le deuxième tiers de la quantité employée. Chauffé dans une capsule en platine, il se volatilisait sans résidu.

tenant le courant d'oxygène. Quand la température était descendue à 100° C. environ, j'ai fermé l'éprouvette par son bouchon à l'émeri et je l'ai placée dans un exsiccateur; je l'ai ouverte ensuite avant les pesées, pour permettre à l'air de remplacer l'oxygène.

Les pesées ont été faites sur une excellente balance de Richter, avec des poids en platine du même constructeur. Cette balance a figuré à l'Exposition de Bruxelles de 1888 et peut porter 250 grammes sur chacun de ses plateaux. Sous cette charge, elle accuse parfaitement le dixième de milligramme. Sur le plateau qui portait les poids était placée une éprouvette-tare, exactement semblable à celle qui contenait les substances à peser.

Le poids atomique du molybdène a été calculé d'après la formule

$$A = \frac{Mo \times 15.96 \times 3}{O}.$$

(A = poids atomique du molybdène; Mo = quantité de molybdène employée; O = quantité d'oxygène fixée.)

Voici les résultats obtenus :

	Molybdène employé.	Anhydride molybdique obtenu.	Oxygène fixé.	Poids atomique déduit.
1	0.7143	1.0711	0.3568	95.851
2	0.3453	0.5177	0.1724	95.899
3	0.9693	1.4533	0.4840	95.889
4	0.5089	0.7631	0.2542	95.854
5	1.7219	2.5820	0.8601	95.855
1-5	4.2597	6.3872	2.1275	95.869

Mes pesées ont été faites à une température moyenne de 20° C. et à une pression barométrique voisine de 760 millimètres. Si je fais la réduction

des pesées au vide en tenant compte de ces constantes, les densités de l'anhydride molybdique, du molybdène et du platine étant respectivement 4.39, 8.6, 21.48, les $6^{gr},3872$ d'anhydride molybdique deviennent :

$$6^{gr},3872 + 0^{gr},00138 = 6^{gr},38859;$$

les $4^{gr},2597$ de molybdène,

$$4^{gr},2597 + 0^{gr},00036 = 4^{gr},26006.$$

La quantité d'oxygène fixée est donc exactement

$$6^{gr},38859 - 4^{gr},26006 = 2^{gr},12853.$$

Le poids atomique du molybdène sera donc

$$A = \frac{4.26006 \times 15.96 \times 3}{2.12853} = 95.829,$$

si je prends pour poids atomique de l'oxygène le nombre 15.96, généralement admis.

D'après des recherches récentes de MM. Julius Thomsen, Rayleich et d'autres savants, le poids atomique de l'oxygène serait notablement inférieur à cette valeur 15.96, adoptée dans la plupart des calculs. Si, eu égard à la haute précision des travaux de MM. Thomsen et Rayleich, on admet avec eux que le poids atomique de l'oxygène est 15.869, on arriverait, d'après mes expériences, à assigner au molybdène le poids atomique de 96.283.

SECONDE PARTIE

RECHERCHES PHYSIQUES

I. — Introduction.

Les travaux décrits dans la première partie de ce mémoire m'ont permis d'établir la quantité d'oxygène que fixe un poids donné de molybdène, lorsqu'il se transforme en anhydride molybdique. Je pourrais déduire de là la grandeur atomique de cet élément en admettant, avec tous les théoriciens qui se sont occupés de son étude, que l'anhydride molybdique a pour constitution MoO_3 (Mo = 96). Mais la grandeur moléculaire de cet anhydride n'a jamais été déterminée directement. Et cependant il semble à première vue que sa densité de vapeur ne doive pas être bien difficile à établir, puisque cette substance se volatilise déjà vers 800° C. C'est là un travail que j'ai entrepris et que je décrirai plus loin.

Ce n'est évidemment pas à la légère que les chimistes ont assigné à l'anhydride molybdique la formule $Mo\ O_3$. Ce corps a des propriétés chimiques comparables à celles de l'anhydride sulfurique. Comme lui, il peut s'unir à l'eau pour former un acide orthomolybdique $H_2Mo\ O_4$ (*), dont le sel de potassium est isomorphe avec le sulfate correspondant; comme lui, il donne avec les métaux alcalino-terreux et avec le plomb des sels dont l'insolubilité

(*) Vivier, *Comptes rendus*, Paris, t. CVI, p. 601.

est comparable à celle des sulfates de même nom. Ces analogies dans les propriétés, cet isomorphisme des dérivés salins permettent déjà d'admettre une analogie dans la constitution. Or, si tout concourt à démontrer que l'anhydride sulfurique a pour formule SO_3 (S = 32), on sera amené à donner à l'anhydride molybdique la formule MoO_3 (Mo étant 96 et O_3 étant 48). On pourrait, à la vérité, se demander si, dans les composés isomorphes avec les sulfates, le molybdène ne figure pas avec deux ou plusieurs atomes remplaçant ensemble un seul atome de soufre. Mais cette hypothèse, qui ne s'appuie sur aucun fait, est bien peu probable. Horstmann dit avec raison dans son *Lehrbuch der Chemie :* « Man kennt eine grosse Zahl analoger isomorpher Verbindingen in welchen verschiedene Elemente mit gleicher Function im Verhältnisse ihrer Atomgewichte erscheinen. Dagegen kennt man kein sicheres Beispiel, wo eine solche Vertretung nach anderen nicht mit dem Atomgewicht verträglichen Verhältnissen statt fände. »

Aussi la place que Mendelejeff a assignée au molybdène dans son système de classification n'a-t-elle jamais soulevé la moindre objection.

Mais ce n'est pas uniquement par l'analogie qu'on doit noter l'anhydride molybdique : MoO_3. Quelques dérivés de ce corps ont fait l'objet de déterminations directes. Walden (*) a étudié la conductibilité électrique du molybdate de sodium et lui a trouvé une conductibilité moléculaire qui correspond à Na_2MoO_4. Moi-même (**) j'ai trouvé par ébullioscopie que le dihydroxychlorure de molybdène a pour grandeur moléculaire 217 ($O=Mo(OH)_2Cl_2$). Enfin la densité de vapeur du pentachlorure de molybdène, déterminée par Debray (***), conduit à la formule $MoCl_5$, où Mo = 96. On connaît bien des pentachlorures de la formule RCl_5, mais je ne pense pas qu'il existe des composés de la forme R_2Cl_5.

Il résulte de la détermination de ces grandeurs moléculaires que dans ses combinaisons, le molybdène forme un groupement atomique dont le poids est de 96, celui de l'oxygène étant 16. Mais ces déterminations ne peuvent

(*) Walden, *Zeitsch. f. phys. Chemie*, 1, 529.
(**) Vandenberghe, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, t. XXIX, 3e série, p. 281.
(***) Debray, *Comptes rendus*, t. LXVI, p. 732.

nous donner que des poids atomiques maxima ; il reste à établir que ce groupement molybdénique est uniatomique, et que 96 est bien le poids atomique du molybdène. Or il est généralement admis qu'il existe une relation constante entre la chaleur spécifique et le poids atomique, relation établie par Dulong et Petit. Les travaux des auteurs qui se sont occupés de la chaleur spécifique du molybdène ou de ses dérivés ont, comme je vais le montrer, permis de fixer à environ 96 le poids atomique de cet élément.

De la Rive et Marcet (*) trouvent pour la chaleur spécifique du molybdène, obtenue en réduisant l'anhydride molybdique par l'hydrogène, le nombre 0.0659, ce qui correspond au poids atomique $\frac{6.4}{0\ 0659} = 95.5$. Ces auteurs ont employé la méthode du refroidissement.

Regnault (**), par la méthode des mélanges et en se servant d'un molybdène légèrement carburé, arrive au nombre 0.07218, ce qui donne le poids atomique $\frac{6.4}{0.07218} = 88.7$. La chaleur spécifique élevée, trouvée par Regnault, peut s'expliquer par la présence du carbone dans le métal mis en œuvre.

On voit par ces deux travaux que le molybdène obéit à la loi du Dulong et Petit : le léger écart obtenu par Regnault n'est pas de nature à faire considérer le molybdène comme faisant exception à cette loi, puisque nous voyons l'aluminium, dont on a déterminé le poids atomique par les méthodes gazométriques, posséder une chaleur spécifique atomique (5.4) qui s'écarte beaucoup plus de la moyenne 6.4 généralement admise que celle du molybdène, qui serait 6.9 (Regnault) ou 6.3 (De la Rive et Marcet).

Kopp (***) et Regnault (IV) ont déterminé la chaleur spécifique de l'anhydride molybdique. Le premier, en opérant sur un produit impur, obtint comme chaleur spécifique de cet anhydride 0.154. Regnault trouva pour le même corps 0.1324. Ces deux nombres conduisent à une chaleur spécifique moléculaire de

$$144\,(MoO_3) \times 0.154 = 22.176\,(K),$$
$$144\,(MoO_3) \times 0.1324 = 19.06\ \ (R).$$

(*) De la Rive et Marcet, *Ann. de chim. et de phys.*, 1840, 75, 113.
(**) Regnault, *Ann. de chim. et de phys.*, 1840, 73, 5.
(***) Kopp, *Lieb. Ann.*, 111. Supplementband.
(IV) Regnault, *Ann. de chim. et de phys.*, 1841, 1, 89.

La chaleur spécifique moléculaire calculée d'après la loi de Woestyn et Kopp serait

$$6.4 + 4.5 \times 3 = 19.9 \quad (O = 4.5),$$
$$6.4 + 4.0 \times 3 = 18.4 \quad (O = 4.0).$$

En résumé, il résulte de tous les faits cités dans cette introduction que le molybdène, soit à l'état isolé, soit à l'état de combinaison, a un poids atomique qui se rapproche du nombre 96, autour duquel viennent se grouper tous les poids atomiques obtenus par les différents auteurs qui se sont occupés de cette étude. C'est ce que j'ai exposé dans la première partie de ce travail.

Il résulte encore de cet ensemble de faits que la place du molybdène dans le système de Mendelejeff ne saurait faire l'objet d'un doute. Si l'on voulait assigner à cet élément un poids atomique multiple ou sous-multiple de 96, il serait fort difficile de lui trouver une nouvelle place dans ce système.

Quoi qu'il en soit, j'ai pensé qu'il pourrait être intéressant de compléter l'état de nos connaissances sur les constantes physiques du molybdène ou de ses dérivés, soit en répétant certaines expériences en opérant sur des produits rigoureusement purs, soit en instituant des recherches nouvelles dont l'exposé constitue la seconde partie de mes travaux sur le poids atomique du molybdène.

II. — Essais de détermination de densité de vapeur des composés molybdiques.

1. Densité de vapeur du dihydroxychlorure de molybdène.

Il n'y a que fort peu de composés molybdiques qui se prêtent à une détermination de densité de vapeur.

Parmi les dérivés halogénés, nous ne trouvons que le pentachlorure de

molybdène. Sa densité de vapeur correspond, d'après Debray (*), à 9.35 et 9.40. Ces nombres s'écartent peu du chiffre théorique 9.47, correspondant à $MoCl_5 = 2$ volumes.

Dans un travail récent (**) sur le dihydroxychlorure de molybdène de Debray, j'ai fait voir, en employant la méthode ébullioscopique, que ce composé, qui prend naissance entre 150° et 200° C., et paraît se sublimer dans un courant de gaz chlorhydrique, a pour grandeur moléculaire 217 ($O = Mo(OH)_2Cl_2$). J'ai pensé qu'il serait possible de déterminer la densité de vapeur de cette combinaison et j'ai institué dans ce but quelques expériences que je vais décrire.

Si les résultats n'ont pas répondu à mon attente, ils ne me paraissent néanmoins pas dénués d'intérêt.

La détermination de la densité de vapeur du dihydroxychlorure de molybdène a été effectuée dans l'appareil bien connu de Victor Meyer (fig. 8), auquel j'ai ajouté un tube à robinet *a* permettant d'y lancer un courant d'acide chlorhydrique gazeux. L'appareil se termine par un eudiomètre E entouré d'eau et muni d'un thermomètre *t*. Pour être bien certain d'opérer dans une atmosphère aussi pure que possible, j'ai supprimé tous les joints en liège ou en caoutchouc : tous les raccords sont en verre rodé, sauf pour la baguette de soutien *b*. Après avoir introduit en P une quantité pesée de substance, je fais passer dans le système un courant d'acide chlorhydrique qui suit le chemin indiqué par les flèches de la figure 8. Ce courant est maintenu jusqu'à ce que le gaz soit complètement absorbable par l'eau du flacon F. J'ai soin aussi de balayer complètement l'air contenu dans le tube capillaire C. Une fois l'appareil plein de gaz chlorhydrique, je ferme les robinets *r* et *r'*, je chauffe l'ampoule A de l'appareil et j'établis l'équilibre dans les deux branches de l'eudiomètre. Lorsque cet équilibre est atteint, je laisse tomber la substance par la manœuvre de la baguette *b*.

(*) Debray, *loc. cit.*
(**) Vandenberghe, *loc. cit.*

Première détermination.

(B) Bain de diphénylamine : 310° C.
(E) Dans l'eudiomètre, acide sulfurique pur et saturé d'acide chlorhydrique.
(S) Substance employée : 0.0627 gr.
(H) Hauteur barométrique : 760.8 mm.
(*t*) Température de l'eudiomètre : 19° C.
(Vt) Dilatation observée : 11.7 cm³.
(Vo) Réduction du volume observé à 0° C. et à la pression barométrique normale : 10.9 cm³.

Si l'on attribue au dihydroxychlorure de molybdène le poids moléculaire 217, son volume spécifique à 0° C. et à la pression barométrique normale serait de 102.9, et le volume Vo, à obtenir dans cette expérience, devrait donc se rapprocher sensiblement de

$$(V)\ 102.9 \times 0.0627 = 6.45\ cm^3.$$

Deuxième détermination.

B	Naphtaline : 210° C.
E	Mercure.
S	0.1570 gr.
H	751.9 mm.
t	19.5° C.
Vt	30.9 cm³.
Vo	28.5 cm³.
V	16.16 cm³.

Troisième détermination.

B	Aniline : 180° C.
E	Mercure.
S	0.0767 gr.
H	771.65 mm.
t	21° C.
Vt	16.0 cm³.
Vo	15.0 cm³.
V	7.89 cm³.

Quatrième détermination.

B	Aniline : 180° C.
E	Mercure.
S	0.0535 gr.
H	761.1 mm.
t	19.5° C.
Vt	11.0 cm³.
Vo	10.2 cm³.
V	5.41 cm³.

Il résulte de ces quatre déterminations que la densité de vapeur observée est de moitié trop faible pour un poids moléculaire 217 attribué au dihydroxychlorure de molybdène. Et cependant ce poids moléculaire doit être au moins égal à 217, car l'analyse de Debray assigne à ce corps la formule brute MoO_3, 2H Cl, dont tous les termes sont premiers entre eux. Il n'y a pas lieu de douter de l'exactitude de l'analyse faite par Debray : j'ai refait cette analyse en opérant sur un produit préparé avec beaucoup de soin et je suis arrivé au même résultat que l'illustre chimiste français. Cette grandeur moléculaire découle d'ailleurs des observations que j'ai faites en me servant de la méthode ébullioscopique.

On ne peut interpréter les résultats des expériences que je viens de décrire, qu'en admettant qu'à l'état de vapeur, la molécule de dihydroxychlorure de molybdène occupe quatre unités de volume au lieu de deux, c'est-à-dire qu'elle s'est dédoublée.

La supposition que la molécule serait décomposée en anhydride molybdique solide et en deux molécules d'acide chlorhydrique doit être immédiatement rejetée, puisque la substance s'est complètement volatilisée. J'ai en outre observé qu'à la fin de l'expérience, des cristaux venaient se déposer sur les parties froides du tube de Victor Meyer, et qu'à partir de ce moment une contraction graduelle se manifestait.

Si la substance s'était décomposée en acide chlorhydrique gazeux et en anhydride molybdique, qui serait devenu gazeux dans cette atmosphère de gaz chlorhydrique, j'aurais dû obtenir six unités de volume au lieu de

quatre. Et il serait difficile d'admettre que l'anhydride molybdique pût se gazéifier à 180° C.

Deux interprétations restent en présence :

On pourrait croire que la dissociation a donné naissance à du chlorure de molybdényle $\overset{O}{O}\!\gg\!Mo\!<\!\overset{Cl}{Cl}$ et à de l'eau, ce qui formerait aussi quatre unités de volume. Mais il serait peu rationnel d'admettre l'existence d'un chlorure acide restant inaltéré à haute température dans une atmosphère de vapeur d'eau.

On pourrait admettre aussi que la vapeur est formée d'un mélange d'acide chlorhydrique et de chlorhydrate molybdénique $\overset{O}{O}\!\gg\!M\!<\!\overset{OH}{Cl}$, analogue au chlorhydrate sulfurique, et qui n'a pas été isolé jusqu'ici. Ce chlorhydrate aurait la propriété de s'unir à froid à l'acide chlorhydrique pour former la combinaison cristalline, étudiée par Debray, et que la chaleur dissocierait. Ce n'est là qu'une hypothèse, mais c'est une hypothèse que je ne crois pas dénuée de fondement, étant données les nombreuses analogies qui relient les composés molybdéniques aux composés sulfuriques. Sa vérification exigera une étude nouvelle.

2. Détermination de la densité de vapeur de l'anhydride molybdique.

(Figure 9.)

Pour procéder à cette détermination, j'ai employé de l'anhydride molybdique provenant de l'oxydation du molybdène métallique pur. J'ai opéré dans un appareil en porcelaine de Bayeux, analogue à celui dont se sont servis V. Meyer, Nilson et Petterson (*). Il est représenté par la figure 9. L'ampoule A, qui devait être chauffée dans un four de Perrot, avait 22 centimètres de haut et 4 centimètres de diamètre. Pour la garantir contre l'action directe de la flamme, je l'ai entourée d'une large éprouvette en porcelaine dure, représentée en E. Cette ampoule se termine par un tube en porcelaine T, ayant une hauteur de 70 centimètres. A ce tube est fixé un ensemble de pièces destiné à mesurer le volume d'air déplacé par la

(*) Nilson et Petterson, *Journ. f. pr. Chemie*, 1886, 33, 1.

vapeur d'anhydride molybdique, et identique à celui que j'ai déjà décrit plus haut à propos de la densité de vapeur du dihydroxychlorure de molybdène. En P se trouvait une petite éprouvette en platine contenant l'anhydride molybdique mis en expérience.

Je me suis efforcé d'abord de faire régner dans mon appareil une température constante. J'ai maintenu le feu pendant vingt-quatre heures dans le four Perrot : celui-ci était alimenté par un courant de gaz d'éclairage, qui traversait au préalable un régulateur de pression très sensible. Je suis parvenu à maintenir une température très constante et en même temps très élevée, car l'émail de l'éprouvette E montrait des traces manifestes de fusion.

J'ai fait tomber alors l'anhydride molybdique dans l'ampoule, et au bout d'une demi-heure il était entièrement volatilisé.

Résultats.

Première détermination (*).

S (MoO_3)	0.091 gr.
H	765 mm.
t	25° C.
Vt	12.05 cm^3.
Vo	10.8 cm^3.
V	14.1 cm^3.
Do (Densité observée)	6.52.
D (Densité théorique pour MoO_3 = 2 vol.)	5.00.

Deuxième détermination.

S	0.097 gr.
H	765 mm.
t	31° C.
Vt	13.3.
Vo	11.4 cm^3.
V	14.9 cm^3.
D (observée)	6.65.
D (calculée)	5.00.

(*) Pour la signification des lettres, je renvoie aux résultats obtenus dans la détermination de la densité de vapeur du dihydroxychlorure de molybdène, page 26.

Ces résultats montrent que l'anhydride molybdique, réduit en vapeur dans les conditions où j'ai opéré, prend une densité très forte, car il occupe un volume très faible. Il n'est pas à supposer qu'une partie de la substance mise en œuvre eût échappé à la volatilisation, car l'éprouvette en platine était absolument vide et propre. On pourrait admettre que l'anhydride molybdique, analogue en ceci à l'anhydride arsénieux, formerait des molécules de la composition Mo_2O_6 dont le groupement di-moléculaire ne se serait pas encore complètement dissocié à la haute température à laquelle j'ai opéré. Mais on pourrait aussi admettre qu'un peu de la substance a été fixée par la porcelaine. Quoi qu'il en soit, les résultats que je viens d'indiquer se rapprochent de ceux qu'exige la formule MoO_3, bien plus que de ceux qu'exigerait toute autre formule.

III. — Essais de détermination cryoscopique et ébullioscopique de la grandeur moléculaire du pentachlorure de molybdène.

D'après sa densité de vapeur, le pentachlorure de molybdène a pour formule $MoCl_5$. Comme ce corps est soluble dans le benzol, j'avais espéré pouvoir me servir de ce dernier comme dissolvant dans mes essais cryoscopiques. Malheureusement, j'ai constaté qu'à l'ébullition le benzol est attaqué par le molybdène pentachloré : j'ai pu reconnaître un léger dégagement d'acide chlorhydrique. Et quand j'ai voulu procéder aux observations cryoscopiques, j'ai observé une élévation de la température du benzol au moment où j'y laissais tomber la substance. J'ai alors renoncé à l'emploi du benzol, et j'ai trouvé dans le tétrachlorure de carbone un excellent dissolvant du pentachlorure de molybdène, dissolvant d'autant plus précieux dans le cas actuel que toute action chlorurante de la part du molybdène chloré est impossible. A ce propos, je crois pouvoir signaler que le tétrachlorure de carbone mériterait de prendre rang dans la liste des dissolvants pour ébullioscopie : il pourra souvent remplacer avec avantage tous ceux qu'on a préconisés jusqu'ici. Le tétrachlorure de carbone se vend actuellement très

pur à un prix raisonnable et, chose précieuse, l'élévation spécifique moléculaire du point d'ébullition de ce dissolvant est très élevée. Afin d'établir celle-ci par l'expérience, j'ai déterminé la grandeur moléculaire de la naphtaline. J'ai employé une naphtaline sublimée à plusieurs reprises, puis purifiée encore par des cristallisations successives dans l'éther. Voici les résultats obtenus en introduisant dans les calculs la constante théorique 52.68 :

$$\left(C = \frac{0.02\ T_0^2}{W}\right) (*).$$

Première détermination.

Dissolvant ($C Cl_4$)	25.91 gr.
Naphtaline	0.2685 gr.
Élévation du point d'ébullition	0.39° C.,

d'où M (poids moléculaire) = 141.1.

Deuxième détermination.

Dissolvant ($C Cl_4$)	25.91 gr.
Naphtaline	0.27 gr.
Élévation du point d'ébullition	0.402° C.,

d'où M = 137.7.

Ces nombres 141.1 et 137.7 se rapprochent sensiblement du nombre théorique 128. J'ai donc cru pouvoir maintenir la constante théorique 52.68 pour les recherches ultérieures.

Toutes les opérations ont été faites dans l'appareil de Bechmann, avec les perfectionnements que j'y ai apportés (**).

(*) Traube, *Physikalische-chemische Methoden*, p. 99.
(**) Vandenberghe, *Zeitsch. f. anorg. Chemie*, 10, 50.

GRANDEUR MOLÉCULAIRE DU PENTACHLORURE DE MOLYBDÈNE.

Première détermination.

Dissolvant	31.45 gr.
Pentachlorure de molybdène	0.4015 gr.
Élévation du point d'ébullition	0.237° C.,

d'où M = 288.

Deuxième détermination.

Dissolvant	31.45 gr.
Pentachlorure de molybdène	0.3825 gr.
Élévation du point d'ébullition	0.195° C.,

d'où M = 300.

Troisième détermination.

Dissolvant	30.23 gr.
Substance	0.257 gr.
Élévation du point d'ébullition	0.1° C.,

d'où M = 296.

Quatrième détermination.

Dissolvant	30.23 gr.
Substance	0.375 gr.
Élévation du point d'ébullition	0.234° C.,

d'où M = 280.

Toutes ces valeurs de M concordent avec le nombre théorique 273.5.

Avant de terminer ce chapitre, je désire attirer l'attention sur deux propriétés du pentachlorure de molybdène que j'ai observées au cours de ces recherches. Lorsqu'on évapore la solution de pentachlorure de molybdène dans le tétrachlorure de carbone, on obtient de magnifiques cristaux roses,

formés probablement par une combinaison additionnelle des deux substances mises en présence.

Ces cristaux fument à l'air et s'altèrent rapidement au contact de l'humidité. Ils feront l'objet d'une étude spéciale.

Le pentachlorure de molybdène dissous dans le benzol ou le tétrachlorure de carbone donne des dissolutions fortement colorées en rouge-sang. Mais quand on ajoute à cette liqueur de l'éther ou de l'alcool renfermant la moindre trace d'humidité, on le voit se colorer en vert, tandis que l'éther pur, fraîchement distillé sur du sodium, conserve à la solution sa couleur rouge primitive. Il y aura là peut-être un réactif permettant de déceler des traces d'humidité dans les dissolvants organiques.

IV. — Détermination de la chaleur spécifique du molybdène.

(Figures 10, 10bis, 11, 11bis et 11^{a}.)

Jusqu'ici, trois physiciens se sont occupés de la détermination de la chaleur spécifique du molybdène.

De la Rive et Marcet (*), les premiers, ont étudié le molybdène préparé par la réduction de l'anhydride molybdique par l'hydrogène. Ils se sont servis de la méthode du refroidissement et ont obtenu pour la chaleur spécifique de cet élément

$$0.0659,$$

ce qui correspond à une chaleur spécifique atomique

$$6.31 \ (Mo = 95.8).$$

Presque en même temps, Regnault (**) publia ses remarquables travaux

(*) De la Rive et Marcet, *loc. cit.*
(**) Regnault, *loc. cit.*

sur les chaleurs spécifiques obtenues par la méthode des mélanges et trouva pour la chaleur spécifique du molybdène

0.07218,

ce qui donne le nombre 6.9 pour la chaleur spécifique atomique (Mo = 95.8).

S'il faut choisir entre ces travaux, c'est évidemment au dernier qu'il y a lieu d'accorder la préférence et il faut admettre qu'il a conduit aux résultats les plus rapprochés de la vérité, étant donnée la grande exactitude de la méthode.

Comme j'ai eu l'occasion de le dire dans l'introduction de ce mémoire, on pourrait jusqu'à un certain point expliquer la valeur un peu trop forte obtenue par Regnault, puisqu'il déclare lui-même que son métal renfermait des traces de carbone.

Comme je suis parvenu à préparer un molybdène pur, il était intéressant de l'employer à une nouvelle détermination de cette constante physique. Malheureusement, je ne dispose que de quelques grammes de substance : il m'a donc été impossible d'employer le procédé de Regnault, modifié depuis par Kopp et Wüllner (voir plus loin), et je me suis vu dans la nécessité de recourir à la méthode du calorimètre à glace de Bunsen.

Tous ceux qui, dans ces derniers temps, se sont occupés de déterminations de chaleur spécifique, sont unanimes à vanter la grande exactitude de cette méthode ; mais que de difficultés d'exécution ! Non seulement la construction de l'appareil demande beaucoup de soin, mais encore il faut éviter le rayonnement qui doit fatalement être considérable à certaines époques de l'année où la température s'écarte de 10°. Heureusement, MM. Donny fils, qui portent un nom vénéré par tout homme de science, ont bien voulu me permettre de travailler dans leur immense glacière, où j'opérais dans une vaste salle et sur une couche de glace de 6 mètres d'épaisseur, accusant une température de quelques dixièmes de degré au-dessous de zéro.

Une fois en possession d'un local convenable, j'ai disposé mon calorimètre de la façon suivante, dont j'ai pu constater les avantages en faisant

au préalable quelques déterminations de contrôle sur de l'argent métallique préparé par Stas et dans lesquelles j'ai trouvé 0.0575; Regnault avait trouvé 0.05701.

L'appareil de Bunsen A est placé dans une éprouvette cylindrique E renfermant de l'eau distillée pure. Afin d'empêcher que la température de cette eau ne s'élève au-dessus de zéro, j'ai provoqué sur les parois internes de ce vase la formation d'une couche de glace de 1 centimètre d'épaisseur, ce que j'obtiens en le maintenant dans un mélange de glace pilée et de sel marin. S'il se forme dans le liquide des lamelles de glace, je les détache et les laisse flotter à la surface de l'eau. J'ai toujours eu soin d'y maintenir quelques morceaux de glace bien pure, et ce afin d'empêcher qu'aucune source de chaleur ne vînt modifier la température du système.

L'éprouvette E est placée dans un bac en bois rempli de petits morceaux de glace, qui sont remplacés au fur et à mesure de leur fusion.

Pour produire autour du tube central *e* le culot de glace indispensable, j'ai opéré de la façon suivante : Lorsque tout le calorimètre est à zéro, j'introduis en *e* de l'alcool jusqu'à la soudure et j'y projette de petits morceaux d'anhydride carbonique solide. Au bout d'une minute, un anneau de glace apparaît autour de la partie supérieure de l'éprouvette centrale. J'enlève alors la moitié de l'alcool en me servant du dispositif indiqué dans la figure 10bis.

Après l'introduction d'une nouvelle quantité d'anhydride carbonique solide, l'anneau de glace grandit et augmente surtout en épaisseur au niveau de la surface de l'alcool. Lorsque je juge cette épaisseur suffisante, j'élimine la majeure partie de l'alcool de façon à n'avoir plus que quelques centimètres cubes de ce liquide dans le fond de l'éprouvette, et je continue à ajouter de l'anhydride carbonique jusqu'à ce que le culot de glace soit suffisamment épais à la partie inférieure de *e*. Pour détacher tout le culot de glace de l'éprouvette, je remplis cette dernière d'eau distillée ayant la température ordinaire, et en quelques instants on voit ce culot flotter autour du tube *e*. A ce moment, j'expulse cette eau au moyen de l'appareil figure 10bis et la remplace par de l'eau distillée glacée. Toutes ces opérations durent à peine *cinq minutes*. Je pense que ce mode opératoire pourra remplacer avan-

tageusement l'emploi de l'alcool à — 20° C., recommandé par Bunsen, ce qui exige trois heures de travail, ou l'emploi assez incommode du chlorure de méthyle.

Les dilatations ont été observées dans un tube capillaire garni d'une règle de bois exactement divisée en millimètres. Le calibrage du tube a été effectué avec une colonne de mercure de $0^{gr},126$ et occupant dans le tube une longueur variant de 83 à 94 millimètres. Après chaque expérience, le mercure fut ramené approximativement à sa position première par le jeu du robinet R.

La plupart des auteurs calculent la valeur moyenne de chaque division de tube capillaire. Il y a là évidemment une cause d'erreur que j'ai cherché à écarter, en prenant comme base de mes calculs les volumes occupés successivement par la colonne de mercure qui m'avait servi au calibrage du tube capillaire. Je donne ici le tableau des divisions en millimètres occupées par la colonne de mercure pesant $0^{gr},126$ et dont le volume absolu à 20° C. était de 9.3014 mm^3 :

De	96	millimètres	à	87.7	. . . . .	8.30	millimètres.
»	87.5	»	à	79.1	. . . . .	8.40	»
»	79	»	à	70.55	. . . . .	8.45	»
»	70	»	à	61.45	. . . . .	8.55	»
»	62	»	à	53.4	. . . . .	8.60	»
»	52	»	à	43.38	. . . . .	8.62	»
»	43	»	à	34.30	. . . . .	8.70	»
»	34	»	à	25.00	. . . . .	9.00	»
»	25	»	à	15.75	. . . . .	9.25	»
»	15	»	à	5.70	. . . . .	9.3	»
»	11	»	à	1.60	. . . . .	9.4	»

Supposons que la contraction du mercure amène le retrait de la colonne de mercure dans le tube capillaire entre les divisions 13 et 59. De 13 à 59, la colonne de mercure, avec son volume absolu 9.3014, se déplace cinq fois et correspond à

92.5, 90.0, 87.0, 86.2, 86.0 = 441.7 mm.

Le volume absolu occupé par le mercure entre les divisions 13 et 59 sera de

$$\frac{9.3014 \times (59 - 13)}{441.7} \text{ mm}^3.$$

Comme le molybdène est attaqué par l'eau, j'ai pris les dispositions suivantes pour éviter cette altération. Après avoir vainement cherché à obtenir un tube pèse-substance fermant suffisamment pour ne pas laisser échapper, lorsqu'on le chauffe à 100°, une partie de l'air qu'il renferme et pour ne pas permettre l'entrée de l'eau lorsqu'on le plonge brusquement dans ce liquide froid, j'ai imaginé le petit appareil représenté en grandeur naturelle par la figure 11bis. Il est formé d'un étui à plumes (*b*) en laiton très mince, à l'intérieur duquel en est placé un second plus petit (*a*). Ils sont disposés de manière que le joint de fermeture de l'étui intérieur se trouve en haut, tandis que celui de l'étui extérieur se trouve vers le bas. Si, par suite de la contraction de l'air due au refroidissement, une goutte d'eau pénètre dans le système, elle prend la position représentée en E dans la figure 11bis, sans jamais arriver à atteindre la substance M.

J'ai déterminé d'abord la valeur en eau de ce petit appareil; j'ai opéré ensuite après y avoir introduit le molybdène.

Le chauffage a été fait dans une étuve à vapeur d'eau, figure 11. Afin d'éviter tout refroidissement pendant le transfert de l'appareil de l'étuve au calorimètre, et pour assurer en même temps un maniement rapide, j'ai pris les dispositions suivantes :

A l'intérieur de la chambre à air de l'étuve se trouve suspendu un large tube ouvert par-dessous. Un grand bouchon B, dont les détails sont représentés dans la figure 11^a, est perforé sur la moitié de sa hauteur pour recevoir ce cylindre. Ce bouchon porte en outre un tube *t* par lequel passe un thermomètre et un tube *t'* pour soutenir le fil de cocon auquel est suspendu l'appareil porte-substance. Le fil est maintenu par un petit bouchon *b*. Il suffit de soulever légèrement ce dernier pour permettre à la substance de tomber dans l'éprouvette du calorimètre, au-dessus duquel on place vivement le cylindre.

Les calculs ont été effectués d'après la formule

$$PCT = V \times 882.1.$$

P = Poids de la substance.

C = Chaleur spécifique.

T = Température du bain d'air. J'ai fait la correction du thermomètre en tenant compte du nombre des degrés émergents et en observant la température de la colonne de mercure émergée. Cette dernière était de 15° C.

V = Volume absolu du retrait de mercure calculé comme il est indiqué plus haut.

Résultats.

DÉTERMINATION DE LA CHALEUR SPÉCIFIQUE DE L'APPAREIL PORTE-SUBSTANCE EN LAITON.

Première expérience.

P . . . . . 4.484 gr.
T . . . . . 99°.1 C. (corrigée).
V . . . . . 46.37 mm³,

d'où C = 0.0919.

Deuxième expérience.

P . . . . . 4.484 gr.
T . . . . . 98°.1 C. (corrigée).
V . . . . . 46.108 mm³,

d'où C = 0.0924.

Moyenne des deux résultats : 0.09215.

RÉSULTATS OBTENUS AVEC LE PORTE-SUBSTANCE CONTENANT LE MOLYBDÈNE.

Première détermination.

P (molybdène) . . . . . 1.271 gr.
p (laiton) . . . . . 4.484 gr.
T . . . . . 99°.6 C. (corrigée).
V . . . . . 50.182669 mm³,

d'où C (molybdène) = 0.07130.

Deuxième détermination.

P	1.271 gr.
p	4.484 gr.
T	99°.6 C. (corrigée).
V	49.938039 mm³,

d'où C = 0.07143.

Si je prends la moyenne de ces deux résultats, 0.071365, la chaleur spécifique atomique du molybdène sera $C \times 95.8 = 6.8$. Ce nombre se rapproche sensiblement de celui qu'a obtenu Regnault.

Si de la chaleur spécifique atomique 6.4 (nombre moyen) je déduis le poids atomique, j'obtiens $\frac{6.4}{0.071365} = 89.7$, nombre qui se rapproche plus du résultat 95.8 obtenu par voie chimique qu'aucun des multiples ou sous-multiples de ce dernier.

V. — Détermination de la chaleur spécifique du bibromure de molybdène.

(Figures 12 et 13.)

Il n'y a jusqu'ici que trois dérivés du molybdène dont on ait déterminé la chaleur spécifique. Ce sont l'anhydride molybdique, le molybdate de plomb et le sulfure de molybdène.

J'ai déjà signalé les résultats obtenus par Kopp et Regnault dans l'étude de la chaleur spécifique de l'anhydride molybdique. La chaleur spécifique trouvée par Kopp est certainement entachée d'erreur. Le produit était impur; aussi l'auteur déclare-t-il « die Resultate nicht zuverlässig ». La chaleur spécifique moléculaire déterminée par Regnault est de 19.06 ($MoO_3 = 144$). En attribuant à l'oxygène la chaleur spécifique atomique de 4.5 ou 4.0, la chaleur spécifique atomique du molybdène serait de

$$19.06 - 13.5 = 5.56$$

ou de

$$19.06 - 12.0 = 7.06.$$

Ni l'un ni l'autre de ces nombres ne s'écarte suffisamment de la moyenne 6.4 généralement adoptée pour qu'on puisse admettre la présence de deux atomes de molybdène dans l'anhydride molybdique, à moins qu'on ne veuille supposer que le molybdène ait une chaleur spécifique anormale, comme c'est le cas pour le silicium, par exemple. Mais mes observations directes faites sur le molybdène libre n'autorisent pas une pareille supposition. La chaleur spécifique du molybdate de plomb a été étudiée par Kopp (*). Elle est de 0.0827, ce qui correspond à une chaleur spécifique moléculaire ($PbMoO_4 = 367$) de 30.3. L'auteur a opéré sur la molybdénite ($PbMoO_4$) de Bleiberg. La pureté de ce minéral est fort douteuse, et le résultat obtenu ne prête guère à discussion.

Regnault (**), de même que De la Rive et Marcet (***), ont aussi déterminé la chaleur spécifique du sulfure de molybdène (MoS_2). Le premier obtient 0.12334, ce qui conduit à une chaleur spécifique moléculaire de 19.98. Les seconds obtiennent 0.1097, ce qui donne une chaleur spécifique moléculaire de 17.7. Ici encore la discussion de ces résultats paraît impossible, attendu que nous n'avons aucune garantie quant à la pureté des produits employés. Regnault lui-même dit qu'il a employé un sulfure naturel bien trié, mais que cependant il n'a pu l'obtenir complètement exempt de gangue.

J'ai été amené, au cours de mes recherches sur le molybdène, à préparer du bibromure molybdique qui a été obtenu à un très grand degré de pureté, et dont une partie a servi à la préparation du molybdène pur. J'ai cru devoir faire une détermination de la chaleur spécifique de ce composé. Cette détermination me paraissait d'autant plus indiquée que jusqu'ici le brome a figuré avec une constante thermique toujours la même dans tous les composés que l'on en a étudiés au point de vue de la capacité calorifique (IV).

Comme je disposais pour ce travail d'une quantité de matière suffisante, j'ai eu recours à la méthode des mélanges. C'est la méthode de Kopp et

(*) Kopp, *loc. cit.*
(**) Regnault, *loc. cit.*
(***) De la Rive et Marcet, *loc. cit.*
(IV) Berthelot, *Thermochimie. Données et lois numériques*, 1897, I, 122.

Wüllner, décrite dans le *Lehrbuch der experimental Physik* de Wüllner (1896), que j'ai suivie. Cette méthode a été modifiée depuis dans sa partie expérimentale au laboratoire de M. van Aubel, où j'ai fait cette détermination.

Le bibromure de molybdène renfermé dans une éprouvette en verre, dont j'ai déterminé au préalable la valeur en eau, fut plongé dans un bain de mercure chauffé à l'aide d'une étuve à acétone, et dont les détails sont représentés par la figure 12. Lorsque je jugeai que l'équilibre de température était obtenu, je plongeai rapidement l'éprouvette dans un calorimètre entouré d'une couche d'air protégée contre un trop grand rayonnement par un double cylindre rempli d'eau (figure 13). Je me suis servi pour l'indication des temps d'un compteur battant la seconde.

Les calculs ont été faits d'après la formule

$$(px+p')\left[\mathrm{T}-t-\frac{v''}{t''-t'}\left(t_1+t_2+t_3\ldots t_{n-1}+\frac{t_n+t_o}{2}-nt'\right)\right]$$
$$=\mathrm{P}\left[t_n-t_o+\frac{v''-v'}{t''-t'}\left(t_1+t_2+t_3\ldots t_{n-1}+\frac{t_n+t_o}{2}\right)+nv'\right].$$

p Poids de la substance.
x Chaleur spécifique à trouver.
p' Valeur en eau de l'éprouvette.
T Température corrigée du bain de mercure.
t_o Température du calorimètre.
t' Moyenne des températures observées toutes les vingt secondes avant la période principale.
t Températures observées toutes les vingt secondes pendant la période principale.
t'' Moyenne des températures observées toutes les vingt secondes après la période principale.
v' Différences entre $t'_1-t'_2$, $t'_2-t'_3$, etc., $=\dfrac{t'_1-t'_n}{n-1}$
v'' Différences entre $t''_1-t''_2$, $t''_2-t''_3$, etc., $=\dfrac{t''_1-t''_n}{n-1}$.
t_n Température du calorimètre à la fin de la période principale.
n Nombre de mesures de la température t.
P Valeur en eau du calorimètre, du thermomètre et de l'eau.

J'ai placé dans le calorimètre un thermomètre de Bechmann que j'avais au préalable comparé à un thermomètre normal vérifié à l'Institut physico-technique de l'Empire allemand.

VALEUR EN EAU DE L'ÉPROUVETTE DEVANT CONTENIR LE BROMURE DE MOLYBDÈNE.

Pour déterminer la valeur en eau de la partie de l'éprouvette qui plonge dans le calorimètre, j'ai introduit au préalable dans l'éprouvette porte-substance une certaine quantité d'essence de térébenthine.

Première série de résultats.

	Expérience I.	Expérience II.	Expérience III.	Expérience IV.	Expérience V.
P	90.79	88 0876	88.0876	88.0876	88 0876
T	58.692	58.665	58.687	58.752	58.704
t'	19.878	19.80	19.929	20.19	20 565
v'	0.0013	0	0	0	0
t	19 8757	19.80	19 929	20.19	20.565
t	21.500	21.53	21.64	21.899	22.267
t''	21.445	21.504	21 499	21.867	22.228
v''	0.0086	0.0055	0.007	0.007	0.008
t	192.181	192 33	171.025	196 034	176.713
n	10	10	9	10	9
—	—	—	—	—	—
$px + p'$ (*). .	4.22	4.22	4 20	4 23	4.24

Moyenne de $px + p' = 4.225$

(*) p Poids d'essence de térébenthine : 8.249 grammes.
x Chaleur spécifique de l'essence de térébenthine.
p' Valeur en eau de l'éprouvette porte-substance.

Deuxième série de résultats.

	Expérience I.	Expérience II.	Expérience III.	Expérience IV.
P	87.9297	87.9297	87.9297	87.9297
T	59.52	59.47	59.478	59.589
t'	20.36	20.32	21.075	20.455
v'	0	0	0.005	0
t	20.36	20.32	21.038	20.455
t	21.301	21 248	21.93	21.375
t	21.277	20.553	21.903	21.346
v''	0.005	0.0037	0.008	0.005
T	148.722	123.83	109.27	106.3
n	8	7	6	6
—	—	—	—	—
$px + p'$	2.24	2.22	2.20	2.21

Moyenne de $px + p' = 2.2175$

Des moyennes des deux séries de déterminations, je puis déduire la chaleur spécifique de l'essence de térébenthine employée

$$x = \frac{4.225 - 2.2175}{8.249 - 3.783} = 0.4495,$$

d'où la valeur en eau de l'éprouvette

$$p' = 2.2175 - 3.783 \times 0.4495 = 0.517.$$

DÉTERMINATION DE LA CHALEUR SPÉCIFIQUE DU BROMURE DE MOLYBDÈNE.

Résultats.

p 7.221 gr. de bromure de molybdène.
p' Valeur en eau de l'éprouvette porte-substance : 0.517.
x Chaleur spécifique du bromure de molybdène.

	Expérience I.	Expérience II.	Expérience III.	Expérience IV.
P	88.0872	88.0872	88.0872	88.0872
T	59.59	59.00	59.524	59.29
t'	22.94	22.397	22.591	22.855
v'	0	0.001	0.002	0
t	22.94	22.394	22.5838	22.855
t	23.335	22.792	22.975	23.255
t''	23.320	22.740	22.965	23.241
v''	0 005	0.005	0.005	0.004
t	209 812	181.971	137.698	209.058
n	10	9	7	10
—	—	—	—	—
$px + p'$	1.073	1.0378	1.028	1.069
x	0.0769	0.0721	0.0707	0.0764
	19.9	**18.5**	**18.1**	**19.6**

Moyenne des chaleurs spécifiques moléculaires : 19.03
Chaleur spécifique moléculaire calculée pour $MoBr_2$: $6.4 + 6.4 \times 2 = 19.2$

Ce résultat nous donne une nouvelle confirmation de l'existence d'un atome unique de molybdène dans le bibromure de ce métal.

Université de Gand, Laboratoire de chimie générale, le 15 juillet 1897.

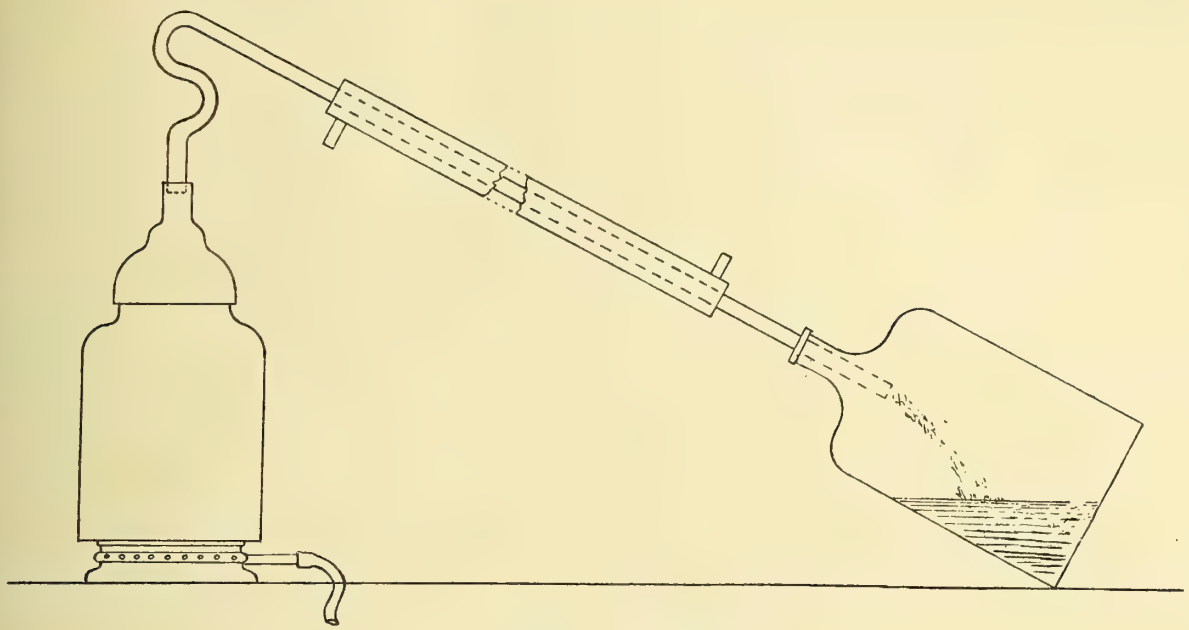


FIG. 1. — Appareil à eau distillée pure.

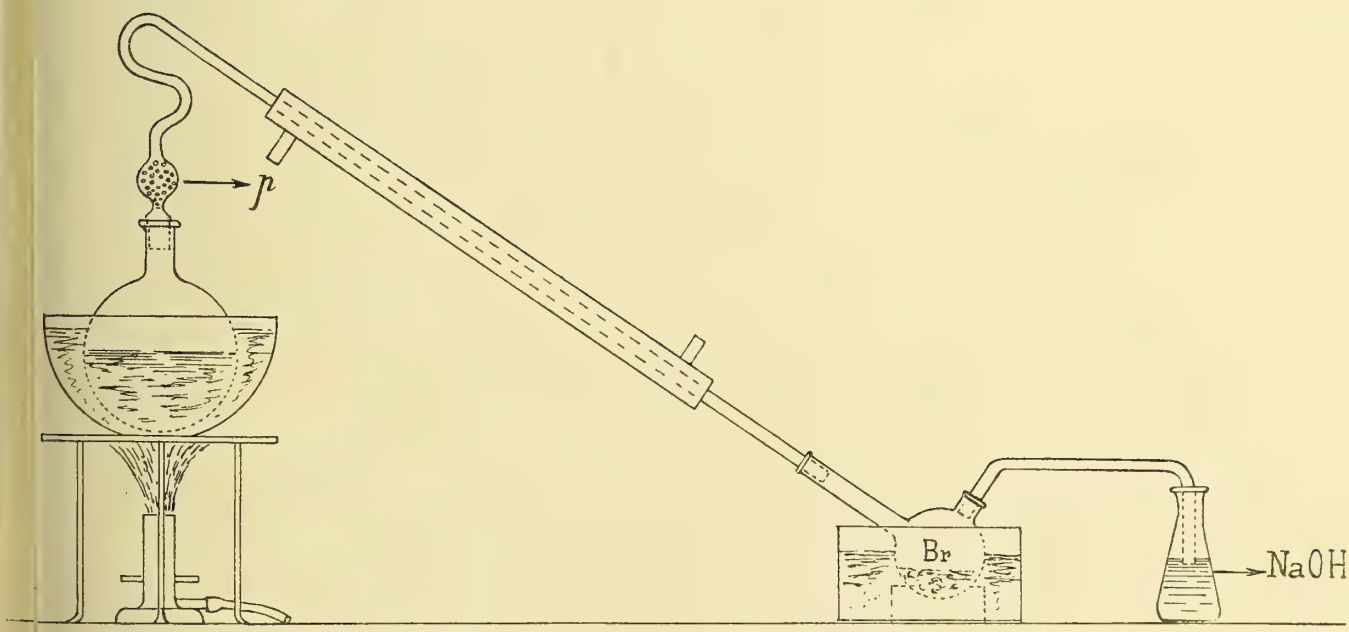


FIG. 2. — Appareil à brome pur (1re distillation).

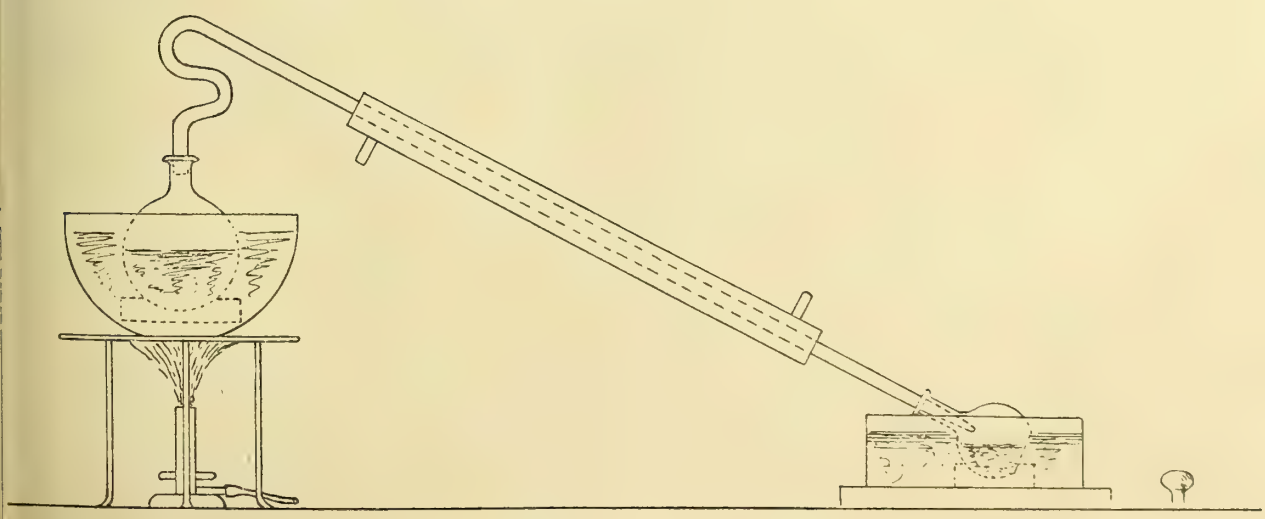


FIG. 3. — Appareil à brome pur (2e distillation).

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

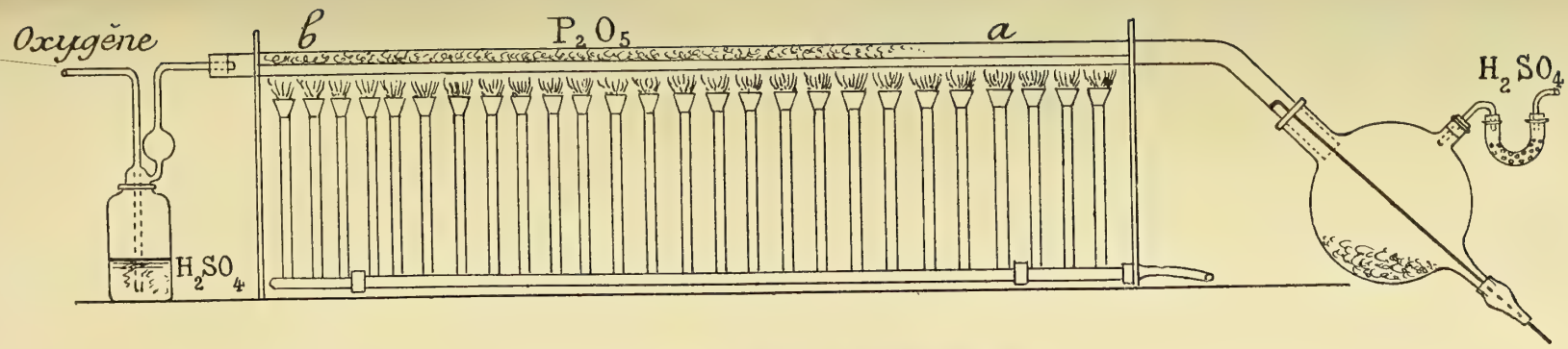


FIG. 4. — Appareil à anhydride phosphorique pur.

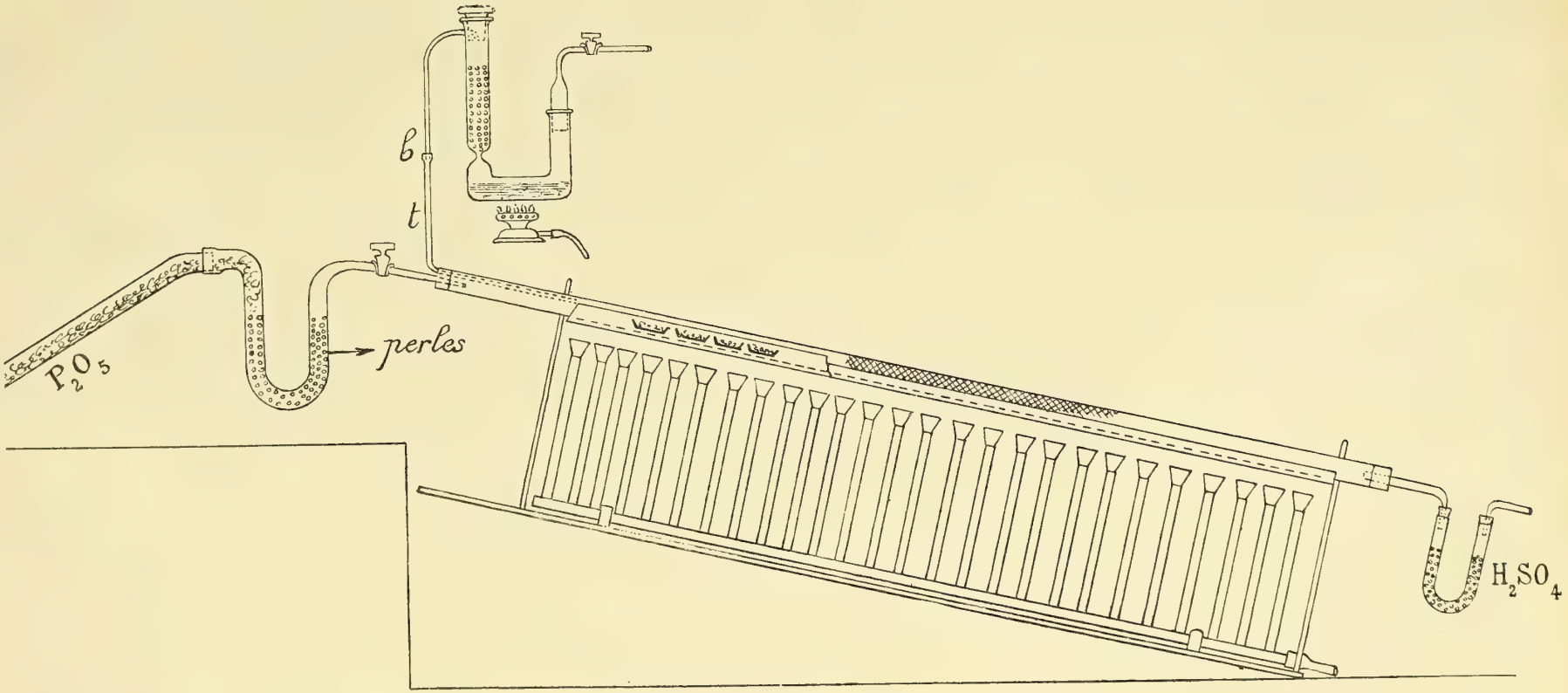


FIG. 5. — Appareil à bromuration du molybdène.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

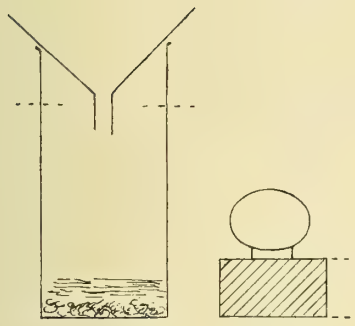


FIG. 6.

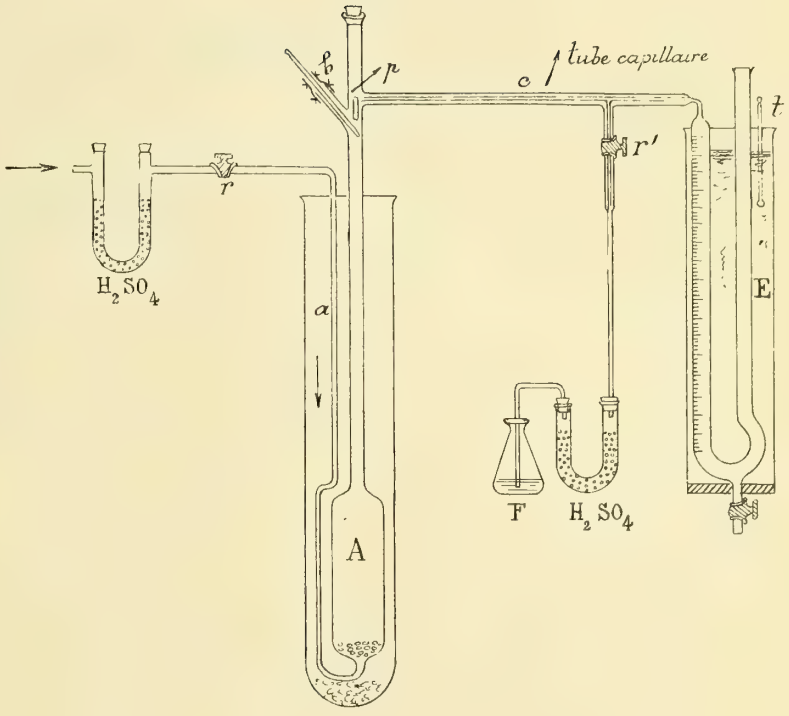


FIG. 8.

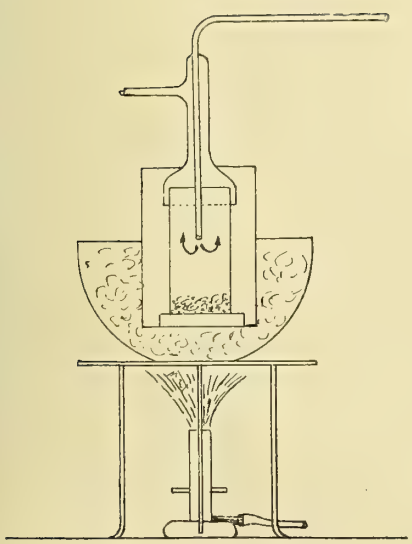


FIG. 7.

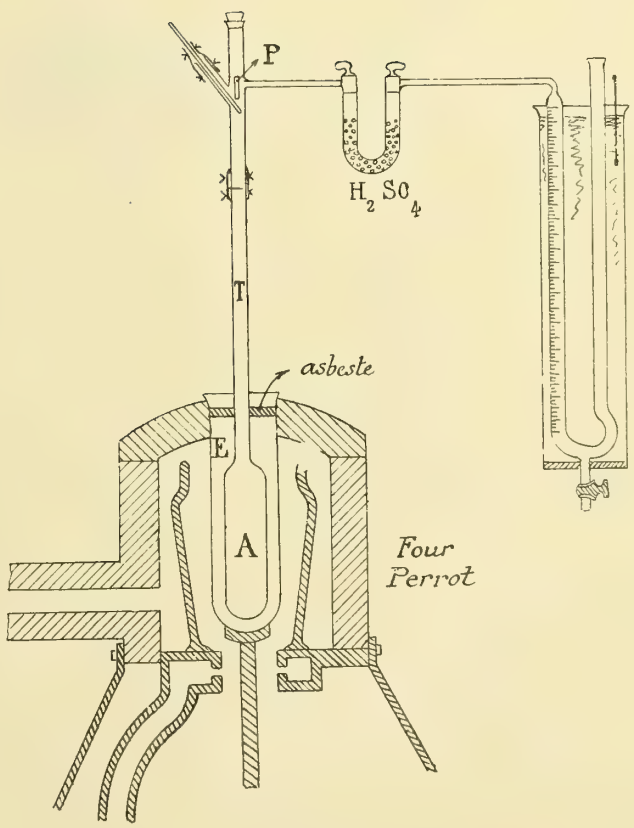


FIG. 9.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

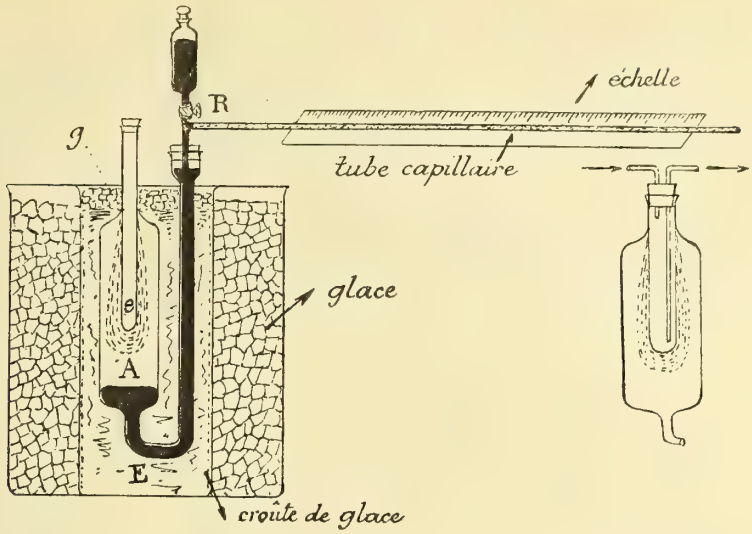


FIG. 10.

FIG. 10bis.

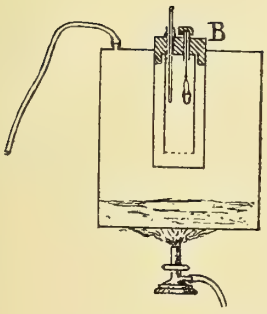


FIG. 11.

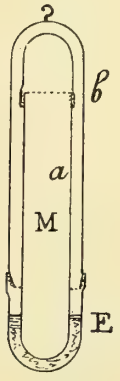


FIG. 11bis.

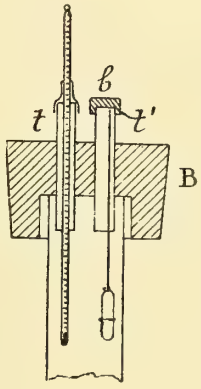


FIG. 11a.

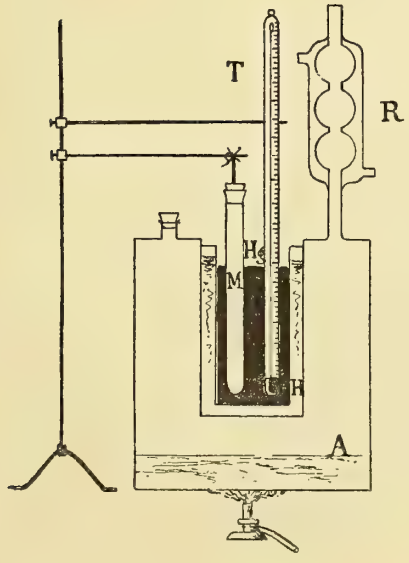


FIG. 12.

Légende.

R Réfrigérant.
T Thermomètre.
Hg Mercure.
M Éprouvette porte-substance.
A Acétone.

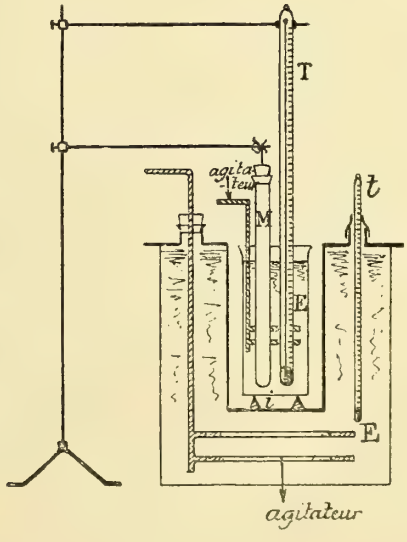


FIG. 13.

Légende.

T Thermomètre Bechmann.
M Éprouvette porte-substance.
E Eau.
i Ivoire.
t Thermomètre.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HIST

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS

PAR

P. DUHEM,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE THÉORIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

QUATRIÈME MÉMOIRE :

Étude de divers systèmes dépendant d'une seule variable.

CINQUIÈME MÉMOIRE :

Étude de divers systèmes dépendant de deux variables.

(Présentés à la Classe des sciences dans la séance du 7 août 1897.)

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS

QUATRIÈME MÉMOIRE

ÉTUDE DE DIVERS SYSTÈMES DÉPENDANT D'UNE SEULE VARIABLE

INTRODUCTION

Dans notre troisième mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis* (*), nous avons posé les principes généraux qui doivent, selon nous, diriger le physicien dans l'explication de cette catégorie si étendue et si complexe de phénomènes. Il nous semble maintenant désirable que l'application de ces principes soit faite dans des cas nombreux et divers, afin que l'on puisse se rendre un compte exact de leur valeur.

Le présent mémoire a pour but de démêler, au moyen de ces principes, les propriétés de certains systèmes dépendant d'une seule variable normale,

(*) *Mémoires couronnés et mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie de Belgique*, tome LIV.

hors la température. L'aimantation rémanente, les changements allotropiques du soufre nous ont déjà fourni, au cours de nos précédents mémoires, d'importants exemples de semblables systèmes. Ces deux exemples rentraient d'ailleurs dans une même catégorie de modifications permanentes : les modifications dans lesquelles les états naturels sont toujours stables.

Dans le présent mémoire, nous nous adressons surtout à des systèmes qui peuvent présenter, selon les circonstances dans lesquelles ils sont placés, tantôt des états naturels stables, tantôt des états naturels instables. C'est par la considération de ces deux sortes d'états naturels que nous parvenons à donner des théories de la déformation et de la rupture des corps élastiques, de la trempe et de l'écrouissage des métaux. Nous n'avions pas ici, pour soumettre nos théories au contrôle de l'expérience, une suite systématique et complète de minutieuses expériences, comparable à la précieuse série de renseignements que nous ont fournie les recherches de M. Gernez sur la transformation du soufre soluble en soufre insoluble; les données de l'observation s'offraient à nous sous forme d'un amas immense et confus de renseignements vagues, incomplets, contradictoires, entassés dans les traités et les mémoires de métallurgie et de résistance des matériaux. Entre ces données et nos théorèmes, il n'était pas possible d'établir un rapprochement détaillé, comme nous l'avions fait pour les modifications du soufre; tout ce que nous pouvions espérer, c'est que nos déductions apportent un peu d'ordre et de lumière dans cet ensemble effrayant de faits accumulés, depuis près d'un siècle, par les physiciens et les ingénieurs; le lecteur jugera peut-être que les principes posés dans nos précédents mémoires ont permis de pousser ce travail de déblaiement et de première classification plus loin qu'on n'aurait pu l'espérer.

Le mémoire suivant est consacré à l'étude, beaucoup plus difficile, de certains systèmes définis par deux variables privilégiées, hors la température. Malgré sa complexité, cette étude jette quelque jour sur les relations qui existent entre l'aimantation et les modifications élastiques, et aussi sur l'influence mutuelle des déformations élastiques et de la trempe.

Dans l'Introduction de notre premier mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis,* nous avons exposé une théorie antérieure de M. Marcel Brillouin et nous avons cru démontrer que l'application du second principe de la thermodynamique à cette théorie conduisait à une contradiction logique. M. Brillouin nous a fait observer que la théorie que nous lui avons prêtée, et qui se heurterait, en effet, à cette contradiction, est essentiellement différente de celle qu'il a réellement développée et pour laquelle cette contradiction s'évanouit ; le lecteur pourra s'assurer, effectivement, que la relation entre x, X, T, dont nous démontrions l'existence pour tout état d'équilibre du système, se réduit, lorsqu'on suit exactement la théorie de M. Brillouin, à une pure identité littérale, découlant de la définition de la fonction $S(x, X, T)$ donnée par M. Brillouin.

Ce n'est pas sans raison que nous avions fait subir à la théorie de M. Brillouin la modification à la suite de laquelle elle devient, comme nous l'avons montré, incompatible avec le principe de Carnot-Clausius ; il nous semblait, en effet, que, faute de cette correction, cette théorie n'était pas compatible avec le principe de la conservation de l'énergie, du moins tel que nous le comprenons et tel que le comprennent beaucoup d'auteurs.

Reprenons les notations employées dans le travail de M. Brillouin et dans la discussion que nous en avons faite : le système étudié est dans un état complètement déterminé par la température T et par une variable normale x ; X est l'action extérieure correspondant à la variable x. Nous avons admis que l'énergie interne du système était une simple fonction de la température T et de la variable normale x, $U(x, T)$. M. Brillouin admet, au contraire (*), que l'énergie interne est une fonction des *trois* variables x, X, T.

En d'autres termes, selon nous, et, nous semble-t-il, selon l'avis général des auteurs qui ont écrit sur le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail, pour que le travail effectué par les forces extérieures à un système durant une modification de ce système, soit équivalent à la chaleur dégagée par ce système, il suffit que les deux variables x et T aient respectivement la même valeur au début et à la fin de la modification, ou, en d'autres termes,

(*) M. Brillouin, *Déformations permanentes et thermodynamique.* (Journal de physique, 2e sér., t. VII, p. 335 ; 1888.)

que l'état final du système soit identique à son état initial; mais il n'est pas besoin de rien supposer sur la valeur initiale et la valeur finale de l'action X, c'est-à-dire sur l'état initial et l'état final des corps étrangers au système.

Selon M. Brillouin, au contraire, pour que l'équivalence en question ait lieu, il ne suffit pas que x et T aient respectivement la même valeur au commencement et à la fin de la modification, que l'état initial du système soit identique à son état final; il faut encore que la valeur finale de l'action extérieure X soit identique à sa valeur initiale; il faut donc que les corps extérieurs au système soient, au commencement et à la fin de la modification, sinon dans le même état, du moins dans des états où ils agissent de même sur le système étudié.

Il est bien vrai que, dans notre manière de voir, où l'énergie interne est essentiellement une fonction $U(x, T)$ des deux seules variables x et T, s'il s'agit d'un système en équilibre et que cet équilibre soit régi par une équation en termes finis :

$$X = f(x, T),$$

on pourra, de cette équation, déduire l'expression de x en fonction de X, T, et substituer cette expression à x soit dans la fonction $U(x, T)$, — cas auquel l'énergie interne deviendra une fonction des deux variables X, T, — soit dans une partie des termes qui composent la fonction $U(x, T)$, — cas auquel l'énergie interne deviendra une fonction des trois variables x, X, T. Mais l'expression de l'énergie interne d'un système soit en fonction des deux variables X, T, soit en fonction des trois variables x, X, T, n'a pour nous de sens que s'il s'agit d'un système en équilibre et *sous la condition que cet équilibre est régi par une équation d'équilibre exprimable en termes finis*.

Si l'on veut traiter d'un système qui n'est pas en équilibre, ou bien encore si l'on ne veut pas que la condition d'équilibre s'exprime par une équation en termes finis, — et c'est précisément l'objet de la théorie de M. Brillouin, — on doit, dans notre manière de voir, exprimer l'énergie interne en fonction des deux seules variables x et T. Le lecteur pourra, en

se reportant à la première partie de notre *Commentaire aux principes de la thermodynamique* (*), reconnaître que cette affirmation de notre part prend sa source au cœur même de notre conception des notions d'*action* et de *quantité de chaleur*.

Il nous paraît donc que la théorie de M. Brillouin, telle que son auteur l'a exposée, exige que l'on présente la notion d'énergie interne sous une forme incompatible avec nos idées personnelles sur les fondements mêmes de la science physique, idées qui ne sont d'ailleurs, croyons-nous, qu'une forme plus précise et plus détaillée des conceptions admises par la plupart des physiciens. Il serait, nous semble-t-il, d'un haut intérêt scientifique que M. Brillouin, exposant à son point de vue les principes fondamentaux de la théorie de la chaleur, les relie à la forme généralisée de la loi de l'équivalence, qui joue un rôle essentiel dans sa théorie des déformations permanentes.

(*) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4e sér., t. VIII, p. 269 ; 1892.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA STABILITÉ DES CYCLES FERMÉS.

§ 1. — *Cycle isotherme décrit entre deux valeurs de l'action extérieure.*

Nous allons revenir, tout d'abord, sur quelques propriétés d'un système défini par la température absolue T et une seule variable normale x; nous continuerons à désigner par X l'action extérieure qui correspond à la variable x.

Étudions, tout d'abord, les modifications isothermiques de ce système et supposons que, dans la région envisagée, le système possède les propriétés suivantes :

On peut trouver un cycle fermé simple (formé d'une seule ligne ascendante et d'une seule ligne descendante) *dont le sommet inférieur et le sommet supérieur aient pour abscisses respectives deux valeurs données* X_0, X_1 *de* X.

On n'en peut trouver qu'un seul.

Ce sont certaines particularités de ce cycle fermé qui vont nous occuper.

Toute notre déduction sera fondée sur la proposition suivante, conséquence de l'inégalité de Clausius, et que nous rappelons ici :

Tout cycle isotherme est sinistrorsùm.

Soient : X_0, X_1 deux valeurs données de l'action extérieure; S_0S_1 le cycle fermé dont le sommet inférieur S_0 a pour abscisse X_0 et le sommet supérieur S_1 a pour abscisse X_1.

Sur l'ordonnée X_1S_1, prenons un point de départ différent du point S_1; faisons décroître l'action extérieure de X_1 à X_0, et faisons-la croître ensuite de X_0 à X_1; nous suivrons un chemin, composé d'une ligne descendante et

d'une ligne ascendante, qui nous amènera sur la ligne X_1S_1, en un point différent du point de départ; sinon, deux cycles fermés distincts pourraient être décrits entre les mêmes limites X_0, X_1, de l'action extérieure. Cherchons quelle sera la situation du point de départ par rapport au point d'arrivée.

Supposons d'abord le point de départ *a* situé *au-dessous* du point S_1. La ligne descendante $a\sigma_0$, que nous suivons tout d'abord, ne pouvant couper la ligne descendante S_1S_0, est tout entière située au-dessous de celle-ci; en particulier, le point σ_0 est au-dessous du point S_0 sur la ligne X_0S_0. La ligne ascendante $\sigma_0 b$, que nous suivons ensuite, est tout entière située au-dessous de la ligne ascendante S_0S_1. *Le point d'arrivée* b *est donc, comme le point de départ* a, *au-dessous du sommet supérieur* S_1 *du cycle fermé.*

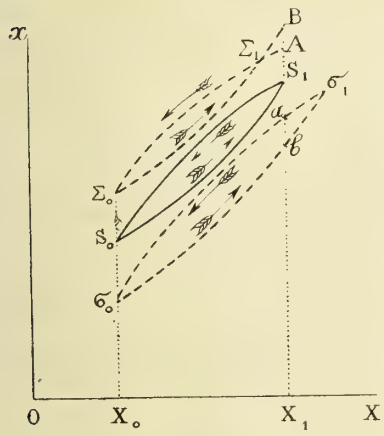


Fig. 1.

Le point *b* peut être soit au-dessous du point *a*, soit au-dessus du point *a*, cas auquel il se trouve entre le point *a* et le point S_1.

Deux cas sont à distinguer, selon que la ligne des états naturels rencontre ou non la ligne X_0S_0 entre σ_0 et S_0 :

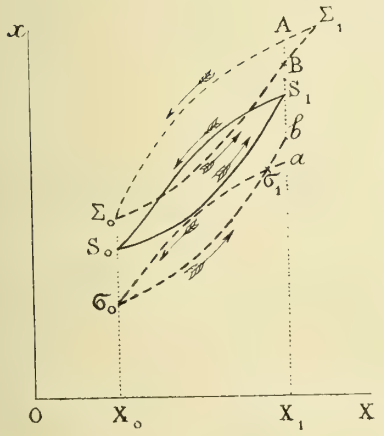


Fig. 2.

Premier cas. — *La ligne des états naturels ne rencontre pas la ligne* X_0S_0 *entre les points* σ_0 *et* S_0.

Au point σ_0, le coefficient angulaire de la tangente à la ligne $a\sigma_0$ est supérieur au coefficient angulaire de la tangente à la ligne $\sigma_0 b$.

Pour que le point b *soit entre le point* a *et le point* S_1, *il faut et il suffit que la ligne descendante* $a\sigma_0$ *et la ligne ascendante* σ_0b *se coupent entre l'abscisse* X_0 *et l'abscisse* X_1 (fig. 1). Si elles se coupent au delà de l'abscisse X_1, ou bien encore si elles ne se coupent pas, le point *b* sera au-dessous du point *a* (fig. 2).

Second cas. — *La ligne des états naturels rencontre la ligne* X_0S_0 *en un point* N *situé entre les points* σ_0 *et* S_0.

Dans ce cas (fig. 3), au point σ_0, le coefficient angulaire de la tangente à la ligne $a\sigma_0$ est inférieur au coefficient angulaire de la tangente à la ligne $\sigma_0 b$. D'ailleurs, ces lignes ne peuvent se couper en un point dont l'abscisse surpasserait X_0, car elles engendreraient un cycle *dextrorsùm*. Donc, *dans ce cas, le point* b *est assurément entre les points* a *et* S_1.

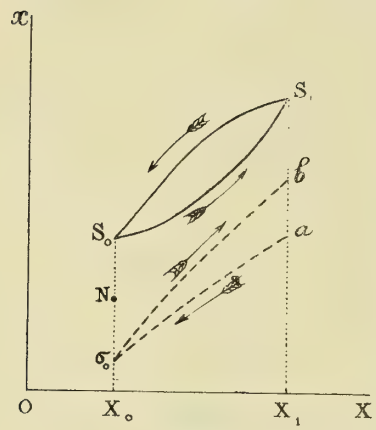


Fig. 3.

Supposons maintenant le point de départ A situé au-dessus du point S_1. La ligne descendante $A\Sigma_0$ est tout entière située au-dessus de la ligne descendante S_1S_0; en particulier, le point Σ_0 se trouve, sur la ligne X_0S_0, au-dessus du point S_0. La ligne ascendante Σ_0B, que nous suivons alors, est tout entière située au-dessus de la ligne ascendante S_0S_1. *Le point d'arrivée* B *est donc, comme le point de départ* A, *au-dessus du sommet supérieur* S_1 *du cycle fermé.*

Le point B peut être soit au-dessus du point A, soit au-dessous du point A, cas auquel il est compris entre le point A et le point S_1.

Deux cas sont à distinguer selon que la ligne des états naturels rencontre ou non la ligne X_0S_0 entre le point S_0 et le point Σ_0 :

Premier cas. — *La ligne des états naturels ne rencontre pas la ligne* X_0S_0 *entre les points* S_0 *et* Σ_0.

Dans ce cas, au point Σ_0, le coefficient angulaire de la tangente à la ligne $A\Sigma_0$ est supérieur au coefficient angulaire de la tangente à la ligne Σ_0B.

Pour que le point B *soit au-dessus du point* A, *il faut et il suffit que la ligne descendante* $A\Sigma_0$ *et la ligne ascendante* Σ_0B *se coupent entre l'abscisse* X_0 *et l'abscisse* X_1 (fig. 2). Si elles ne se coupent pas dans cet intervalle (fig. 1), le point B se trouve entre le point A et le point S_1.

Second cas. — *La ligne des états naturels rencontre la ligne* X_0S_0 *en un point* N, *situé entre les points* Σ_0 *et* S_0.

Dans ce cas (fig. 4), au point Σ_0, le coefficient angulaire de la tangente à la ligne descendante $A\Sigma_0$ est plus petit que le coefficient angulaire de la tangente à la ligne ascendante $\Sigma_0 B$. D'ailleurs, ces deux lignes ne peuvent se couper en un point dont l'abscisse surpasse X_0, car elles circonscriraient un cycle *dextrorsùm*. Donc, dans ce cas, *le point* B *est certainement au-dessus du point* A.

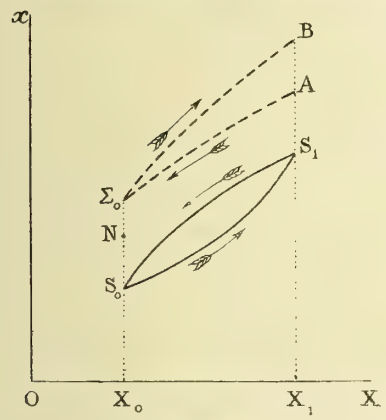


Fig. 4.

Partons d'un point *a*, situé sur la ligne X_1S_1, au-dessous du point S_1; imaginons que nous abaissions l'action extérieure de X_1 à X_0, que nous la fassions revenir ensuite de X_0 à X_1 et que nous renouvelions un certain nombre de fois de suite cette opération; nous obtiendrons successivement, sur la ligne X_1S_1, les points *b*, *c*, *d*, ..., *l*, *m*, ... Nous savons déjà que tous ces points seront au-dessous du point S_1. Nous nous proposons maintenant de démontrer que *si le point* b *est au-dessus du point* a, *chacun des points* b, c, d, ..., l, m, ... *est au-dessus de celui qui le précède; tandis que si le point* b *est au-dessous du point* a, *chacun des points* b, c, d, ..., l, m, ... *est au-dessous de celui qui le précède.*

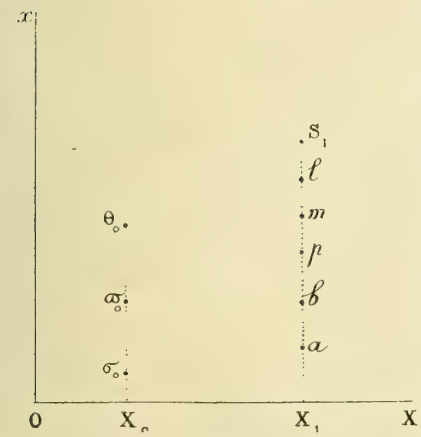


Fig. 5.

Démontrons, par exemple, la première proposition.

L'hypothèse est que le point *b* se trouve, sur la ligne X_1S_1, au-dessus du point *a*; peut-il arriver que les points consécutifs *a*, *b*, ..., *l* étant placés de telle sorte que l'ordonnée de chacun d'eux surpasse l'ordonnée du précédent, le point *m* ne soit pas au-dessus du point *l*, qui le précède immédiatement?

Soit $l\theta_0 m$ le chemin suivi par le point figuratif entre les points *l* et *m* (fig. 5).

Le point m ne peut coïncider avec le point l; en effet, le cycle $l\theta_0 m$ serait alors un cycle isotherme simple, décrit entre les valeurs X_0, X_1, de X; les points l, m, étant forcément au-dessous du point S_1, ce cycle serait distinct du cycle S_0S_1, ce qui est impossible, puisque, d'après nos hypothèses, le cycle S_0S_1 est le seul cycle isotherme simple décrit entre les valeurs X_0, X_1 de l'action extérieure X.

Si donc le point m n'est pas au-dessus du point l, il est au-dessous.

Cela étant, prenons sur l'ordonnée X_0S_0 un point ϖ_0, variable d'une manière continue. Considérons la ligne ascendante et la ligne descendante qui se coupent en ce point; elles coupent la ligne X_1S_1 en deux points; soient α l'intersection de la ligne ascendante avec la ligne X_1S_1 et β l'intersection de la ligne descendante avec la même ligne; pendant que le point ϖ_0 décrit la ligne X_0S_0, de σ_0 en θ_0, toujours dans le même sens, le point α décrit d'un mouvement continu le segment bm, tandis que le point β décrit d'un mouvement continu le segment al, entre les extrémités duquel est compris le segment bm; le point β coïncide donc au moins une fois avec le point α. Soit p le lieu d'une telle coïncidence, forcément situé entre b et m; soit ω_0 la position correspondante du point ϖ_0; le cycle $\omega_0 p$ serait un cycle isotherme simple décrit entre les valeurs X_0 et X_1 de X; d'ailleurs, les points b et m étant tous deux au-dessous du point S_1, il en serait de même du point p, et le cycle $\omega_0 p$ serait distinct du cycle S_0S_1, ce qui est impossible.

Notre première proposition est ainsi établie. On démontrerait de même la seconde.

Considérons le cas où le point b est au-dessus du point a et où, par conséquent, chacun des points c, d, ..., l, m, est au-dessus du précédent. Tous ces points sont assujettis à demeurer au-dessous du point S_1. Il existe donc un point limite n, coïncidant avec S_1 ou situé au-dessous de S_1, vers lequel ils tendent, et dont ils s'approchent autant que l'on veut.

Un tel point n ne peut être différent de S_1.

Supposons, en effet, qu'il en soit différent. Partons du point n, faisons décroître la valeur de X de X_1 à X_0 et faisons-la croître de nouveau de X_0 à X_1. Nous revenons en un point n', différent du point n, sans quoi nous pourrions décrire entre les valeurs X_0, X_1, de X un cycle isotherme simple différent du cycle S_0S_1.

Si le point n était le point limite vers lequel tendent les points a, b, c, d, ..., l, m, l'intervalle lm de deux points consécutifs devrait tendre vers o lorsque l'un et l'autre tendraient vers le point n; mais, d'autre part, il est clair que, les lignes ascendantes et les lignes descendantes variant d'une manière continue, ce même intervalle devrait tendre vers nn'. Nous aboutirions donc à une contradiction si nous supposions que les points a, b, c, d, ..., l, m tendent vers une limite autre que S_1. Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Si le point b *est situé au-dessus du point* a *sur la ligne* X_1S_1, *les points* a, b, c, d, ..., l, m *tendent, sans jamais l'atteindre, vers le point* S_1.

Partons maintenant d'un point A situé au-dessus du point S_1 sur la ligne X_1S_1. Faisons osciller l'action extérieure X entre X_1 et X_0 et désignons par B, C, D, ..., L, M les points figuratifs que nous obtenons lorsque l'action extérieure reprend la valeur X_1. Nous pourrons énoncer les propositions suivantes :

Si le point B *est au-dessus du point* A *sur la ligne* X_1S_1, *chacun des points* B, C, D, ..., L, M *est au-dessus de celui qui le précède, sur la même ligne.*

Si le point B *est au-dessous du point* A, *chacun des points* B, C, D, ..., L, M *est au-dessous de celui qui le précède; ces points tendent vers le point* S_1, *sans jamais l'atteindre.*

Prenons une valeur initiale fixe X_0 de l'action extérieure et une valeur variable X, supérieure à X_0, de cette action. Par hypothèse, il existe un cycle isotherme simple et un seul dont le sommet inférieur S_0 ait pour abscisse X_0 et dont le sommet supérieur S ait pour abscisse X. Faisons croître X d'une manière continue à partir de X_0 et traçons le lieu du point S.

Si l'on observe qu'autour de tout point de la ligne des états naturels on peut tracer un cycle fermé infiniment petit, on voit sans peine que ce lieu est une courbe N_0S, issue du point N_0 où la ligne des états naturels rencontre la droite $X = X_0$.

La ligne N_0S doit, pour chaque abscisse X supérieure à X_0, présenter un et un seul point.

Le coefficient angulaire de la tangente à la ligne N_0S doit être supérieur,

en tout point de cette ligne, au coefficient angulaire de la tangente à la ligne ascendante qui passe en ce point, ou inférieur, en tout point de cette ligne, à ce même coefficient; on peut énoncer la même proposition en remplaçant les mots ligne ascendante par les mots ligne descendante.

Imaginons, en effet, que l'une de ces propositions soit fausse. Supposons, par exemple, que de N_0 à σ (fig. 6), le coefficient angulaire de la tangente à la ligne N_0S soit supérieur au coefficient angulaire de la tangente à la ligne ascendante qui passe en ce point, et que l'inverse ait lieu au delà de σ.

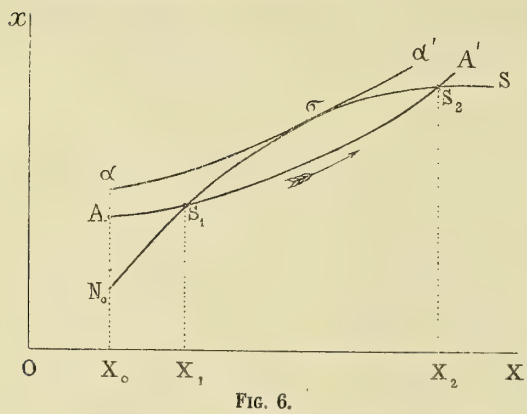


FIG. 6.

Soit $\alpha\alpha'$ la ligne ascendante qui passe en σ.

On pourrait toujours trouver une ligne ascendante AA', située au-dessous de $\alpha\alpha'$, et assez voisine de cette dernière ligne pour rencontrer la ligne N_0S en deux points, S_1, S_2. Mais alors il devrait exister un cycle isotherme simple ayant pour sommets A et S_1, et un autre cycle isotherme simple ayant pour sommets les points A, S_2. Or ces deux cycles ne peuvent avoir deux côtés descendants différents, car deux descendantes différentes passeraient au point A; ils ne peuvent non plus avoir le même côté descendant, car le cycle isotherme simple AS_2 serait formé de deux boucles, ce qui est impossible. La supposition dont nous sommes partis est donc absurde.

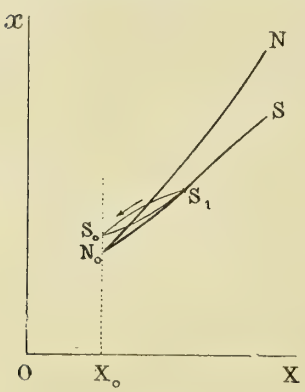


FIG. 7.

Considérons un système de la *première catégorie* (fig. 7). La ligne des états naturels N_0N monte de gauche à droite. Prenons un cycle isotherme infiniment petit dont le sommet inférieur S_0 corresponde à la valeur X_0 de X et dont le sommet supérieur S_1 corresponde à une valeur X_1 de X, infiniment peu supérieure à X_0. N_0S_1 sera un élément de la ligne N_0S.

Le sommet inférieur S_0, devant être à gauche de la ligne des états naturels, sera au-dessus du point N_0; l'ascendante élémentaire S_0S_1 et la descendante élémentaire S_1S_0, qui sont sensiblement confondues (puisqu'en chaque point de la ligne des états naturels l'ascendante et la descendante se touchent) ont, au point S_1, des coefficients angulaires moindres que le coefficient angulaire de N_0S_1. Ce résultat, rapproché de la proposition précédemment démontrée, permet d'énoncer le théorème suivant :

Si le système appartient A LA PREMIÈRE CATÉGORIE, *le coefficient angulaire de la tangente à la ligne* N_0S *est, en chaque point de cette ligne, supérieur aux coefficients angulaires des tangentes à la ligne ascendante et à la ligne descendante qui passent au même point.*

Considérons maintenant un système de la *seconde catégorie*. La ligne des états naturels N_0N (fig. 8) descend de gauche à droite (*). Prenons un cycle isotherme infiniment petit dont le sommet inférieur S_0 corresponde à la valeur X_0 de X, et dont le sommet supérieur S_1 corresponde à une valeur X_1 de X, infiniment peu supérieure à X_0. N_0S_1 sera un élément de la ligne N_0S.

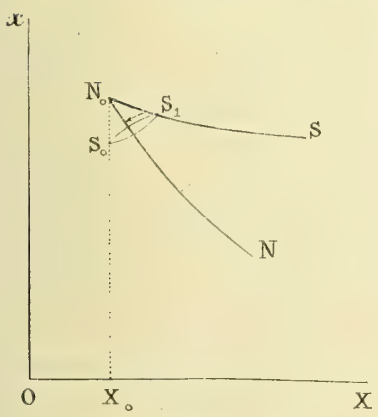


FIG. 8.

Le sommet inférieur S_0, devant être à gauche de la ligne des états naturels, sera au-dessous du point N_0; l'ascendante élémentaire S_0S_1 et la descendante élémentaire S_1S_0, qui sont sensiblement confondues, ont, au point S_1, des coefficients angulaires plus grands que le coefficient angulaire de N_0S_1. Ce résultat, rapproché

(*) Contrairement à ce que nous avions admis dans notre premier mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis*, mais conformément à ce qui a été indiqué à la fin de notre troisième mémoire; nous avons d'ailleurs repris cette question, sous une forme entièrement correcte, dans notre travail : *Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik; I. Die dauernden Aenderungen der Systeme, welche von einer einzigen normalen Veränderlichen abhängen.* (ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIKALISCHE CHEMIE, Bd. XXII, p. 545; 1897.)

de la proposition précédemment démontrée, permet d'énoncer le théorème suivant :

Si le système appartient à la SECONDE CATÉGORIE, *le coefficient angulaire de la tangente à la ligne* N_0S *est, en chaque point de cette ligne, inférieur aux coefficients angulaires des tangentes à la ligne descendante et à la ligne ascendante qui passent au même point.*

Prenons un point *a* sur la ligne X_1S_1. Faisons décroître l'action extérieure de X_1 à X_0 et faisons-la croître ensuite de X_1 à X_0; nous revenons au point *b*.

Si, pour une position donnée (arbitrairement d'ailleurs) du point a, *le point* b *est au-dessus du point* a, *le système appartient assurément à la première catégorie; si le point* b *est au-dessous du point* a, *le système appartient à la seconde catégorie.*

Supposons tout d'abord le point *b* au-dessus du point *a*. Faisons osciller l'action extérieure entre X_0 et X_1. Nous obtiendrons, sur la ligne X_1S_1, des points de plus en plus élevés $a, b, c, d, \ldots, l, m$, ayant pour limite le point S_1.

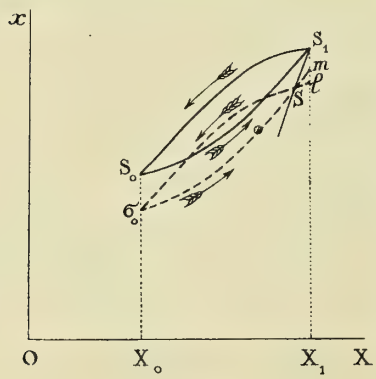


FIG. 9.

Nous pourrons nous arranger de telle sorte que les deux points *l*, *m* diffèrent aussi peu que nous voudrons du point S_1 (fig. 9); pour que, par conséquent, les deux lignes descendantes $l\sigma_0$, S_1S_0 diffèrent aussi peu que nous voudrons et qu'il en soit de même des deux lignes ascendantes $\sigma_0 m$, S_0S_1. Les deux lignes $l\sigma_0$, $\sigma_0 m$ se doivent alors couper en un point S, infiniment voisin du point S_1. Mais, le point *m* étant au-dessus du point *l*, nous savons que ce point de rencontre S doit être à gauche de la ligne X_1S_1. La ligne SS_1 a donc, au point S, une tangente dont le coefficient angulaire surpasse les coefficients angulaires des tangentes aux lignes S*l*, S*m*, ce qui ne se peut rencontrer qu'en un système de la première catégorie.

Supposons maintenant le point *b* au-dessous du point *a*.

A partir du point *a*, *redescendons*, jusqu'à la valeur X_0 de X, la ligne

ascendante qui aboutit en a; soit α_0 le point où elle rencontre la ligne $X = X_0$ (fig. 10); à partir du point α_0, *remontons* la ligne descendante qui passe par ce point; nous couperons la ligne $X = X_1$ en un point α. En continuant de la sorte, nous décrirons un trajet non réalisable $a\alpha_0\alpha\beta_0\beta$ ..... $\lambda\mu_0\mu$; mais le trajet inverse $\mu\mu_0\lambda$ ..... $\beta\beta_0\alpha\alpha_0 a a_0 b$ sera réalisable. Dans ce trajet, on rencontre deux points successifs, a, b, sur la ligne X_1S_1, qui sont tous deux au-dessous de S_1, et dont le second est au-dessous du premier; d'après ce que nous savons, il est nécessaire pour cela que tous les points $\mu\lambda$ ..... $\beta\alpha ab$, soient au-dessous du point S_1 et que chacun d'eux soit au-dessous de celui qui le précède.

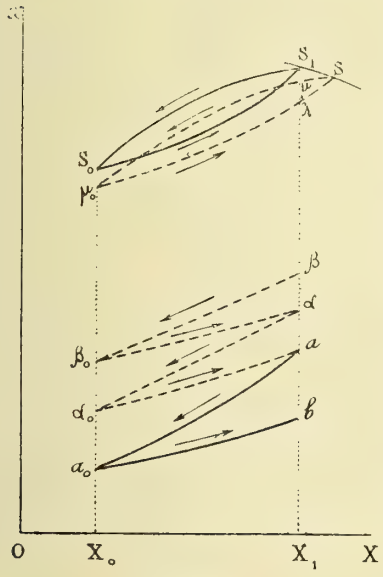


Fig. 10.

Inversement, chacun des points a, α, β, ..., λ, μ est au-dessus de celui qui le précède, tout en étant au-dessous du point S_1.

On démontrerait sans peine que les points a, α, β, ..., λ, μ, admettent pour point limite le point S_1.

On peut donc s'arranger pour que les deux points λ, μ, soient infiniment voisins du point S_1; la descendante $\mu\mu_0$ sera infiniment voisine de la descendante S_1S_0; l'ascendante $\mu_0\lambda$ sera infiniment voisine de l'ascendante S_0S_1; les deux lignes $\mu\mu_0$, $\mu_0\lambda$ se doivent donc couper en un point S, infiniment voisin du point S_1. Mais le point λ étant au-dessous du point μ, nous savons que ce point S doit se trouver à droite de la ligne X_1S_1. Dès lors, le coefficient angulaire de la tangente en S à la ligne S_1S sera inférieur aux coefficients angulaires des tangentes en S à l'ascendante $\mu_0\lambda$ et à la descendante $\mu\mu_0$ qui passent en ce point, ce qui ne peut arriver que pour un système de la seconde catégorie.

D'une manière analogue, nous pourrions démontrer les propositions suivantes :

Soit A *un point donné (arbitrairement d'ailleurs) sur la ligne* X_1S_1,

au-dessus de S_1 ; X *varie de* X_1 *à* X_0 *et revient de* X_0 *à* X_1 ; *on parvient à un point* B.

Si le point B *est au-dessous du point* A, *le système appartient à la seconde catégorie.*

Si le point B *est au-dessus du point* A, *le système appartient à la seconde catégorie.*

De ces diverses propositions, on peut, très aisément, déduire les théorèmes suivants :

Soit S_0S_1 *le cycle isotherme simple dont les deux sommets ont pour abscisses respectives* X_0, X_1. *Partant d'un point d'abscisse* X_1, *différent de* S_1, *on fait osciller une infinité de fois l'action extérieure entre les valeurs* X_1 *et* X_0.

Si le système appartient à la première catégorie, chaque retour de l'action extérieure à la valeur X_1 *amène le système à un état plus voisin de l'état* S_1, *et qui a pour limite l'état* S_1 *lorsque le nombre de ces retours croît indéfiniment ; la trajectoire du point figuratif du système tend vers le cycle* S_0S_1.

Si le système appartient à la seconde catégorie, chaque retour de l'action extérieure à la valeur X_1 *éloigne le système de l'état* S_1 ; *la trajectoire du point figuratif du système diffère de plus en plus du cycle* S_0S_1.

Nous désignerons la propriété que nous venons de reconnaître à un système de la première catégorie sous le nom de *stabilité du cycle isotherme limite* S_0S_1 *entre deux valeurs données* X_0, X_1 *de l'action extérieure.*

§ 2. — *Cycle isotherme décrit entre deux valeurs de la variable normale.*

Admettons maintenant, comme point de départ, les hypothèses suivantes :

On peut trouver un cycle isotherme simple dont le sommet inférieur et le sommet supérieur aient pour ordonnées respectives deux valeurs données x_0, x_1, *de la variable* x.

On n'en peut trouver qu'un seul.

Proposons nous de faire des propriétés de ce cycle une étude semblable à celle qui a été donnée, pour un cycle analogue, au § précédent.

Nous pourrons, tout d'abord, établir une série de propositions analogues à celles qui sont données au début du § précédent; les points a, b, c, ... devront seulement être pris à gauche du point S_1 et les points A, B, C, ... à droite du point S_1 (fig. 11); en outre, dans la désignation de la position relative de ces divers points, les mots *à gauche* et *à droite* devront être substitués aux mots *au-dessous* et *au-dessus*.

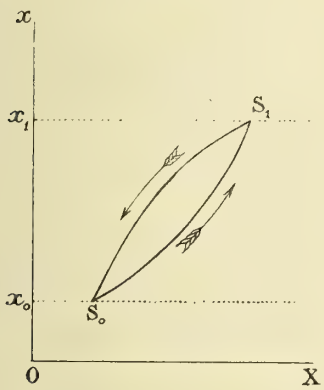


FIG. 11.

Ces propositions établies, nous aurons à considérer le lieu des sommets supérieurs des cycles dont les sommets inférieurs sont sur la ligne $x = x_0$.

Nous verrons sans peine que, pour une valeur donnée x de l'ordonnée, nous devons trouver sur cette ligne un point et un seul, puisqu'il doit exister un cycle simple et un seul dont les sommets aient pour ordonnées respectives x_0, x. En revanche, une valeur donnée de l'abscisse pourra correspondre à un ou plusieurs points de cette ligne ou encore ne correspondre à aucun point.

Soient : S, un point de cette ligne;

m, le coefficient angulaire de la tangente à cette ligne, en ce point;

α, le coefficient angulaire de la tangente à la ligne ascendante au point S;

β, le coefficient angulaire de la tangente à la ligne descendante au point S.

En nous appuyant sur les hypothèses énoncées au début du présent paragraphe, nous pourrons démontrer aisément la proposition suivante :

Le long de la ligne considérée, chacune des différences $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\beta}\right)$ garde un signe invariable.

Pour connaître ce signe, étudions la ligne considérée au voisinage de son point de départ, c'est-à-dire du point N_0 où la ligne des états naturels rencontre la ligne $x = x_0$.

Considérons un cycle infiniment petit dont le sommet inférieur S_0 ait pour

ordonnée x_0, tandis que l'ordonnée x_1 du sommet supérieur S_1 surpasse infiniment peu x_0.

La ligne ascendante S_0S_1 et la ligne descendante S_1S_0 ont des coefficients angulaires infiniment peu différents :

$$\alpha = \beta.$$

Le point S_0 doit être à gauche de la ligne des états naturels; par conséquent, à gauche du point N_0. Dès lors, deux cas peuvent se présenter :

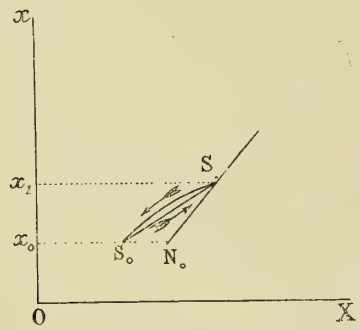


Fig. 12.

Premier cas. — La ligne N_0S_1 monte de gauche à droite (fig. 12); m est positif et supérieur à α et β, au point S_1, on a

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{\alpha} < 0, \qquad \frac{1}{m} - \frac{1}{\beta} < 0$$

Second cas. — La ligne N_0S_1 monte de droite à gauche (fig. 13); m est négatif; au point S_1, on a encore

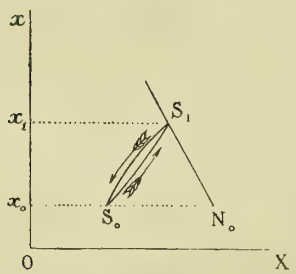


Fig. 13.

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{\alpha} < 0, \qquad \frac{1}{m} - \frac{1}{\beta} < 0.$$

Ces résultats rapprochés de la proposition démontrée il y a un instant, conduisent au théorème suivant :

A quelque catégorie que le système appartienne, les deux différences $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\beta}\right)$ sont négatives tout le long de la ligne considérée.

Ce théorème permettra alors d'établir, *pour les systèmes de l'une comme de l'autre catégorie,* la *stabilité du cycle isotherme simple décrit entre deux valeurs données de la variable* x.

§ 3. — *Cycles isobares.*

Des considérations analogues de tous points à celles que nous avons développées pour les cycles *isothermes,* décrits à température constante, sous une action extérieure variable, peuvent être répétées pour les cycles *isobares,* décrits sous une action extérieure constante, mais à une température variable. Nous ne développerons pas ici ces considérations; pour les déduire des précédentes, il suffit presque exclusivement de remplacer, dans les raisonnements, l'action extérieure X par la température T et inversement.

§ 4. — *Application des théorèmes précédents à divers faits d'expérience.*

Les cycles isothermes décrits entre deux valeurs données de l'action extérieure jouent un rôle capital dans les recherches de M. Ewing (*) sur l'hysteresis magnétique; une partie importante du mémoire de M. Ewing, qui a eu une si grande influence sur la théorie des modifications permanentes, est consacré à l'étude du cycle fermé que finit par décrire le point représentatif de l'état d'un aimant, lorsque l'action magnétisante oscille entre deux limites données.

Mais auparavant, la stabilité du cycle simple isotherme décrit entre deux limites données de l'action extérieure avait été reconnue par M. G. Wiedemann au cours de ses recherches classiques sur la torsion (**). Il faisait varier le couple de torsion entre O et une limite donnée, le ramenait à O, et recommençait un certain nombre de fois de suite cette opération; voici comment il en résume le résultat :

« Les torsions temporaires croissent alors, comme on l'avait déjà trouvé

(*) J.-A. Ewing, *Experimental researches in magnetism.* (London philosophical transactions, vol. CLXXVI, p. 523; 1885.)

(**) G. Wiedemann, *Ueber die Torsion.* (Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie, Bd. VI, p. 485; 1879.)

précédemment, lorsqu'on fait agir pour la première fois des poids croissants, d'abord lentement, puis plus rapidement jusqu'à une certaine valeur qui correspond au maximum de la charge. Lorsqu'on applique plusieurs fois de suite cette même charge maxima, cette valeur de la torsion croît d'abord rapidement, puis plus lentement et tend vers un certain maximum. »

« Les torsions permanentes se comportent d'une manière analogue... »

« On constate donc ici un résultat qui avait déjà été observé par l'application de torsions dirigées alternativement en deux sens opposés : les torsions limites temporaires que font prendre au fil des forces agissant alternativement en des sens opposés, se ressèrent de plus en plus lorsque l'on répète un certain nombre de fois l'opération de torsion; leur écart tend vers une valeur minima. »

Comme M. G. Wiedemann le rappelle dans le passage que nous venons de traduire, ses anciennes recherches sur la torsion et la flexion (1858-1859) avaient déjà mis en évidence l'existence du cycle limite que tend à décrire le point figuratif de l'état d'un corps, lorsque l'action extérieure à laquelle le corps est soumis oscille entre deux limites données. Thalèn (*) avait fait une observation analogue en étudiant la traction des fils métalliques.

Dans une importante série de recherches sur les déformations permanentes qu'engendrent la flexion et la torsion, M. Cantone (**) s'inspirant des

(*) Thalèn, *Poggendorff's Annalen*, Bd. CXXIV, p. 682; 1861. La première observation sur la formation d'un cycle isotherme fermé semble due aux ingénieurs français envoyés, vers 1825, au service de la Russie. Dans l'ouvrage publié à Saint-Pétersbourg en 1826-1827, dans le *Journal des Voies de communications*, sous le titre : *Mémoire sur l'emploi du fer dans les ponts suspendus*, et dû au lieutenant-colonel Henry, au colonel Traitteur, aux lieutenants Lamé et Clapeyron et au général Bazaine, on trouve les phrases suivantes (p. 35) :

1° Quand il y a eu allongement et reprise, ou que l'élasticité s'est manifestée, elle subsistera dans toutes les épreuves subséquentes;

2° Quand la reprise est totale, elle se maintiendra dans les essais suivants;

3° Lorsque l'allongement est plus grand que la reprise de l'expérience précédente, la reprise ne sera que partielle.

(**) Cantone, *Atti della reale Accademia dei Lincei*. Rendiconti, 5e sér., volume II, pp. 246, 295, 339 et 385; 1894. — Volume III, pp. 26 et 62; 1894. — Volume IV, pp. 437 et 488; 1895. L'idée de rapprocher les phénomènes d'*hysteresis* magnétique et les phénomènes d'*accomodation* élastique paraît avoir été émise pour la première fois par M. C. Barus, *The viscosity of solids*. (Bulletin of the United States geological Survey, n° 73, p. 92; 1891).

travaux antérieurs de M. G. Wiedemann et des recherches de M. Ewing sur l'hysteresis magnétique, a soumis des corps à l'influence d'actions extérieures oscillant entre des limites données. Il a retrouvé le cycle limite stable qu'annonce la théorie.

M. H. Bouasse (*), dans ses recherches sur la torsion, a énoncé non seulement une loi qui résulte de celle que nous avons établie au § 1, mais aussi (pp. 21 et 33) une loi qui rentre dans celle que nous avons établie au § 2. Malheureusement, il ne nous a pas été possible de reconnaître, à la lecture du mémoire de M. H. Bouasse, si cette seconde loi résultait de ses expériences, ou s'il était simplement amené à l'énoncer en se laissant guider par l'analogie avec la première loi, déjà établie avant lui, par les expériences de M. G. Wiedemann, de M. Thalèn et de M. Cantone.

Nous savons qu'un système de première catégorie, soumis à une action extérieure qui oscille de petites quantités autour d'une valeur donnée, et porté à une température physiquement constante, tend vers l'état naturel qui correspond à cette action et à cette température; au contraire, un système de seconde catégorie s'en éloigne. Ces théorèmes sont intimement liés à ceux que nous avons démontrés dans le présent Chapitre.

Ces propositions que nous venons de rappeler sont l'explication rationnelle des phénomènes que G. Wiedemann a nommés *Action des ébranlements* et que Streintz (**) a attribués plus tard à l'*Accomodation élastique*.

Il y a une infinité de manières de soumettre un corps à des ébranlements ou à des secousses; pour préciser le sens que nous donnerons ici à ce mot, nous supposerons que les secousses auxquelles le corps est soumis consistent en variations très petites de l'action extérieure autour d'une valeur moyenne constante. Nous voyons alors que les ébranlements ou secousses auront toujours pour effet de faire tendre le corps vers l'état naturel correspondant à l'action moyenne qu'il supporte, si ce corps est de la première catégorie.

Cela étant, supposons que le système, soumis à une action extérieure qui varie alternativement en deux sens opposés, entre deux limites données X_0, X_1,

(*) H. Bouasse, *Sur la torsion des fils fins*. Thèse soutenue le 8 janvier 1897 à la Faculté des sciences de Paris.

(**) Streintz, *Poggendorff's Annalen*, Bd. CLIII, p. 406; 1874.

soit arrivé à décrire le cycle stable S_0S_1 (fig. 14). Le système étant de la première catégorie, la ligne des états naturels N_0N_1 monte de gauche à droite; suivie dans le sens ascendant, elle rencontre d'abord en ν_0 la ligne ascendante S_0S_1, puis en ν_1 la ligne descendante S_1S_0. Si l'on soumet à des ébranlements le système pris en un point du parcours $\nu_0S_1\nu_1$, ces ébranlements auront pour effet de faire croître la variable x. Si l'on soumet à des ébranlements le même système, pris en un point du parcours $\nu_1S_0\nu_0$, ces ébranlements auront pour effet de faire décroître la variable x.

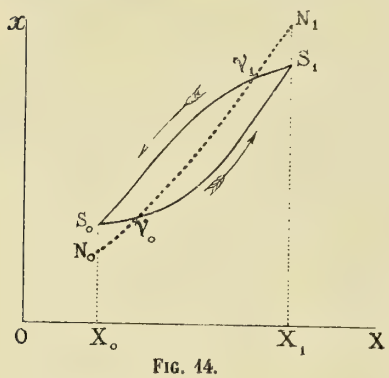


Fig. 14.

Ces deux effets de sens contraire des ébranlements avaient déjà été signalés par M. G. Wiedemann, qui résume ainsi ses observations (*) :

Pendant que s'exerce l'action qui tord un fil, des secousses augmentent la torsion temporaire.

Lorsque l'action qui produit la torsion est supprimée, des ébranlements diminuent au contraire la torsion permanente.

Lorsqu'un fil a été tordu, puis détordu, selon la grandeur de cette détorsion, les secousses font croître ou décroître la torsion du fil.

Imaginons, en particulier, que l'on soumette un système au cycle d'opérations que voici :

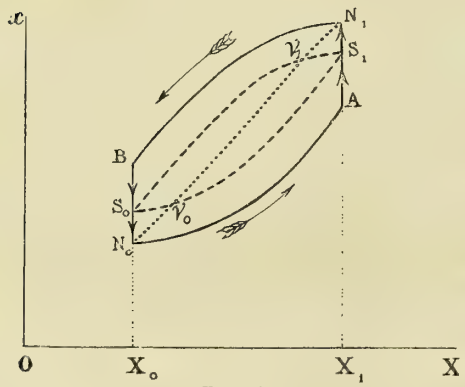


Fig. 15.

Pendant que le système est soumis à l'action X_0, il subit une longue série d'ébranlements; son état tend vers l'état naturel N_0 relatif à l'action X_0 (fig. 15); supposons les ébranlements assez nombreux pour que l'état N_0 soit atteint.

Faisons alors croître X de X_0 à X_1; le point figuratif suit la ligne ascendante N_0A.

(*) G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektricität*, Bd. III, p. 690; 1883.

L'action extérieure demeurant X_1, soumettons le système à des ébranlements, jusqu'à ce qu'il atteigne l'état naturel N_1, relatif à l'action X_1.

Faisons décroître X de X_1 à X_0; le point figuratif suit la ligne descendante N_1B.

Enfin, maintenant constante l'action X_0, par une série d'ébranlements, ramenons le système à l'état N_0.

Le système a ainsi décrit un cycle qui renferme à son intérieur le cycle S_0S_1 et a, par conséquent, une aire plus grande :

Ainsi, des ébranlements exercés seulement pendant que le système est soumis à l'action X_0 et à l'action X_1 ont pour effet d'accroître l'aire du cycle d'hysteresis décrit par le système entre les abscisses X_0X_1.

Il en sera tout autrement si les ébranlements se produisent pendant toute la durée du parcours du cycle; ils tendent alors à *écraser* le cycle sur la ligne des états naturels N_0N_1, d'autant plus complètement que, pendant que l'action extérieure subit une variation moyenne donnée, les ébranlements sont plus nombreux et plus amples.

Ces effets inverses des ébranlements selon qu'ils agissent uniquement aux extrémités du cycle ou tout le long du parcours du cycle ont été reconnus expérimentalement par M. Cantone (*).

Aucun moyen physique ne permet de maintenir rigoureusement invariable l'action extérieure qui s'exerce sur un système ou la température à laquelle il est porté. Tout séjour de longue durée sous l'influence d'une force en apparence constante et d'une température en apparence invariable doit être en réalité assimilé à une série de chocs de très petite amplitude, mais de très grande fréquence; il doit agir comme de tels ébranlements; si le système appartient à la première catégorie, un tel séjour doit le faire tendre vers l'état naturel; ainsi s'expliquent ces déformations en apparence spontanées, que des systèmes élastiques, abandonnés dans des conditions qui semblent

(*) Cantone, *Influenza delle scosse e della durata d'azione delle forze sui cicli di deformazione.* (Atti della reale Accademia dei Lincei. *Rendiconti*, 5e sér., vol. III, p. 26; 1894.)

invariables, éprouvent à la longue, déformations auxquelles M. Weber avait donné le nom d'*action élastique résiduelle* (*elastische Nachwirkung*).

C'est ainsi que, pour obtenir un cycle tel que $N_0AN_1BN_0$ (fig. 15), il n'est pas nécessaire de faire subir des ébranlements au système, pendant qu'il est soumis soit à l'action X_0, soit à l'action X_1 ; il suffit que l'influence de chacune de ces actions dure un certain temps. Si ce temps est considérable, on sera assuré que le premier sommet N_0 et le troisième sommet N_1 seront réellement des états naturels du système.

La confirmation de ces lois peut être tirée des expériences de M. Bouasse (*) sur la torsion des fils de platine. En faisant osciller le couple de torsion entre deux limites données, et en laissant durer un certain temps l'action de chacun des couples limites, M. Bouasse amène le point figuratif du système à décrire un cycle fermé; c'est ce que M. Bouasse appelle *fixer un parcours;* ce cycle fermé a la forme indiquée en la figure 15; les portions rectilignes AN_1, BN_0, sont d'autant plus courtes que la durée d'action de chacun des deux couples limites est plus courte.

Dans le cas où cette durée est fort longue, les deux états N_0, N_1 doivent être deux états naturels du système; voici comment les expériences de Bouasse permettent de vérifier ce dernier point :

Une valeur donnée de x correspond à un état naturel bien déterminé du système; soit Ξ la valeur de l'action correspondante; au point (x, Ξ), la tangente à la ligne ascendante et la tangente à la ligne descendante ont un même coefficient angulaire, fonction bien déterminée de x et de T, $\alpha(x, T)$; M. Bouasse introduit, dans ses recherches (**), une quantité qu'il désigne par $\Gamma(x, T)$ et nomme la *quantité caractéristique;* à la définition qu'il en donne, on reconnaît sans peine que

$$\Gamma(x, T) = \frac{1}{\alpha(x, T)}.$$

Or il résulte des expériences de M. Bouasse que si les deux actions X_0, X_1

(*) H. Bouasse, *loc. cit.*, p. 22.
(**) H. Bouasse, *loc. cit.*, p. 16.

ont agi pendant un temps considérable, la tangente en N_0 à la ligne ascendante N_0A et la tangente en N_1 à la ligne N_1A ont respectivement pour coefficient angulaire

$$\frac{1}{\Gamma(x_0, T)}, \qquad \frac{1}{\Gamma(x_1, T)}.$$

Tous les résulats expérimentaux que nous venons de mentionner s'accordent pleinement avec la théorie développée au début de ce Chapitre; mais si nous suivons la trajectoire par laquelle le point figuratif du système tend vers le cycle fermé qui lui sert de parcours limite, nous relevons, tant dans les expériences de M. Ewing que dans celles de M. Cantone et de M. Bouasse, de nombreux écarts par rapport à la théorie, écarts qui seront examinés plus loin. (Cinquième mémoire, Chapitre III, § 1.)

Quant aux cycles isobares décrits entre deux températures données, nous en avons trouvé de nombreux exemples dans notre mémoire sur les modifications du soufre. (Chapitre IV, § 5.)

§ 5. — *Influence de l'hysteresis sur les oscillations infiniment petites d'un système élastique.*

Parmi les méthodes qui ont servi à étudier les déformations permanentes d'un corps élastique, il convient de citer en particulier celle qui consiste à écarter ce corps de sa position d'équilibre et à étudier l'amortissement des oscillations exécutées par ce corps; cette méthode a été appliquée, en particulier, à l'étude de l'élasticité de torsion; il serait difficile de citer, tant elles sont nombreuses, toutes les recherches auxquelles cette méthode a donné lieu, depuis l'époque où Coulomb l'a appliquée pour la première fois.

Au point de vue théorique, cette méthode a donné lieu, pendant bien longtemps, à des interprétations erronées; on cherchait à expliquer l'amortissement des oscillations d'un fil tordu par une action retardatrice, analogue à la viscosité des fluides, à chaque instant proportionnelle à la vitesse du corps oscillant.

Des idées plus justes, touchant l'origine et la nature de l'amortissement

des vibrations des corps solides élastiques, ont été émises, d'une manière indépendante, d'une part par M. Carl Barus (*), d'autre part par M. Cantone (**); ces auteurs ont brièvement indiqué que l'amortissement des oscillations d'un fil tordu devait s'expliquer par la considération de cycles d'hysteresis.

Les théorèmes précédemment démontrés nous permettent de préciser les vues qu'ils ont émises, en nous attachant à étudier, non pas la loi suivant laquelle s'amortissent les oscillations du corps abandonné à lui-même, mais l'action extérieure qu'il faudrait exercer à chaque instant sur ce corps pour empêcher les oscillations de s'amortir.

Les oscillations d'un fil tordu étant celles qui ont donné lieu au plus grand nombre de recherches expérimentales, nous les prendrons pour exemple de notre analyse.

Soit donc un fil qui oscille sous l'action d'un couple extérieur dont le moment, à l'instant t, est $\mathrm{L}(t)$; soit, au même instant, ω l'angle de torsion; soit I le moment d'inertie du système oscillant; nous aurons (***), en supposant invariable la température du système :

$$(1). \quad \ldots \quad \left(\frac{d\mathrm{L}(t)}{dt} - \mathrm{I}\frac{d^3\omega}{dt^3}\right) dt = \frac{d^2\mathcal{F}(\omega)}{d\omega^2}\frac{d\omega}{dt}\,dt + f\left[\omega, \left(\mathrm{L} - \mathrm{I}\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)\right]|d\omega|.$$

C'est là l'équation du mouvement du système.

Proposons-nous en particulier, par un choix convenable de la fonction $\mathrm{L}(t)$, de faire exécuter au fil un mouvement pendulaire entre les valeurs α et $-\alpha$ de l'angle ω; si T est la période de ce mouvement, nous aurons :

$$(2) \quad \ldots \quad \omega = \alpha \cos 2\pi \frac{t}{\mathrm{T}}.$$

Considérons une oscillation complète, faisant partir ω de la valeur α et le

(*) Carl Barus, *The viscosity of solids.* (Bulletin of the United States geological Survey, n° 73, p. 92; 1891.)

(**) G. Cantone, *Sui cicli chiusi di deformazione e sull' attrito interno.* (Atti della reale Accademia dei Lincei. *Rendiconti*, 5e sér., vol. III, p. 66; 1894.)

(***) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* (Troisième mémoire, § 11.)

ramenant à la valeur α; soit, par exemple, l'oscillation produite entre $t = 0$ et $t = T$; calculons le travail effectué, pendant cette oscillation, par l'action régulatrice extérieure $L(t)$. Ce travail aura pour valeur

$$\mathfrak{C} = \int_0^T L(t) \frac{d\omega}{dt} dt.$$

Une intégration par parties permet de l'écrire

$$\mathfrak{C} = [L.\omega]_0^T - \int_0^T \omega \frac{dL(t)}{dt} dt.$$

Or, pour $t = 0$ et pour $t = T$, on a $\omega = \alpha$; si donc on pose

$$L(0) = L_0, \quad L(T) = L_1,$$

on aura

$$\mathfrak{C} = (L_1 - L_0)\alpha - \int_0^T \omega \frac{dL(t)}{dt} dt$$

ou bien, en vertu de l'égalité (1),

$$(3) \qquad \mathfrak{C} = (L_1 - L_0)\alpha - \int_0^T \left(I \frac{d^3\omega}{dt^3} + \frac{d^2\mathcal{F}(\omega)}{d\omega^2} \frac{d\omega}{dt} \right) \omega dt - \int \omega f \left[\omega, \left(L - I \frac{d^2\omega}{dt^2} \right) \right] |d\omega|.$$

Mais l'égalité (2) donne

$$\frac{d^3\omega}{dt^3} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{d\omega}{dt}.$$

On a donc

$$\int_0^T \left(I \frac{d^3\omega}{dt^3} + \frac{d^2\mathcal{F}(\omega)}{d\omega^2} \frac{d\omega}{dt} \right) \omega dt = \int_{+\alpha}^{+\alpha} \left(\frac{d^2\mathcal{F}(\omega)}{d\omega^2} - \frac{4\pi^2}{T^2} I \right) \omega d\omega = 0,$$

en sorte que l'égalité (3) peut s'écrire

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathfrak{C} = (L_1 - L_0)\alpha - \int \omega f \left[\omega, \left(L - I \frac{d^2\omega}{dt^2} \right) \right] |d\omega|.$$

Mais l'égalité (2) donne

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\alpha \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

et, par conséquent,

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left(\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)_{t=T} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\alpha.$$

Posons

$$\Omega = L - I\frac{d^2\omega}{dt^2},$$

$$\Omega_0 = L_0 - I\left(\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)_{t=0},$$

$$\Omega_1 = L_1 - I\left(\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)_{t=T}$$

et, en tenant compte des égalités (5), nous pourrons écrire l'égalité (4) sous la forme

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{C} = (\Omega_1 - \Omega_0)\alpha - \int \omega f(\omega, \Omega)\,|d\omega|.$$

Nous savons que l'on peut traiter le système comme si, à chaque instant t, il était maintenu en équilibre par le couple extérieur de moment Ω. Portons, en abscisse, la valeur de Ω à l'instant t et, en ordonnée, la valeur correspondante de ω. Lorsque t variera de 0 à $\frac{T}{2}$, le point figuratif décrira une descendante A_0B, les points A_0, B, ayant pour ordonnées respectives α et $-\alpha$; lorsque t variera de $\frac{T}{2}$ à T, le point figuratif décrira une ascendante BA_1, les points B, A_1, ayant pour ordonnées respectives $-\alpha$ et α. L'intégrale

$$\int \omega f(\omega, \Omega)\,|d\omega|$$

qui figure dans l'égalité (6) est censée prise le long du chemin A_0BA_1; mais on peut évaluer autrement cette intégrale; en effet, pour chaque élément du chemin A_0BA_1,

$$d\Omega = \frac{d^2\mathcal{F}(\omega)}{d\omega^2}\,d\omega + f(\omega, \Omega)\,|d\omega|$$

et, par conséquent,

$$\int_{A_0BA_1} \omega f(\omega, \Omega)\,|d\omega| = \int_{A_0BA_1} \omega d\Omega - \int_{A_0BA_1} \omega \frac{d^2\mathcal{F}(\omega)}{d\omega^2} d\omega.$$

Mais, au point A_1 comme au point B_1, $\omega = \alpha$. On a donc

$$\int_{A_0BA_1} \omega \frac{d^2\mathcal{F}(\omega)}{d\omega^2} d\omega = \int_{+\alpha}^{+\alpha} \omega \frac{d^2\mathcal{F}(\omega)}{d\omega^2} d\omega = 0$$

et l'égalité précédente devient

$$\int_{A_0BA_1} \omega f(\omega, \Omega)\,|d\omega| = \int_{A_0BA_1} \omega d\Omega,$$

en sorte que l'égalité (6) peut s'écrire :

$$\mathfrak{C} = (\Omega_1 - \Omega_0)\alpha - \int_{A_0BA_1} \omega d\Omega$$

ou encore

(7) . . . . . $\mathfrak{C} =$ aire $A_0BA_1A_0$,

en entendant que, dans le cas où l'aire $A_0BA_1A_0$ est formée de plusieurs boucles, l'aire d'une boucle est comptée positivement ou négativement selon que, dans le parcours $A_0BA_1A_0$, le contour de cette boucle est *sinistrorsùm* ou *dextrorsùm*.

Lorsque le nombre des oscillations croît au delà de toute limite, le parcours A_0BA_1 tend à se confondre avec le cycle isotherme simple dont les sommets ont pour ordonnées respectives $-\alpha$ et $+\alpha$. Si l'on se souvient que ce cycle est *sinistrorsùm*, on voit que l'on peut énoncer le théorème suivant :

Un fil tordu exécute des oscillations pendulaires, entre les angles de torsion $-\alpha$ et $+\alpha$, sous l'influence d'une action régulatrice extérieure; le travail effectué, pendant une oscillation, par l'action régulatrice, varie d'une oscillation à l'autre; lorsque le nombre des oscillations croît au delà de toute limite, ce travail tend vers une limite qui est l'aire $\mathfrak{A}(\alpha)$ du cycle

isotherme simple dont les sommets correspondent aux valeurs $-\alpha$ *et* $+\alpha$ *de l'angle de torsion.*

Comparons ce travail à celui qu'il faudrait effectuer pour entretenir les oscillations d'un système qui, livré à lui-même, exécuterait des oscillations pendulaires amorties par une viscosité proportionnelle à la vitesse angulaire $\frac{d\omega}{dt}$; en désignant par $-K\frac{d\omega}{dt}$ le moment de cette viscosité, l'action régulatrice devrait avoir pour moment $K\frac{d\omega}{dt}$; son travail pendant la durée d'une oscillation serait

$$\mathfrak{E}' = \int_0^T K\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 dt$$

ou bien, en vertu de l'égalité (2),

$$\mathfrak{E}' = \frac{4\pi^2}{T^2} K\alpha^2 \int_0^T \sin^2 2\pi \frac{t}{T}\, dt$$

ou enfin,

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{E}' = \frac{2\pi^2 K}{T^2}\alpha^2.$$

Ce travail ne varie pas, comme le précédent, d'une oscillation à une autre; il ne dépend que de l'amplitude des oscillations. Les lois des oscillations des corps élastiques doués de modifications permanentes diffèrent donc notablement des lois des oscillations des systèmes retardés par une viscosité.

Supposons que l'on n'exerce aucune action extérieure susceptible d'entretenir les oscillations du système doué de viscosité que nous venons de considérer; ce système exécuterait des oscillations pendulaires amorties de la forme :

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \omega = \alpha e^{-\lambda\frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

égalité dans laquelle le *décrément logarithmique* λ est donné par la formule

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{K}{2\pi I}.$$

ou encore, d'après l'égalité (8), par la formule

$$\lambda = \frac{T}{4\pi^3 I}\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha^2}, \qquad (10)$$

$\mathfrak{C}'$ étant le travail régulateur qui maintiendrait à l'amplitude la valeur α.

Il est clair que, lorsqu'on abandonne à lui-même un fil tordu doué d'hysteresis, les oscillations doivent s'amortir suivant une loi beaucoup plus compliquée que la précédente; il ne paraît guère possible de découvrir théoriquement la forme de cette loi; les expérimentateurs ont cherché à la représenter empiriquement, au moins pour les oscillations qui n'ont qu'une amplitude modérée, par une formule analogue à la formule (9).

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ les torsions maxima que le fil éprouve d'un côté déterminé de sa position d'équilibre, avant la première oscillation et après la première, la deuxième, ..., la n^e oscillation; remarquant que les passages de l'angle ω à deux valeurs successives α_n, α_{n+1} de cette série sont séparés par des intervalles de temps sensiblement invariables T, ils ont cherché à former une expression de la forme

$$\omega = \alpha_0 e^{-\mu(t)\frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T}, \qquad (11)$$

qui donne pour ω les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, lorsqu'on donne à t les valeurs T, 2T, ..., nT.

Supposons déterminé ce *décrément logarithmique variable* $\mu(t)$; il n'est pas illogique de supposer, au moins pour les oscillations qui s'amortissent lentement et pour lesquelles, par conséquent, α_{n+1} diffère très peu de α_n, que $\mu(n\mathrm{T})$ est lié au travail $\mathfrak{C}'$ qu'il faudrait effectuer, pendant le temps T, pour que les oscillations cessent de s'amortir et gardent la valeur α_n, par une relation analogue à la relation (10); ce qui revient à supposer que l'on a

$$\mu(n\mathrm{T}) = \frac{\mathrm{T}^3}{4\pi^3 \mathrm{I}}\frac{\text{aire } \mathrm{A}_n\mathrm{B}\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_n}{\alpha_n^2}, \qquad (12)$$

les deux points A_n, A_{n+1} étant sensiblement, par hypothèse, sur une même parallèle à OΩ.

En particulier, après une période de début plus ou moins longue, l'aire A_nBA_{n+1} doit différer très peu d'un cycle fermé et l'on doit avoir

$$(13) \quad \ldots \quad \mu(nT) = \frac{T^3}{4\pi^3 I} \frac{\mathfrak{A}(\alpha_n)}{\alpha_n^2}.$$

Les considérations qui nous ont amené à cette formule sont assurément bien problématiques; on peut penser cependant qu'elles s'écartent assez peu de la vérité pour fournir un moyen expérimental de connaître, sinon la valeur exacte, du moins l'ordre de grandeur de $\mathfrak{A}(\alpha)$; la formule (13) peut alors servir à interpréter les observations innombrables qui ont été faites touchant l'amortissement des oscillations des fils élastiques tordus.

On voit, en particulier, que, lorsque n croît indéfiniment, α_n tend vers 0; le fil tend vers l'état naturel relatif à un couple de torsion nul, état pris comme origine; l'aire $\mathfrak{A}(\alpha_n)$, dont les deux côtés tendent à devenir tangents entre eux, est telle que $\frac{\mathfrak{A}(\alpha_n)}{\alpha_n^2}$ tend vers 0. Lors donc que le nombre n des oscillations croît au delà de toute limite, $\mu(nT)$ tend vers 0.

Ces diverses considérations s'accordent pleinement avec celles que M. Cantone (*) a développées comme conséquences de l'expérience.

(*) G. Cantone, *Studio delle proprietà elastiche dei corpi fondato sull' uso contemporaneo dei metodi statico e dinamico.* (Atti della reale Accademia dei Lincei. *Rendiconti*, 5e sér., vol. IV, p. 488; 1895.)

CHAPITRE II.

DE LA RUPTURE DES CORPS ÉLASTIQUES.

§ 1. — *De la forme qu'affecte la ligne des états naturels dans un fil tendu.*

Nous avons examiné les propriétés des cycles limites pour un système qui est soit constamment de la première catégorie, soit constamment de la seconde catégorie. Mais il se peut qu'un même système appartienne tantôt à l'une, tantôt à l'autre catégorie. Nous allons en trouver un exemple en étudiant le cas d'un fil tendu par un poids. Nous avons déjà indiqué (*) comment le problème des déformations permanentes d'un tel fil pouvait être soumis à l'analyse.

Soient : L_0, la longueur du fil dans l'état initial;
L, la longueur du fil dans l'état actuel;
$l = \frac{L - L_0}{L_0}$, la dilatation linéaire;
Ω_0, la section initiale du fil;
P, le poids tenseur;
$\Theta = \frac{P}{\Omega_0}$, la tension par unité de section initiale du fil;
T, la température absolue.

Les déformations infiniment petites du cylindre tendu seront régies par l'égalité

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ d\Theta = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(l, T)}{\partial l^2} dl + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(l, T)}{\partial l \partial T} dT + f(l, \Theta, T)\,|dl|.$$

(*) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* (Premier mémoire, p. 38.)

$\mathcal{F}(l, T)$ est le potentiel thermodynamique interne de la masse du cylindre qui, dans l'état initial, a un volume égal à l'unité.

L'équation

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(l, \Theta, T) = 0$$

définit les *états naturels* du système.

Nous supposerons que l'on ait pris pour état initial l'état naturel correspondant, à une certaine température T_0, à la tension nulle $\Theta = 0$. On aura alors

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(0, 0, T_0) = 0.$$

Nous nous proposons, en particulier, d'étudier les phénomènes que l'on peut observer à la température constante T_0. Nous prendrons deux axes de coordonnées rectangulaires; sur l'axe des abscisses, nous porterons les tensions Θ, sur l'axe des ordonnées, les dilatations l; l'équation

$$(2^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(l, \Theta, T_0) = 0$$

représentera une ligne, la *ligne des états naturels relatifs à la température* T_0; d'après l'égalité (3), cette ligne passera par l'origine des coordonnées.

Nous avons vu (*) que, pour un système de la *première catégorie*, caractérisé par la *stabilité des états naturels*, $f(l, \Theta, T)$ est positif à gauche de la ligne des états naturels et négatif à droite.

Nous avions énoncé, dans notre premier Mémoire, que l'inverse devait avoir lieu pour les systèmes de la *seconde catégorie*, caractérisés par *l'instabilité des états naturels;* mais, pour parvenir à cette proposition, nous nous étions appuyés sur cette supposition, que les états naturels, aussi bien pour les systèmes de la deuxième catégorie que pour les systèmes de la première catégorie, suivaient la loi du déplacement isothermique de l'équilibre; une étude plus profonde des modifications permanentes nous a montré plus

(*) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* (Premier mémoire. Chap. I, § 4.)

tard (*) que cette supposition, exacte pour les systèmes de la première catégorie, doit être renversée pour les systèmes de la seconde catégorie. On peut alors, en reprenant les démonstrations données dans notre premier Mémoire, montrer que :

Aussi bien pour un système de la seconde catégorie que pour un système de la première catégorie, la fonction $f(l, \Theta, T)$ *est positive à gauche de la ligne des états naturels et négative à droite.*

Les systèmes dont nous avons discuté en détail les déformations permanentes dans nos études précédentes appartenaient, en toutes circonstances, à une même catégorie; tous leurs états naturels étaient stables, ou bien, au contraire, tous leurs états naturels étaient instables; mais cette supposition n'a rien de forcé; on pourrait fort bien rencontrer des systèmes dont certains états naturels seraient stables et certains autres instables, et ce sont précisément des systèmes de ce genre que nous allons étudier.

Les états naturels stables obéissent à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre; les points qui les représentent se trouvent donc sur une portion de la ligne des états naturels qui monte de gauche à droite. Au contraire, les états naturels instables sont soustraits à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre; les points qui les représentent se trouvent sur une portion de la ligne des états naturels qui monte de droite à gauche.

Le passage de l'une des catégories d'états naturels à l'autre se fait par un certain *état naturel de passage;* d'après ce que nous venons de dire, l'état naturel de passage est représenté soit par un point où l'ordonnée de la ligne des états naturels passe par un maximum ou un minimum, soit par un point où l'abscisse de la ligne des états naturels passe par un maximum ou un minimum.

Mais, si l'ordonnée de la ligne des états naturels passait par un maximum ou un minimum, on ne pourrait dire que cette ligne partage le plan en deux

(*) *Sur les déformations permanentes de l'hysteresis.* (Troisième mémoire : *Théorie générale des modifications permanentes.* Conclusion.) — Voyez également le remaniement de notre premier mémoire, publié sous le titre : *Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik;* I. *Die dauernden Aenderungen der Systeme, welche von einer einzigen normalen Veränderlichen abhängen.* (Zeitschrift für physikalische Chemie, Bd. XXII, p. 545; 1897.)

régions, dont l'une est située à sa droite et l'autre à sa gauche; la même région du plan pourrait être dite à droite ou à gauche de la ligne des états naturels, selon que l'on considérerait une portion de cette ligne ou une autre. Le théorème précédemment énoncé sur le signe de la fonction $f(l, \Theta, T)$ deviendrait contradictoire. *La ligne des états naturels ne peut donc présenter d'ordonnée maxima ou minima.* On ne pourrait, par exemple, supposer que les états naturels sont stables pour une valeur de Θ inférieure à une certaine limite, et instables lorsque la valeur de Θ surpasse cette limite.

Il n'y a, au contraire, aucune contradiction, à admettre que la ligne des états naturels présente une abscisse maxima ou minima.

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent encore s'énoncer de la manière suivante :

Pour une valeur donnée de la dilatation, il ne peut exister plus d'un état naturel; mais, pour une valeur donnée de la tension, il peut exister plusieurs états naturels, alternativement stables et instables.

Nous pourrons donc, sans aucune contradiction, nous placer dans l'hypothèse suivante, dont nous allons discuter les conséquences :

Les états naturels du système sont stables pour toutes les valeurs de la dilatation inférieures à une certaine limite $\lambda(T_0)$, *qui dépend de la température* T_0, *et instables pour toutes les valeurs de la dilatation qui surpassent* $\lambda(T_0)$.

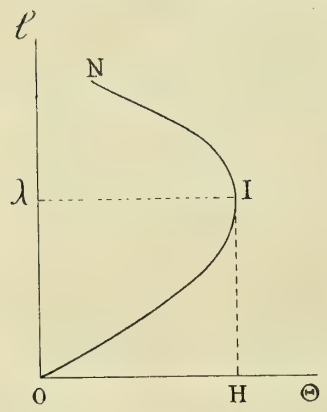


Fig. 16.

D'après ce que nous venons de dire, la ligne des états naturels, partant de l'origine O (fig. 16), monte de gauche à droite, tant que l est inférieur à $\lambda(T_0)$. Pour $l = \lambda(T_0)$, elle présente un point I d'abscisse maxima; cette abscisse maxima $H(T_0)$ est donnée par l'équation

$$(4) \quad \ldots \quad f[\lambda(T_0), H(T_0), T_0] = 0.$$

A partir du point I, la ligne des états naturels monte de droite à gauche suivant la droite IN.

A chaque valeur de la tension inférieure à $H(T_0)$ correspondent deux états naturels : celui qui offre la moindre dilatation est stable, l'autre est instable. Aux valeurs de la tension qui surpassent $H(T_0)$ ne correspondent plus d'états naturels.

La fonction $f(l, \Theta, T)$ est positive à gauche de la ligne des états naturels, c'est-à-dire dans la région lOIN ; dans cette région, le coefficient angulaire des lignes ascendantes est inférieur au coefficient angulaire des lignes descendantes.

La fonction $f(l, \Theta, T)$ est négative à droite de la ligne des états naturels, c'est-à-dire dans la région ΘOIN ; dans cette région, le coefficient angulaire des lignes ascendantes est supérieur au coefficient angulaire des lignes descendantes.

Dès lors, trois cas sont à distinguer lorsque l'on se propose d'étudier les phénomènes présentés par un fil que l'on maintient à une température sensiblement constante et que l'on soumet à une tension sensiblement constante :

Premier cas. — *Le point représentatif de l'état initial* (l_0, Θ_0, T_0) *du fil est dans la région* lOIN.

La fonction $f(l, \Theta, T)$ étant positive dans ces conditions, les oscillations très petites et inévitables de la température et de la tension font décroître sans cesse la longueur du fil ; l diminue et tend vers une limite parfaitement déterminée qui est l'ordonnée du point d'abscisse Θ_0 sur la branche de courbe OI ; cette limite est d'autant plus grande, pour une température donnée, que la tension est plus élevée.

Deuxième cas. — *Le point figuratif de l'état initial* (l_0, Θ_0, T_0) *du fil est dans la région* OHI.

La fonction $f(l, \Theta, T)$ étant négative dans ces conditions, les oscillations très petites et inévitables de la température et du poids tenseur feront croître sans cesse la longueur du fil ; l augmentera et tendra vers une limite parfaitement déterminée, savoir l'ordonnée du point d'abscisse Θ_0 sur la branche de courbe OI ; cette limite sera d'autant plus grande que, pour une température donnée, que la tension Θ_0 sera elle-même plus grande.

Troisième cas. — *Le point figuratif de l'état initial* (l_0, Θ_0, T_0) *du fil est dans la région* ΘHIN.

La fonction $f(l, \Theta, T)$ est encore négative dans ces conditions; les oscillations très petites et inévitables de la température et du poids tenseur feront croître sans cesse la longueur du fil; l augmentera sans cesse.

La dilatation l tendra-t-elle vers une limite supérieure lorsque le nombre des petites oscillations de la température et de la tension croîtront indéfiniment? Évidemment non, car cette limite supérieure serait un état naturel et lorsque, à partir du point initial (l_0, Θ_0), on s'élève sur une parallèle à Ol, on ne peut rencontrer la ligne des états naturels.

Donc, *dans ce cas, les petites oscillations inévitables de la température et du poids tenseur feront croître au delà de toute limite la dilatation longitudinale du fil.*

Il est aisé de réaliser expérimentalement les conditions auxquelles se rapportent les deux premiers cas.

Prenons, comme état origine, un état naturel, par exemple l'état naturel correspondant à la charge O; à partir de cet état, faisons croître graduellement la charge jusqu'à une valeur Θ, inférieur à H. Les lignes ascendantes traversant de gauche à droite la ligne des états naturels, le point figuratif suivra la ligne ascendante OM (fig. 17) située au-dessous de la ligne OI.

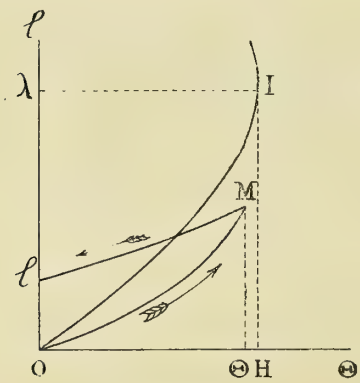


Fig. 17.

Faisons ensuite décroître la charge de manière à faire décrire au point figuratif la ligne descendante Ml; cette ligne sera, nous le savons, au-dessus de MO; elle viendra couper l'axe Ol en un point d'ordonnée positive l; Ol sera la dilatation permanente produite par cette charge du fil, suivie de décharge complète du même fil.

Le point M sera évidemment dans la position où doit se trouver le point (l_0, Θ_0, T_0) pour que les conditions soient celles qui correspondent au second cas. Le point l se trouve évidemment dans la position du point (l_0, Θ_0, T_0) qui caractérise le premier cas.

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

On prend un fil dans l'état naturel qui correspond à une charge nulle; on le charge modérément; la dilatation observée dans les premiers instants de la charge se met à croître, si l'on maintient le fil chargé; elle croît de plus en plus lentement jusqu'à une limite supérieure, d'autant plus différente de la dilatation initiale que la charge est plus grande.

On prend un fil semblable; on le soumet à une charge modérée, puis on le décharge; on observe une dilatation rémanente, d'autant plus grande que la charge imposée était plus grande; cette dilatation rémanente diminue avec le temps; elle tendrait à disparaître complètement si l'on abandonnait le fil pendant un temps illimité aux petites oscillations des conditions extérieures.

Ces propositions ne font qu'énoncer des faits très connus, maintes fois observés dans l'étude de la traction; les dilatations et contractions variables avec le temps dont elles font mention sont celles que W. Weber avait observées et qu'il avait attribuées à l'*elastische Nachwirkung*.

On se trouvera toujours dans les conditions qui définissent le troisième cas, si le fil supporte une charge suffisamment grande; ou bien encore si le fil, bien que soumis à une charge modérée, a subi une déformation très grande. Dans ce cas, comme nous le verrons plus complètement au § 3, les petites oscillations de la température et du poids tenseur finiront toujours par produire la *rupture* du fil. Mais avant d'analyser ce phénomène de la rupture, il nous faut étudier l'effet produit sur un fil tendu par les variations cycliques de la charge.

§ 2. — *De l'effet que produit, sur un fil tendu, une variation cyclique de la charge.*

Imaginons que la charge portée par un fil tendu, partant de la valeur inférieure P_0, s'élève jusqu'à la valeur supérieure P_1, pour revenir ensuite à la valeur P_0 et ainsi de suite; Θ oscillera entre la valeur inférieure $\Theta_0 = \frac{P_0}{\Omega_0}$ et la valeur supérieure $\Theta_1 = \frac{P_1}{\Omega_0}$. Que savons-nous au sujet de la trajectoire suivie par le point figuratif du système?

Le cas le plus simple qui se puisse présenter est le suivant :

Premier cas. — *La limite inférieure* Θ_0 *de la tension est supérieure à* H. Dans ce cas, la trajectoire du point figuratif est tout entière à droite de la ligne des états naturels OIN. Le coefficient angulaire de la ligne ascendante étant, en chaque point, supérieur au coefficient angulaire de la ligne descendante qui passe au même point, la trajectoire du point figuratif aura la forme de la ligne $A_0A_1B_0B_1C_0C_1$ ..... que représente la figure 18. Les points A_0, B_0, C_0, ... formeront une suite de points s'élevant sans limite sur la ligne $\Theta = \Theta_0$; les points A_1,B_1,C_1, ... formeront, eux aussi, une suite de points s'élevant sans limite sur la ligne $\Theta = \Theta_1$.

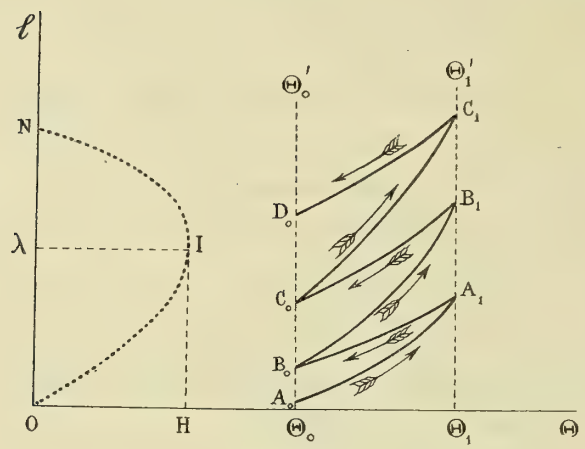


Fig. 18.

Une discussion plus approfondie est nécessaire dans le cas suivant :

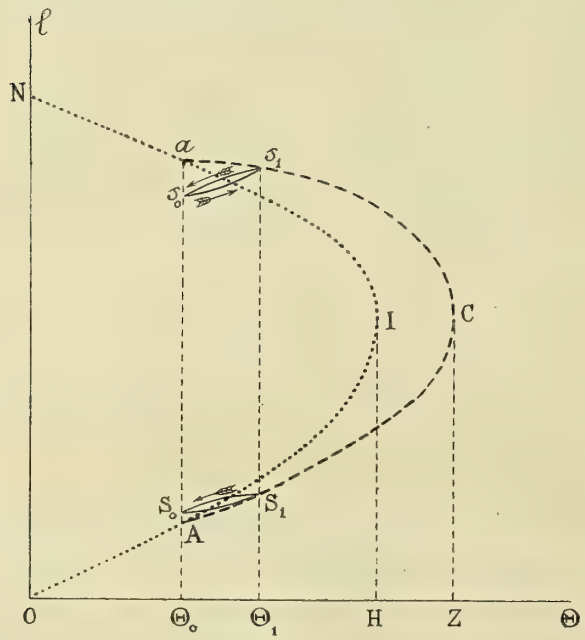


Fig. 19.

Second cas. — *La limite inférieure* Θ_0 *est inférieure à* H.

Ce cas devra être subdivisé en deux cas secondaires qui nous seront suggérés par l'étude des cycles isothermes simples dont le sommet inférieur a pour abscisse la valeur, donnée une fois pour toutes, Θ_0 de Θ. Considérons (fig. 19) la ligne $\Theta_0\Theta_0'$ qui est définie par l'équation $\Theta = \Theta_0$.

Elle rencontre sûrement en un point A la branche OI de la ligne des états naturels ; si l'excès $(H - \Theta_0)$ n'est pas trop grand, elle rencontre sûrement en un second point a la branche IN de la ligne des états naturels ; nous discuterons seulement le cas où il en est ainsi, laissant au lecteur le soin de modifier la discussion dans le cas où le point a n'existerait pas.

Autour de tout point de la ligne des états naturels, on peut tracer un cycle fermé infiniment petit. Si donc nous prenons une valeur Θ_1 de Θ, surpassant infiniment peu Θ_0, nous trouverons deux cycles fermés simples S_0S_1, s_0s_1, dont le sommet inférieur ait pour abscisse Θ_0 et le sommet supérieur ait pour abscisse Θ_1. Nous pouvons dès lors énoncer la proposition suivante :

Pourvu que la différence $(\Theta_1 - \Theta_0)$ *ne surpasse pas une certaine limite, il existe assurément deux cycles isothermiques simples et deux seulement dont le sommet inférieur ait pour abscisse* Θ_0 *et dont le sommet supérieur ait pour abscisse* Θ_1.

Nous admettrons qu'*il existe au plus deux cycles fermés simples dont les sommets aient pour abscisses deux valeurs données* Θ_0, Θ_1, *de* Θ.

La limite inférieure Θ_0 étant donnée, si l'on fait croître la limite supérieure Θ_1, trouvera-t-on toujours un cycle simple compris entre les limites Θ_0, Θ_1, ou bien peut-il arriver qu'il n'y ait aucun cycle compris entre ces limites ? Nous ferons évidemment l'hypothèse la plus générale en admettant que, *pour toute valeur de* Θ_1 *inférieure à une limite* Z, *fonction de* Θ_0, *il existe deux cycles simples compris entre les limites* Θ_0, Θ_1, *tandis que pour toute valeur de* Θ_1 *supérieure à* Z, *il n'existe aucun cycle simple compris entre les limites* Θ_0, Θ_1. — Dans le cas où, quel que soit Θ_1, il existerait deux cycles compris entre les limites Θ_0, Θ_1, il suffira, dans ce qui va suivre, de regarder Z comme rejeté en dehors du champ des valeurs accessibles de Θ.

Par raison de continuité, *il existe un cycle fermé simple et un seul décrit entre les limites* Θ_0 *et* Z.

Considérons le lieu des sommets supérieurs des cycles simples dont le sommet inférieur a pour abscisse Θ_0. Sur toute ligne $\Theta = \Theta_1$, où Θ_1 a une valeur inférieure à Z, se trouvent deux points de ce lieu, qui est ainsi formé de deux branches, l'une issue du point A, l'autre du point a. Ces deux

branches se réunissent en un point C, d'abscisse Z. Sur toute ligne $\Theta = \Theta_1$, où Θ_1 a une valeur supérieure à Z, ne se trouve aucun point du lieu.

On sait qu'au sommet supérieur de tout cycle fermé simple, la ligne ascendante a un coefficient angulaire plus grand que la ligne descendante; ce sommet est donc forcément dans la région située à droite de la ligne des états naturels; d'où la proposition suivante :

La ligne ACa *est en entier en dehors de la ligne* AIa.

Cette proposition entraîne cette autre :

Quel que soit Θ_0, *la valeur* Z *de* Θ *surpasse la valeur* H *de la même variable.* Il est d'ailleurs évident que *lorsque* Θ_0 *tend vers* H, Z *tend également vers* H.

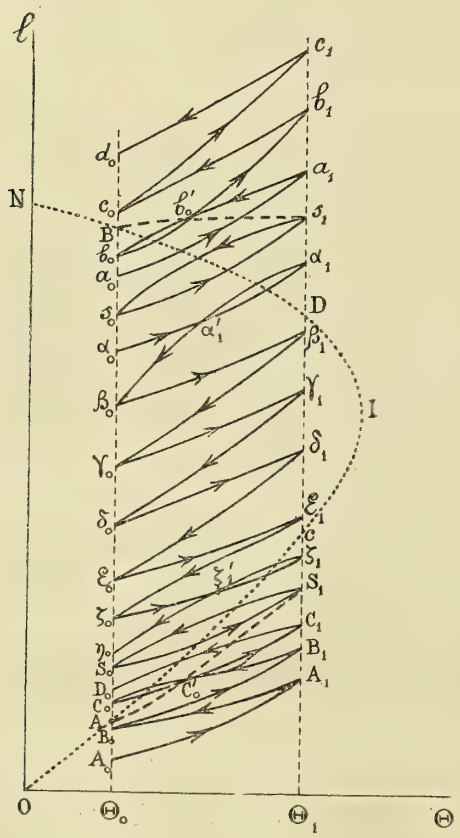


Fig. 20.

Il nous est maintenant possible de subdiviser notre second cas en deux sous-cas, selon que la limite supérieure Θ_1 des valeurs entre lesquelles oscille la tension est inférieure ou supérieure à Z.

Premier sous-cas. — *La limite supérieure* Θ_1 *des valeurs entre lesquelles oscille la tension est moindre que la valeur de* Z *qui correspond à la limite inférieure* Θ_0.

On pourra, dans ce cas, au moyen de raisonnements semblables de tout point à ceux qui ont été exposés au chapitre précédent, obtenir les résultats suivants :

Θ_0 est la valeur initiale de la tension. On fait osciller indéfiniment la tension entre Θ_0 et Θ_1.

Soient S_0S_1, s_0s_1 (fig. 20) les deux cycles fermés simples qui peuvent être décrits entre les tensions Θ_0, Θ_1.

1° *Le point figuratif initial* A_0 *est au-dessous de* S_0.

Le point figuratif décrit une trajectoire telle que $A_0A_1B_0B_1C_0C_1D_0$ .....

Les points A_0, B_0, C_0, D_0, ... sont situés les uns au-dessus des autres sur la droite $\Theta = \Theta_0$. Ils admettent pour point limite le point S_0; le point figuratif tend à décrire le cycle S_0S_1.

Considérons un des points A_0, B_0, ... qui soit situé au-dessous du point A où la ligne $\Theta = \Theta_0$ rencontre la ligne OIN des états naturels, le point B_0 par exemple; la ligne descendante A_1B_0 et la ligne ascendante B_0B_1 qui sont issues de ce point ne peuvent se rencontrer entre les lignes $\Theta = \Theta_0$ et $\Theta = \Theta_1$, car elles formeraient un cycle fermé que ne couperait pas la ligne des états naturels.

Considérons, au contraire, un point C_0 compris entre le point A et le point S_0. La ligne descendante B_1C_0 et la ligne ascendante C_0C_1 qui se rencontrent en ce point se coupent assurément en un autre point C_0' entre les lignes $\Theta = \Theta_0$ et $\Theta = \Theta_1$.

2° *Le point initial* α_0 *est entre les points* s_0, S_0.

Le point figuratif décrit une trajectoire telle que $\alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1\gamma_0\gamma_1\delta_0\delta_1\varepsilon_0\varepsilon_1\zeta_0\zeta_1\eta_0$ .....

Les points α_0, β_0, γ_0, δ_0, ε_0, ζ_0, η_0, ... sont tels que chacun d'eux est plus bas que celui qui le précède. Ces points admettent pour point limite le point S_0. Le point figuratif tend à décrire le cycle S_0S_1.

Si Θ_1 est inférieur à H, la ligne $\Theta = \Theta_1$ rencontre la ligne des états naturels en deux points C, D, situés entre les deux points S_1 et s_1. Si Θ_1 est compris entre H et Z_1, la ligne $\Theta = \Theta_1$ ne rencontre plus la ligne des états naturels.

Supposons, tout d'abord, Θ_1 inférieur à H. Considérons un point, tel que α_1, compris entre les points s_1 et D. La ligne ascendante $\alpha_0\alpha_1$ et la ligne descendante $\alpha_1\beta_1$, qui se coupent en ce point, se coupent en un second point α_1' compris entre les lignes $\Theta = \Theta_0$ et $\Theta = \Theta_1$.

Considérons un point, tel que γ_1, compris entre les points C et D. La ligne ascendante $\gamma_0\gamma_1$ et la ligne descendante $\gamma_1\delta_0$, qui se coupent en ce point, ne se rencontrent en aucun autre point situé entre les lignes $\Theta = \Theta_0$ et $\Theta = \Theta_1$.

Considérons enfin un point, tel que le point S_1, compris entre le point S_1

et le point C. La ligne ascendante $\zeta_0\zeta_1$ et la ligne descendante $\zeta_0\eta_0$, qui se coupent en ce point, se coupent forcément en un autre point ζ_1' compris entre les lignes $\Theta = \Theta_0$ et $\Theta = \Theta_1$.

Supposons maintenant Θ_1 compris entre H et Z. Une ascendante et une descendante qui se coupent en un point de la ligne $\Theta = \Theta_1$ compris entre le point S_1 et le point s_1 se couperont forcément en un autre point situé entre les lignes $\Theta = \Theta_0$ et $\Theta = \Theta_1$.

3° *Le point initial* a_0 *est au-dessus du point* s_0.

Le point figuratif décrit une trajectoire telle que $a_0a_1b_0b_1c_0c_1d_0$ ...

Chacun des points a_0, b_0, c_0, d_0, ... est au-dessus de celui qui le précède.

Considérons un point, tel que le point b_0, compris entre les points s_0 et le point B où la ligne $\Theta = \Theta_0$ rencontre pour la seconde fois la ligne des états naturels.

La ligne descendante a_1b_0 et la ligne ascendante b_0b_1, qui se rencontrent en ce point, se rencontrent en un autre point b_0' situé entre les lignes $\Theta = \Theta_0$ et $\Theta = \Theta_1$.

Considérons, au contraire, un point, tel que le point c_0, situé au-dessus du point B; la ligne descendante b_1c_0 et la ligne ascendante c_0c_1, qui se rencontrent en ce point, ne peuvent se rencontrer en aucun autre point entre les lignes $\Theta = \Theta_0$ et $\Theta = \Theta_1$.

En résumé, *le cycle* S_0S_1 *est un cycle limite stable et le cycle* s_0s_1 *est un cycle limite instable.*

Deuxième sous-cas. — *La limite supérieure* Θ_1 *des valeurs entre lesquelles oscille la tension est supérieure à la valeur de* Z *qui correspond à la limite inférieure* Θ_0.

Pour discuter ce cas, remarquons tout d'abord que des démonstrations semblables à celles qui ont été données au Chapitre I[er] permettent d'établir les théorèmes suivants :

En tout point de la branche AC (fig. 21) *de la ligne* ACB, *cette ligne, suivie de* A *vers* C, *monte plus rapidement que la ligne ascendante et la ligne descendante qui passent en ce point.*

En tout point de la branche BC *de la ligne* ACB, *cette ligne, suivie de* B *vers* C, *monte moins rapidement que la ligne ascendante et la ligne descendante qui passent par ce point.*

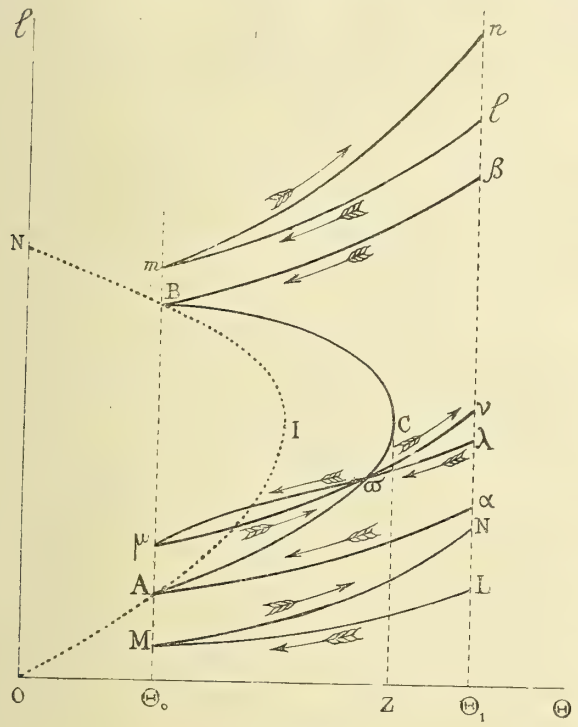


Fig. 21.

Soient αA, βB les lignes descendantes qui passent respectivement par les points A et B; α, β, les points de départ de ces descendantes sur la ligne $\Theta = \Theta_1$. On peut évidemment énoncer la proposition suivante :

Une ascendante issue d'un point situé, sur la ligne $\Theta = \Theta_0$, au-dessous du point A ou au-dessus du point B; une descendante issue d'un point situé, sur la ligne $\Theta = \Theta_1$, au-dessous du point α ou au-dessus du point β, ne rencontrent pas la ligne ACB.

Une ascendante issue d'un point situé, sur la ligne $\Theta = \Theta_0$, entre les points A et B; une descendante issue d'un point situé, sur la ligne $\Theta = \Theta_1$, entre les points α et β, rencontrent une et une seule fois la ligne ACB.

Ces préliminaires posés, nous allons prouver que *si le point figuratif du système part d'une position initiale sur la ligne* $\Theta = \Theta_1$, *lorsqu'on fait décroître la tension jusqu'à la valeur* Θ_0 *pour la ramener ensuite à la valeur* Θ_1, *le point figuratif arrive à une position finale qui est toujours au-dessus de sa position initiale.*

Supposons, en premier lieu, la position initiale L située au-dessous du point α; lorsque Θ décroît de Θ_1 à Θ_0, le point figuratif suit la ligne descendante LM; cette ligne ne pouvant rencontrer la ligne AC, le point M est au-dessous du point A; la ligne ascendante MN issue de ce point a donc, au point M, un coefficient angulaire plus grand que la descendante

LM; d'ailleurs, la ligne MN ne peut rencontrer la ligne LM entre les points L et M, car, par définition même de la ligne AC, le point de rencontre devrait appartenir à la ligne AC que ne rencontrent ni la ligne LM ni la ligne MN; la ligne MN rencontre donc la ligne $\Theta = \Theta_1$ en un point N situé au-dessus du point L.

Supposons, en second lieu, la position initiale λ située entre les points α et β. La ligne descendante $\lambda\mu$ rencontrera forcément en un et un seul point ϖ la ligne ACB; le point μ sera forcément entre les points A et B; l'ascendante $\mu\nu$ issue du point μ aura dès lors en μ un coefficient angulaire plus petit que la descendante $\lambda\mu$; mais elle coupera forcément en ϖ la droite $\lambda\mu$, en sorte qu'elle rencontrera encore la droite $\Theta = \Theta_1$ en un point ν situé au-dessus du point λ. Dans ce cas, la trajectoire $\lambda\mu\nu$ du point figuratif présentera une boucle $\mu\varpi$.

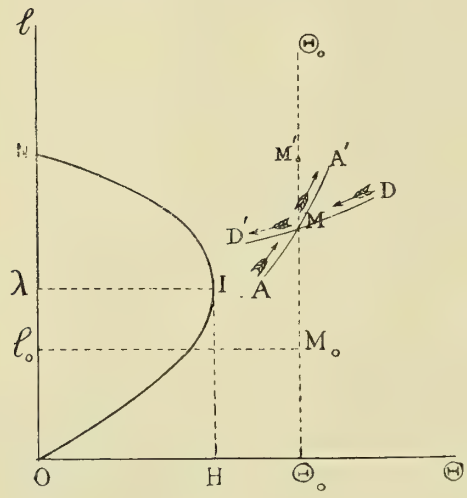


Fig 22.

Supposons enfin la position initiale l du point figuratif située au-dessus du point β; en raisonnant comme dans le cas où cette position était au-dessous du point α, nous verrons que le trajet lmn du point figuratif ne présente aucune boucle et ramène le point figuratif dans une position n plus élevée que la position initiale.

Ainsi, *dans ce cas, le fil soumis à une tension qui oscille indéfiniment entre les deux limites* Θ_0, Θ_1, *s'allonge sans cesse.*

§ 3. — *De la rupture d'un fil tendu.*

Revenons maintenant au cas d'un fil dont l'état initial est représenté par un point $M_0(\Theta_0, l_0)$ situé à droite de la ligne HIN (fig. 22); nous avons déjà considéré brièvement ce cas au § 1; nous avons vu que si la tension à laquelle ce fil est soumis subissait de petites variations autour de la valeur

moyenne invariable Θ_0 et que si la température subissait seulement de petites variations, le fil s'allongeait indéfiniment, en sorte que le point figuratif s'élevait constamment, à partir de M_0, sur la ligne $\Theta_0\Theta_0'$.

Étudions de plus près ce phénomène, en supposant le cas idéal où la température serait maintenue rigoureusement constante.

Soit M un point situé sur la ligne $\Theta_0\Theta_0'$; soient AA′ et DD′ la ligne ascendante et la ligne descendante qui se croisent en ce point; soient α et β les coefficients angulaires des tangentes à ces deux lignes.

En vertu de l'égalité (1), on a

$$\alpha = \frac{1}{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2} + f(l, \Theta_0)},$$

$$\beta = \frac{1}{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2} - f(l, \Theta_0)}$$

et, par conséquent,

$$(5) \quad \alpha - \beta = -\frac{2f(l, \Theta_0)}{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2}\right)^2 - [f(l, \Theta_0)]^2}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2} + f(l, \Theta_0) > 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2} - f(l, \Theta_0) > 0,$$

puisque les deux lignes AA′ et D′D montent de gauche à droite; il résulte donc de l'égalité (5) que $(\alpha - \beta)$ est de signe contraire à $f(l, \Theta_0)$ et, par conséquent, dans les conditions que nous supposons réalisées, que $(\alpha - \beta)$ est positif.

Supposons que la tension Θ s'écarte de Θ_0, dans un sens ou dans l'autre, d'une quantité dont la valeur absolue est a; qu'elle prenne, par conséquent, soit la valeur $(\Theta_0 + a)$, soit la valeur $(\Theta_0 - a)$; qu'elle revienne ensuite à

la valeur Θ_0. Le point figuratif se sera élevé de M en M′, et l'on aura, comme on le voit sans peine,

$$l' - l = \mathrm{MM'} = (\alpha - \beta)a.$$

Supposons que le système soit soumis, non pas à une seule oscillation de la tension, mais à des oscillations très fréquentes et très petites autour de la valeur moyenne Θ_0; soit n le nombre de ces oscillations simples dans l'unité de temps; supposons que a soit la valeur *moyenne* de l'écart que la tension subit de part et d'autre de la valeur Θ_0; on voit que le point figuratif, parvenu en M, tendra à s'élever le long de la ligne MM′ avec une *vitesse moyenne*

$$v = (\alpha - \beta)\, na,$$

que l'égalité (5) permet d'écrire

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v = -2na \frac{f(l, \Theta_0)}{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2}\right)^2 - [f(l, \Theta_0)]^2}.$$

Supposons Θ_0, n et a invariables et calculons l'*accélération moyenne* de ce mouvement.

Nous aurons

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial l}\frac{dl}{dt} = v\frac{\partial v}{\partial l},$$

ou

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\frac{dv}{dt}}{v} = \frac{\partial v}{\partial l}.$$

Lorsque $\frac{dv}{dt}$ a le signe de v, le mouvement du point M s'accélère avec le temps; il se ralentit lorsque $\frac{dv}{dt}$ est de signe contraire à v. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

La déformation d'un fil tendu, soumis à de petites variations de la tension, variations dont l'amplitude moyenne et la fréquence moyenne demeurent invariables, s'accélère ou se ralentit selon que $\frac{\partial v}{\partial l}$ *est positif ou négatif.*

L'égalité (6) nous donne d'ailleurs

$$(8)\quad \frac{\partial v}{\partial l} = -2na\,\frac{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial l} - 2f\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2}\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial l^3} + f^2\frac{\partial f}{\partial l}}{\left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2}\right)^2 - f^2\right]^2}.$$

Considérons tout d'abord le cas où le point considéré est infiniment voisin de la ligne des états naturels OIN; cette ligne étant définie par l'équation

$$(2)\quad f = 0,$$

on voit que, pour un point infiniment voisin de cette ligne, on a

$$\frac{\partial v}{\partial l} = -2na\,\frac{\frac{\partial f}{\partial l}}{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2}\right)^2},$$

en sorte que $\frac{\partial v}{\partial l}$ est de signe contraire à $\frac{\partial f}{\partial l}$.

Si le point figuratif du système est infiniment voisin de la ligne des états naturels, la déformation du fil est une déformation ralentie dans le cas où le point figuratif est infiniment voisin de la branche OI *et une déformation accélérée dans le cas où le point figuratif est infiniment voisin de la branche* IN.

Traçons la ligne que définit l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial l} = 0.$$

D'après l'égalité (8), l'équation de cette ligne peut s'écrire

$$(9)\quad \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial l} - 2f\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2}\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial l^3} + f^2\frac{\partial f}{\partial l} = 0,$$

ce qui montre qu'elle ne dépend pas de la grandeur moyenne a des écarts

de tension ni de la fréquence moyenne n de ces écarts. *Cette ligne* $\gamma\delta$ (fig. 23) *passe au point* I, puisqu'on a, en ce point,

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial l} = 0.$$

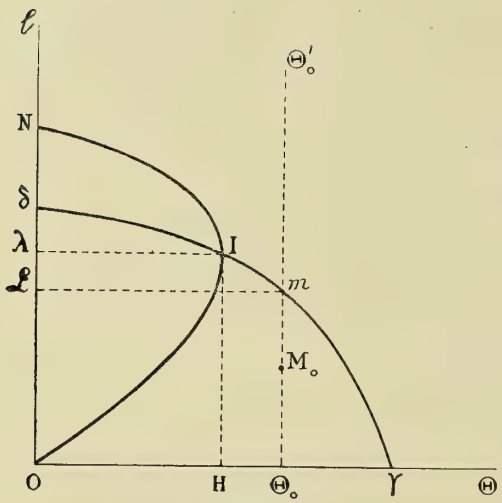


FIG. 23.

Elle partage le plan en deux régions; dans l'une des régions, qui renferme la branche OI *de la ligne des états naturels, la déformation du fil est une déformation ralentie; dans l'autre région, qui renferme la branche* IN *de la ligne des états naturels, la déformation du fil est une déformation accélérée.*

Si, par exemple, la tension moyenne Θ_0, maintenue invariable, est supérieure à H et si le point figuratif de l'état initial M_0 est au-dessous de la ligne $\gamma\delta$, les petites variations de la tension produisent un continuel allongement du fil; cet allongement est d'abord un allongement ralenti, jusqu'au moment où la dilatation linéaire atteint la valeur $\Theta_0 m$; mais, à partir de ce moment, l'allongement du fil est un allongement accéléré; *le fil se dilate de plus en plus vite sous l'influence des petites oscillations de la tension.*

Les deux régions en lesquelles la ligne $I\gamma$ partage la portion du plan située à droite de la ligne OIN des états naturels se distinguent encore par un autre caractère qu'il nous faut maintenant étudier.

Considérons un fil tendu par un poids P; *si l'on néglige le poids du fil,* on pourra regarder chacun des éléments de ce fil comme sollicité par ce même poids P; si la section initiale Ω_0 était la même pour ces divers éléments, la quantité $\Theta = \frac{P}{\Omega_0}$ aurait sensiblement la même valeur pour chacun d'eux; mais, en général, il n'en sera pas de même de l; ces divers éléments pourront avoir subi des actions différentes; si l'on passe d'une section σ du

fil à une autre section σ', la dilatation linéaire passera d'une valeur l à une valeur différente l'; les divers éléments correspondront, dans le plan des (Θ, l), à des points figuratifs différents, mais qui seront tous situés sur une parallèle à Ol.

Prenons un tel fil, et supposons que tous les points figuratifs de l'état de ses divers éléments se trouvent à droite de la ligne des états naturels OlN; supposons que la tension éprouve de petites et fréquentes variations; tous les éléments du fil s'allongeront; mais ils s'allongeront avec des vitesses différentes; l'élément dont σ est la section s'allongera avec la vitesse $v = v(l, \Theta_0)$; l'élément dont σ' est la section s'allongera avec la vitesse $v' = v(l', \Theta_0)$.

Supposons, d'abord, que les points M et M′ qui représentent respectivement l'état du fil en un point des sections σ, σ', soient tous deux situés dans la région $Ol\gamma$; comme dans cette région $\frac{\partial v}{\partial l}$ est négatif, $(v' - v)$ sera de signe contraire à $(l' - l)$; on aura

$$\frac{\frac{d(l'-l)}{dt}}{l'-l} < 0.$$

Les petites variations de la tension d'un fil dont les divers éléments sont représentés par des points de la région $Ol\gamma$, provoquent un allongement de toutes les parties du fil; mais la vitesse de cet allongement varie d'un élément à l'autre du fil, de manière à atténuer les écarts que les dilatations antérieures présentent le long du fil; en se dilatant, le fil tend à devenir homogène dans toute sa longueur.

Il en est tout autrement si les points M, M′ sont tous deux dans la région du plan située au-dessus de la ligne $Nl\gamma$. Dans cette région, $\frac{\partial v}{\partial l}$ est négatif; $(v' - v)$ est de même signe que $(l' - l)$; on a

$$\frac{\frac{d(l'-l)}{dt}}{l'-l} > 0.$$

Les petites variations de la tension d'un fil dont les divers éléments sont

représentés par des points situés au-dessus de la ligne NI_γ, *provoquent un allongement de toutes les parties du fil ; la vitesse de cet allongement varie d'un élément à l'autre du fil, de manière à exagérer les écarts que les dilatations antérieures présentent le long du fil ; en s'étirant, le fil tend à devenir de plus en plus hétérogène dans sa longueur.*

Considérons, par exemple, un fil dont une portion, comprise entre les sections σ, σ', a subi une dilatation longitudinale plus grande que les portions voisines ; toute dilatation longitudinale s'accompagnant d'une contraction transversale d'autant plus grande que la dilatation longitudinale est, elle-même, plus grande, la partie comprise entre les sections σ, σ'' est plus resserrée que les portions avoisinantes ; elle présente une section de gorge σ' (partie gauche de la figure 24) correspondant aux points dont la dilatation longitudinale est maxima.

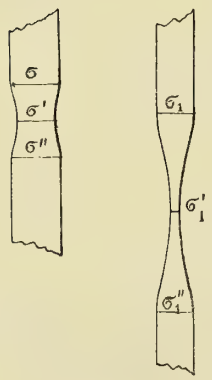


Fig. 24.

Supposons que les points qui figurent l'état des diverses parties de ce fil se trouvent tous dans la région située au-dessus de la ligne NI_γ ; les petites variations de la tension produiront une dilatation longitudinale plus rapide des portions comprises entre σ et σ'' que des portions comprises au-dessus de σ ou au-dessous de σ'' ; les éléments voisins de la section σ' seront ceux qui subiront la dilatation longitudinale la plus rapide ; au bout d'un certain temps, le fil présentera la forme qu'indique la partie droite de la figure 24 ; il se composera de deux portions cylindriques suffisamment larges, reliées par un filament de plus en plus mince.

D'après la théorie que nous développons en ce moment, ce fil s'allongera de plus en plus vite et sa section tendra vers 0 ; dans la pratique, il finira par se rompre ; comment s'explique cette divergence entre la théorie et la pratique ?

La théorie très simplifiée de la traction des fils, telle que nous l'exposons ici, n'établit aucune distinction entre les divers points de la section d'un fil et, par conséquent, suppose essentiellement et implicitement l'homogénéité absolue de la matière dans une semblable section. Or, pour les métaux et les

alliages, il est à peine besoin d'observer que cette homogénéité n'est jamais réalisée et que la structure hétérogène, grenue ou fibreuse, d'un métal joue un rôle très important dans le phénomène de la rupture; la théorie précédente ne peut donc fournir, pour les métaux, qu'une première et assez grossière approximation; il n'est pas étonnant qu'elle ne fasse pas prévoir le phénomène de la rupture qui suit la formation d'un étranglement.

Les corps pâteux, *gluants*, offrent, dans une section, une homogénéité beaucoup plus parfaite que les métaux; aussi peut-on suivre pour ces corps, beaucoup plus loin que pour les métaux, la formation de l'étranglement et le filage qui précèdent la rupture. Pour expliquer comment le fil qui réunit les deux portions faiblement dilatées finit par se rompre lorsqu'il est devenu extrêmement grêle, il faut tenir compte ici des actions capillaires, grâce auxquelles les portions internes du fil ne sont pas dans le même état que les parties extrêmement voisines de la surface.

On s'explique ainsi que la théorie précédente, tout en donnant l'image des phénomènes d'étranglement qui précèdent la rupture, soit trop simplifiée pour représenter l'action même de la rupture.

Sous le bénéfice de ces remarques, nous pourrons dire que toute tension supérieure à H amène forcément la rupture si elle est maintenue un temps suffisamment long; il n'y a donc pas, à proprement parler, dans notre théorie, de *charge de rupture définie* et, en cela, cette théorie s'accorde avec les observations des praticiens. Pour le zinc, la charge de rupture varie dans des limites énormes avec la durée de l'essai : « Ainsi (*), à 20°, un essai d'une durée de une minute donne une charge de rupture de 24 kilogrammes avec 10 °/₀ d'allongement. Mais une charge de 10 kilogrammes par millimètre carré amène la rupture au bout de trente minutes avec 40 °/₀ d'allongement et une charge de 6 kilogrammes au bout de onze heures avec 170 °/₀ d'allongement. »

On ne peut même dire qu'il existe une tension minima de rupture, la tension H, car le corps peut se rompre sous une tension moindre s'il a été assez déformé pour que le point figuratif se trouve au-dessus de la ligne IN'.

(*) André Le Chatelier, *Le génie civil*, t. XIX, p. 110; 1891.

En résumé, si dans le plan $\Theta O l$ (fig. 25), on trace les lignes OIN, HI, $I\gamma$, on voit que ces lignes partagent le plan en quatre régions que distinguent des caractères tout à fait remarquables des actions élastiques.

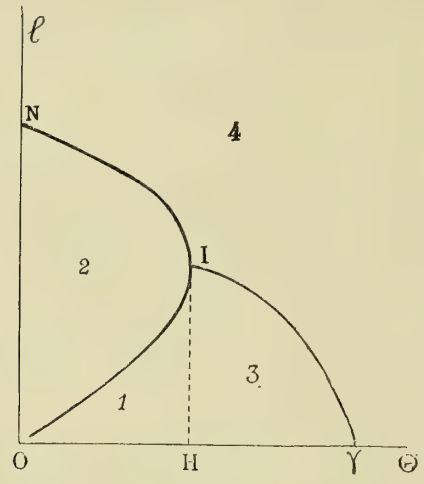


Fig. 25.

1° Si le point figuratif de l'état du fil est dans la région 1, située entre les lignes OI et HI, le fil, soumis à une tension qui éprouve des oscillations petites et fréquentes autour d'une valeur moyenne invariable, s'allonge de plus en plus lentement; sa dilatation longitudinale tend vers une limite supérieure, ordonnée du point de la ligne OI qui a pour abscisse la valeur considérée de la tension.

Ce résultat a été, semble-t-il, obtenu pour la première fois par Brix (*), et opposé par lui aux idées de Young, de Coulomb et de Tredgold, selon lesquelles toute charge qui donne au fil une déformation permanente est susceptible d'amener la rupture si on la laisse agir pendant un temps suffisamment long.

2° Si le point figuratif de l'état du fil est dans la région 2, comprise entre l'axe Ol et la ligne des états naturels OIN, le fil, soumis à une charge qui subit de petites et fréquentes variations autour d'une valeur moyenne invariable, se raccourcit; sa dilatation longitudinale tend vers une limite inférieure, qui est l'ordonnée du point de la ligne OI qui a pour abscisse la valeur moyenne donnée de la tension.

Ce phénomène et le précédent sont ceux que W. Weber (**) avait réunis sous le nom de *prolongatio vel contractio secundaria* et que les physiciens allemands désignent sous le nom d'*action élastique résiduelle* (*elastische Nachwirkung*).

(*) Brix, *Abhandlungen über die Cohäsions- und Elasticitäts-Verhältnisse einiger nach ihren Dimensionen beim Bau der Hängebrücken in Anwendung kommenden Eisendrähte des In- und Auslandes*. Berlin, 1837.

(**) W. Weber, *De fili bombycini vi elastica*. Göttingen, 1841.

Lorsque le point figuratif se trouve dans l'une des régions 1 ou 2, le fil est dans l'état que les ingénieurs anglais nomment *état d'aise* (*state of ease*).

3° Si le point figuratif de l'état du fil est dans la région 3, limitée par les lignes HI, $I\gamma$, le fil, soumis à une tension qui éprouve des variations petites et fréquentes autour d'une valeur moyenne donnée, s'allonge; mais si la fréquence moyenne et l'amplitude moyenne des oscillations de la tension ne varient pas, cet allongement est de plus en plus lent; de plus, si les diverses parties du fil étaient, tout d'abord, inégalement dilatées, ces différences de dilatation s'atténuent pendant l'allongement. Cet état du fil correspond à celui que M. Kennedy (*) a nommé *période d'écoulement uniforme* (*stage of uniform flow*).

L'allongement du fil se poursuit jusqu'à ce que le point figuratif pénètre dans la quatrième région.

4° Si le point figuratif de l'état du fil est dans la région 4, située au-dessus de la ligne $NI\gamma$, le fil, soumis à une tension qui éprouve des variations petites et fréquentes autour d'une valeur invariable, s'allonge de plus en plus vite; de plus, au cours de cet allongement, les différences que la dilatation présentait initialement dans la longueur du fil vont en s'exagérant; les tronçons qui étaient, au début, les plus dilatés donnent lieu à des étranglements qui, théoriquement, deviennent de plus en plus grêles, et pratiquement, aboutissent à la rupture du fil.

Dufour (**) avait déjà observé l'*étranglement* que présentent les fils de fer au moment où ils vont se rompre, et avait noté la soudaineté du phénomène. Poncelet (***) parle de « la rapidité avec laquelle la résistance du prisme décroît dans les instants où s'opère la séparation complète des parties ... Vers ces instants, les allongements cessent de s'opérer uniformément sur l'étendue

(*) Kennedy, *Nature*, 2 avril 1885, p. 504.

(**) Dufour, *Description du pont suspendu en fil de fer construit à Genève*. Genève, 1824.

(***) Poncelet, *Introduction à la mécanique industrielle, physique et expérimentale*, 2e éd., p. 283. Metz, 1839.

entière de la barre, et n'ont plus lieu sensiblement que sur la portion, souvent très courte pour les corps raides, où se fait la séparation définitive des molécules (*). »

La formation de l'étranglement qui précède la rupture dépend des déformations que présentait le fil ou la barre au moment où les divers points figuratifs pénètrent dans la région 4 et, par conséquent, de la nature du travail auquel la barre ou le fil a été antérieurement soumis; ainsi s'explique sans doute cette observation de Lamé et Clapeyron (**), que les barres de fer à section rectangulaire se rompent plus brusquement que les barres à section circulaire; pour celles-ci, la rupture est précédée d'un étranglement très notable.

M. Kennedy donne à l'état du fil qui correspond à la région 4 le nom de *période d'écoulement local* (*stage of local flow*); les artisans le nomment *état d'énervation*.

Dans ce qui précède, nous n'avons point parlé des régions dites d'*élasti-*

(*) On trouve d'intéressants documents sur la formation de l'étranglement qui précède la rupture dans l'ouvrage suivant : Kirkaldy, *Experimental inquiry into the mechanical properties of Fagersta steel.* London, 1873. — Depuis la présentation de notre travail à l'Académie, l'écoulement local des métaux a fait l'objet d'une note intéressante de M. Faurie (*Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 400; 1898). Cet auteur a montré qu'en soumettant une barre cylindrique ou un fil à une forte traction, « on constatait, dans certaines conditions, la production tout le long de l'éprouvette de nœuds et de ventres équidistants, assez peu distincts d'ordinaire, mais parfois aussi très fortement accentués ». — Ces ventres et ces nœuds marquent, d'après la théorie précédente, les sections qui, lors de l'étirement de l'éprouvette, avaient subi les plus faibles et les plus fortes dilatations; par suite de la marche périodique de la machine qui a produit l'étirement, les sections de dilatation maxima doivent se succéder à des intervalles sensiblement réguliers.

D'autres expériences de M. Faurie montrent bien que les collets se forment aux sections qui, dans un travail préalable, ont subi la plus forte dilatation. L'auteur étirait l'éprouvette de 30 à 33 % de sa longueur, la déchargeait, la recuisait pour détruire l'écrouissage, l'étirait à nouveau, et ainsi de suite. « Le phénomène des nodalités se présente, dans ces conditions, dès la deuxième passe ou la troisième au plus tard; l'éprouvette se creuse en un certain nombre de collets équidistants, séparés par des renflements également équidistants. Aux passes suivantes, la déformation commence généralement à la même dépression et s'étend, au fur et à mesure que l'allongement se produit, aux dépressions voisines. »

(**) Lieutenant-colonel Henry, *Mémoire sur l'emploi du fer dans les ponts suspendus.* (Journal des Voies de communications, p. 47. Saint-Pétersbourg, 1826-1827.)

cité parfaite et d'*élasticité imparfaite,* ni de la *limite d'élasticité* qui séparerait ces deux régions; en réalité, cette limite n'existe pas; l'expérience montre simplement que, dans une région plus ou moins étendue entourant le point O, les lignes ascendantes et les lignes descendantes se coupent sous un angle très voisin de π; les déformations temporaires en lesquelles le fil s'écarte assez peu de l'origine O pour ne pas sortir de cette région, ne donnent lieu qu'à des déformations permanentes extrêmement petites, qui peuvent être inférieures aux quantités observables; mais, au fur et à mesure que croît la précision des méthodes d'observation, la soi-disant limite d'élasticité s'abaisse et tend à disparaître. Seul, l'ensemble des deux régions d'élasticité parfaite et d'élasticité imparfaite représente une région nettement délimitée, la région des *états d'aise.*

Toute la théorie précédente a été développée en supposant la température rigoureusement constante; en réalité, durant toute déformation élastique, la température varie d'un point à l'autre du fil et, au même point, d'un instant à l'autre. Il en résulte des complications qu'il serait fort difficile actuellement de soumettre à une étude soit théorique, soit expérimentale.

§ 4. — *Effets analogues aux précédents, dus à des actions élastiques autres que la traction.*

Les considérations développées dans les trois paragraphes précédents peuvent se répéter presque textuellement pour toute déformation élastique qui peut être complètement définie par une seule variable.

Considérons, par exemple, un cylindre vertical dont la section supérieure porte une charge P. Soit Ω_0 la valeur initiale de la section; soient h_0 et h la hauteur initiale et la hauteur actuelle de la colonne; si nous désignons par $\Theta = \frac{P}{\Omega_0}$ la charge par unité d'aire de la section initiale et par $l = \frac{h_0 - h}{h_0}$ la contraction longitudinale, nous pourrons reprendre textuellement les formules et les figures des trois paragraphes précédents.

Les régions 1 et 2 formeront encore, par leur ensemble, la région où le cylindre chargé est à l'*état d'aise.*

Si la charge du cylindre est assez grande pour que le point figuratif pénètre dans la région 3, le cylindre présentera le phénomène de l'*écoulement continu;* il *s'aplatira* et, en même temps, ses défauts d'homogénéité, dus aux dilatations inégales qu'ont pu produire des actions antérieures, iront en s'atténuant.

Si la charge du cylindre devient plus grande, il s'écrasera avec une vitesse croissante; en même temps, ses défauts d'homogénéité iront en s'exagérant; si des déformations antérieures ont produit de légères différences de contraction entre les diverses couches horizontales qui composent ce cylindre, les couches qui étaient tout d'abord les plus contractées se contracteront de plus en plus, les couches qui étaient primitivement les moins contractées se contracteront de moins en moins; les premières formeront des bourrelets horizontaux et les secondes des gorges à la surface latérale de la colonne, qui deviendra onduleuse; pratiquement, des ruptures horizontales finiront par se produire suivant les plans de moindre contraction initiale; les régions de plus grande contraction se trouveront ainsi former des feuillets empilés et séparés les uns des autres; la matière sera devenue *schisteuse.*

On explique sans peine, par les considérations précédentes, les effets si divers que peut produire le *martelage;* le martelage est, en somme, un procédé qui fait varier la charge du cylindre considéré alternativement entre zéro et une limite supérieure donnée, proportionnelle à la force vive du marteau au moment du choc; les considérations développées au § 2 forment donc une véritable théorie du martelage.

Si la force vive du marteau est inférieure à une limite donnée, la répétition des coups de marteau amène le corps à décrire un cycle fermé; il arrive à un état que la continuation du martelage ne modifie plus.

Si la force vive du marteau surpasse la limite en question, les premiers coups de marteau ont pour effet d'aplatir de plus en plus le cylindre et, en même temps, d'en accroître l'homogénéité; mais si l'on continue indéfiniment le martelage, on finit par énerver le métal.

Lorsque la déformation élastique que l'on étudie ne peut plus être représentée, pour chaque volume élémentaire, par une seule variable, la théorie se complique extrêmement; nous ne voulons pas aborder pour le moment

cette théorie, nous réservant d'en donner plus tard une esquisse; disons seulement que l'expérience nous montre encore, dans les cas les plus divers, les effets si curieux que nous ont montrés, dans les circonstances simples que nous avons étudiées, les actions élastiques intenses et les grandes déformations; c'est ainsi que l'*écoulement des solides* soumis à des forces puissantes a été étudié par divers observateurs, notamment par Tresca (*); selon ce dernier, « il semblerait que la période de fluidité serait intermédiaire entre l'élasticité et la désagrégation, et qu'elle constituerait un état particulier sous l'influence d'efforts plus grands que ceux de la période élastique, mais plus petits que ceux qui déterminent la rupture ». C'est ainsi encore que divers expérimentateurs, parmi lesquels nous citerons M. le commandant Hartmann (**), ont montré comment les grandes déformations élastiques exagéraient les hétérogénéités produites par un travail antérieur du métal.

Dans la plupart des métaux, des phénomènes nouveaux, connus sous les noms de *trempe* et d'*écrouissage,* viennent compliquer encore les lois précédentes; ces phénomènes, d'ordre chimique, vont faire l'objet des Chapitres suivants.

(*) Tresca, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides* (Mémoires présentés par divers savants étrangers a l'Institut de France, t. XVIII, p. 733); *Mémoire sur l'écoulement des corps solides* (Ibid., t. XX, p. 75); *Application de l'écoulement des corps solides au laminage et au forgeage* (Ibid., p. 137); *Complément au mémoire sur l'écoulement des corps solides* (Ibid., p. 288); *Écoulement des corps solides. Mémoire sur le poinçonnage des métaux* (Ibid., p. 776).

(**) Hartmann, *Comptes rendus,* t. CXVIII, p. 520; 1894.

CHAPITRE III.

LA TREMPE DES MÉTAUX.

§ 1. — *Les modifications du phosphore rouge.*

Nous avons vu, dans notre deuxième mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis,* que la transformation du soufre soluble en soufre insoluble était régie, jusque dans ses moindres détails, par les lois de l'hysteresis. Il serait surprenant que la modification allotropique qui change le soufre insoluble en soufre soluble fût le seul changement d'état physique ou de constitution chimique qui soit soumis à ces lois. Et en effet, bien que nous n'ayons pas à leur endroit des renseignements détaillés et minutieux comme ceux que M. Gernez a accumulés au sujet des changements d'état du soufre, il est d'autres modifications qui semblent obéir aux mêmes règles. De ce nombre nous paraissent être les modifications du phosphore rouge au sujet desquelles MM. Troost et Hautefeuille (*) ont donné de précieuses indications.

Il résulte, en effet, des recherches de ces habiles observateurs que le phosphore rouge, maintenu très longtemps à une certaine température et ramené à la température ordinaire, se présente sous un état qui dépend de la température à laquelle il a été porté. Cet état, caractérisé par la couleur, l'aspect, la densité, la tension de vapeur saturée, la chaleur de combustion, varie d'une manière continue avec la température à laquelle il a été produit.

(*) Troost et Hautefeuille, *Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 748, 1874; — *Annales de chimie et de physique*, 5e sér., t. II, p. 145, 1874.

Prenons pour comparaison le phosphore rouge cristallisé, dont la densité est 2,34.

Le phosphore rouge du commerce a une chaleur de combustion qui surpasse de 568 calories par gramme celle du phosphore rouge cristallisé.

Le phosphore rouge maintenu à 265° pendant 650 heures est d'un rouge magnifique, à cassure vitreuse, rappelant par son éclat celle du réalgar; sa densité est 2,148; sa chaleur de combustion surpasse de 320 calories par gramme celle du phosphore rouge cristallisé.

Maintenu pendant 540 heures à 360°, le phosphore rouge a pour densité 2,19 et sa chaleur de combustion surpasse de 298 calories celle du phosphore rouge cristallisé.

Préparé à 440°, le phosphore rouge a une couleur orangée; sa cassure est terne et grenue.

Celui que l'on obtient à 500° a pour densité 2,293; sa chaleur de combustion surpasse encore celle du phosphore cristallisé.

Au delà de 500°, le phosphore redevient compact; sa couleur est d'un gris violacé vif.

Le phosphore préparé à 580° a une cassure conchoïde; il semble avoir subi un commencement de fusion pâteuse; il renferme souvent des géodes de cristaux; sa chaleur de combustion est inférieure de 50 calories environ à celle du phosphore rouge cristallisé.

La tension de la vapeur de chaque variété de phosphore rouge est d'autant plus faible que cette variété a pris naissance à une température plus élevée.

« Le phosphore rouge ne prend pas immédiatement l'aspect particulier que nous venons d'indiquer; il l'acquiert lentement si l'expérience se fait à une température peu élevée, rapidement si elle se fait au-dessus de 500°.

» Les variétés qui cessent d'être modifiées par une nouvelle chauffe d'un grand nombre d'heures, à la même température, passent les unes aux autres par nuances insensibles quand on les porte à une température plus élevée, maintenue longtemps constante. »

Il semble bien, d'après ces dernières observations, que l'on ait affaire à un

corps qui, à chaque température, tend vers un état naturel, caractéristique de cette température.

§ 2. — *Le recuit des métaux.*

C'est à des changements d'ordre chimique : combinaisons, dissociations, modifications allotropiques, que l'on doit attribuer la plus grande partie des modifications qui font passer un métal ou un alliage de l'état *doux* à l'état *dur* et inversement, par la trempe ou par le recuit. On sait quel rôle jouent, dans le mécanisme de la trempe ou du recuit de l'acier, la formation et la dissociation des carbures de fer dont on soupçonne plus ou moins nettement l'existence ; on sait également que M. Osmond a été amené à penser que le fer pouvait se présenter sous deux formes allotropiques distinctes : l'une, la forme β, prédominant dans le fer *dur;* l'autre, la forme α, prédominant dans le fer *doux*.

Ces changements d'état rentrent, on n'en saurait douter, dans la catégorie des changements d'état accompagnés d'hysteresis, dont le changement du soufre soluble en soufre insoluble nous offre un exemple aujourd'hui si minutieusement connu, grâce aux recherches de M. Gernez; dont les modifications du phosphore rouge nous offrent vraisemblablement un autre exemple. Mais, au moins dans le cas des divers carbures de fer — c'est le cas que les ingénieurs ont le plus complètement étudié — les modifications chimiques qui donnent lieu aux effets de trempe et de recuit se présentent avec une complication beaucoup plus grande que la transformation du soufre soluble en soufre insoluble; les combinaisons et les dissociations qui se peuvent produire sont multiples; des modifications allotropiques du fer, et peut-être du carbone, les accompagnent; enfin, certains de ces changements d'état font passer le corps de l'état d'alliage homogène à l'état d'assemblage d'éléments hétérogènes. Tenter une analyse détaillée de phénomènes aussi complexes et parfois, malgré les efforts d'innombrables expérimentateurs, aussi mal connus, serait assurément faire une œuvre prématurée; cette œuvre, nous n'essayerons pas de l'accomplir; nous nous contenterons d'étudier les

diverses particularités que peut présenter un cas idéalement simple, analogue à celui que nous offre le soufre; nous verrons que cette étude, toute simplifiée soit-elle, nous fournit une représentation satisfaisante de tous les phénomènes essentiels de la trempe et du recuit; elle nous donne comme une esquisse, sommaire, mais exacte, dont les études ultérieures semblent seulement devoir préciser les détails sans modifier l'ensemble.

Nous imaginerons donc que chaque élément d'un corps *solide* soit un mélange *homogène* de deux corps α et β, de même composition chimique, susceptibles de se transformer l'un dans l'autre; nous supposerons que, dans l'élément de masse $d\mathrm{M}$ du corps se trouvent des masses des deux corps α et β respectivement égales à $(1-x)d\mathrm{M}$, $x d\mathrm{M}$; nous admettrons enfin que l'état de chaque élément est complètement défini lorsqu'on connaît la variable x et la température T.

En général, les variations de x changeront les propriétés physiques du corps; pour fixer les idées, nous supposerons que le corps soit d'autant plus *dur* que x est plus grand; x pouvant varier de 0 à 1, nous voyons que $x = 0$ caractérisera le corps *parfaitement doux* et que $x = 1$ correspondra au corps *parfaitement dur*.

Nous supposerons enfin, pour le moment, qu'aucune action extérieure ne sollicite le système.

Les modifications élémentaires du système seront régies par l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x,\mathrm{T})}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x,\mathrm{T})}{\partial x \partial \mathrm{T}} d\mathrm{T} + f(x,\mathrm{T})|dx| = 0.$$

Nous savons que l'on doit avoir non seulement

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x,\mathrm{T})}{\partial x^2} > 0,$$

mais encore

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x,\mathrm{T})}{\partial x^2} + f(x,\mathrm{T}) > 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x,\mathrm{T})}{\partial x^2} - f(x,\mathrm{T}) > 0. \end{cases}$$

Quant à $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial T}$, son signe est arbitraire.

Si, dans l'élément de masse dM, la variable x venait à croître de dx, la température absolue T demeurant invariable, cet élément dégagerait une quantité de chaleur

$$dQ = -r(x, T) dM dx.$$

Il résulte de nos théorèmes généraux que l'on a, en toute circonstance,

$$(4). \quad \ldots \quad r(x, T) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial M} < 0.$$

Deux cas sont alors à distinguer :

1° *Le durcissement du corps est accompagné d'une absorption de chaleur :*

$$(5) \quad \ldots \quad r(x, T) > 0.$$

Dans ce cas, l'inégalité (4) nous donne

$$(6) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial T} < 0.$$

Ce cas est celui qui nous est présenté par le fer, l'acier et la plupart des métaux et alliages.

2° *Le durcissement du corps est accompagné d'un dégagement de chaleur :*

$$(5^{bis}) \quad \ldots \quad r(x, T) < 0.$$

Dans ce cas, l'inégalité (4) nous donne

$$(6^{bis}) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \partial T} > 0.$$

Ce cas paraît être celui du nickel, du ferro-nickel, de l'acier au manganèse, de l'alliage des tam-tams.

Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à étudier le premier cas; le lecteur n'éprouvera aucune difficulté à transposer cette étude de manière à l'appliquer au second cas.

Les *lignes ascendantes* seront représentées par l'équation

$$(7)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots dx = -\frac{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \partial T}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{dx^2} + f(x, T)}\, dT.$$

Les *lignes descendantes* seront représentées par l'équation

$$(8)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots dx = -\frac{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \partial T}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{dx^2} - f(x, T)}\, dT.$$

Si nous portons les températures en abscisses et les valeurs de x en ordonnées, d'après les inégalités (3) et (6), les lignes ascendantes monteront de gauche à droite et les lignes descendantes descendront de droite à gauche.

Quant à la *ligne des états naturels,*

$$f(x, T) = 0,$$

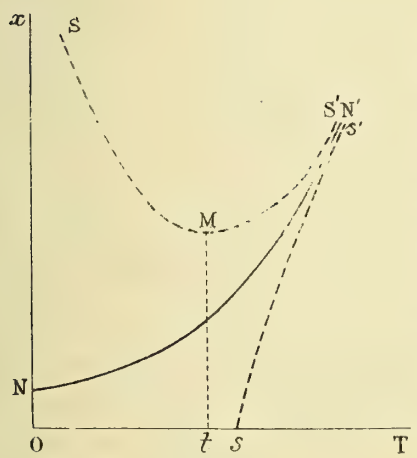


Fig. 26.

sa forme ne peut être prévue que si l'on connaît la catégorie à laquelle appartient le système. *Nous supposerons, pour le moment, que, dans toute la région étudiée, le système appartienne à la catégorie pour laquelle les états naturels sont stables.* Cette restriction sera d'ailleurs rejetée au paragraphe suivant.

Nous savons alors que *les états naturels doivent être soumis à la loi du déplacement de l'équilibre par la température,* ou, en d'autres termes, que la ligne des états naturels NN′ (fig. 26) monte de gauche à droite.

Cette ligne partage le plan en deux régions.

Prenons le système dans un état initial marqué par un point du plan TOx

situé au-dessus de la ligne NN′ ; maintenons la température physiquement constante, de telle sorte qu'elle n'éprouve que de petites variations autour de la valeur sensiblement constante T. Le point figuratif s'abaissera graduellement pour tendre vers le point d'abscisse T sur la ligne NN′. D'où la proposition suivante :

Prenons un corps dont la dureté à la température T *surpasse la dureté de l'état naturel relatif à la même température ; maintenons ce corps dans un bain dont la température soit physiquement constante et égale à* T ; *la dureté du corps va décroître graduellement pour tendre vers une dureté limite, indépendante de l'état initial du corps et fonction de la seule température* T ; CETTE DURETÉ LIMITE EST D'AUTANT PLUS GRANDE QUE LA TEMPÉRATURE T EST PLUS ÉLEVÉE.

De même, on peut énoncer la proposition suivante :

Prenons un corps dont la dureté à la température T *soit inférieure à la dureté de l'état naturel relatif à la même température ; maintenons ce corps dans un bain dont la température soit physiquement constante et égale à* T ; *la dureté de ce corps va croître graduellement pour tendre vers une dureté limite, indépendante de l'état initial du corps et fonction de la seule température* T ; CETTE DURETÉ LIMITE EST D'AUTANT PLUS GRANDE QUE LA TEMPÉRATURE T EST PLUS ÉLEVÉE ; POUR UNE MÊME VALEUR DE T, ELLE COÏNCIDE AVEC LA LIMITE CONSIDÉRÉE DANS LA PROPOSITION PRÉCÉDENTE.

Comparons ces propositions aux résultats des recherches classiques de MM. Carl Barus et Vincent Strouhal (*) ; nous allons nous heurter à une contradiction apparente ; l'explication de cette contradiction nous conduira à mettre en lumière une vérité d'ordre expérimental qui jouera un rôle essentiel dans l'étude des propriétés physiques des corps trempés.

MM. Carl Barus et Vincent Strouhal ont maintenu, pendant des temps variables, des barreaux d'acier dur aux températures d'ébullition de l'alcool méthylique (66°), de l'eau (100°), de l'aniline (185°) et à la température

(*) CARL BARUS et VINCENT STROUHAL, *The electrical and magnetic properties of the iron carburets*, p. 43. (BULLETIN OF THE UNITED STATES GEOLOGICAL SURVEY, n° 14 ; 1885.)

de fusion du plomb (330°); par un procédé thermo-électrique, ils ont étudié la variation de la dureté de ces barreaux d'acier et ils ont observé les phénomènes suivants :

Lorsqu'un barreau d'acier dur est maintenu à une température *physiquement* invariable, la dureté de ce barreau diminue d'abord rapidement, puis de plus en plus lentement; cette dureté tend vers une limite qui dépend uniquement de la température du bain de recuit; cette limite ne dépend pas de l'état initial du barreau : ainsi un barreau, partiellement recuit dans l'eau bouillante, que l'on maintient ensuite dans la vapeur d'aniline, tend vers la même dureté limite qu'un barreau plongé directement dans la vapeur d'aniline.

Jusqu'ici, aucun désaccord ne se présente entre la théorie et l'expérience; voici maintenant où le désaccord apparaît : MM. C. Barus et V. Strouhal ont trouvé qu'*entre les températures* 66° *et* 330°, *la dureté limite atteinte par un recuit prolongé était une fonction décroissante de la température;* si, à chaque température, on élevait, dans le plan TOx, une ordonnée représentant la valeur de x obtenue au bout d'un recuit prolongé, on obtiendrait une courbe SS′ (fig. 26) qui, aux températures inférieures à 350° ou 400°, descendrait de gauche à droite; selon MM. Carl Barus et Vincent Strouhal, cette courbe présenterait un point M plus bas que tous les autres; ce point correspondrait à une température t comprise entre 400° et 600°.

Cette ligne SS′ doit-elle être considérée comme la ligne des états naturels? S'il en est ainsi, l'allure de cette courbe aux températures inférieures à t serait en contradiction avec la loi du déplacement de l'état naturel par les variations de température, loi qui, pour les systèmes à états naturels stables, est une conséquence de nos hypothèses fondamentales. Examinons donc si la ligne SS′ présente tous les caractères que doit présenter la ligne des états naturels.

Si la ligne SS′ était la ligne des états naturels, le système, pris dans un état initial que figure un point du plan situé au-dessous de SS′, et maintenu à une température *physiquement* constante, devrait se modifier de telle façon que le point figuratif s'élève sans cesse et tende vers la ligne SS′; en d'autres

termes, si l'on prenait un barreau d'acier dont la dureté soit inférieure à la dureté limite que donne, à la température T, le recuit prolongé de l'acier dur, ce barreau d'acier, maintenu dans un bain à la température T, devrait se durcir jusqu'à atteindre cette même limite.

Or ce n'est pas ce que donnent les expériences de MM. Carl Barus et Vincent Strouhal : prenons un barreau d'acier et recuisons-le, dans un bain à température T_1, jusqu'à ce qu'il ait atteint la dureté limite représentée par le point d'abscisse T_1 sur la courbe SS' ; portons-le ensuite à une température T, inférieure à T_1; le point figuratif initial sera notablement au-dessous de la ligne SS' ; or le barreau, maintenu plusieurs heures dans un bain à la température T, ne reprend pas de dureté; il n'éprouve aucune modification.

Nous pouvons, dès lors, énoncer la proposition suivante :

La ligne SS' *n'est pas la ligne des états naturels.*

Quelle est donc la signification de cette ligne ?

Le bain dans lequel se trouve le barreau d'acier dur que l'on soumet au recuit n'a pas une température absolument invariable; la température, dont T est la valeur moyenne, éprouve, autour de cette température, des oscillations dont la valeur moyenne est $2a$; n est le nombre moyen de ces oscillations par unité de temps; le point figuratif descend alors vers la ligne des états naturels NN' avec une vitesse moyenne v que l'on peut déterminer en suivant une déduction semblable à celle qui a donné l'égalité (6) du Chapitre précédent ; la région où se trouve le point figuratif étant celle où $f(x, T)$ est positif, à savoir la région située à gauche de la ligne des états naturels, on aura

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v = 2na \frac{f(x, T)}{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{dx^2}\right)^2 - [f(x, T)]^2}.$$

Les expériences effectuées par MM. Strouhal et Barus aux températures de 66°, 100°, 185°, 330°, les ont conduits à la conclusion suivante (*) : « Le

(*) *Loc. cit.*, p. 55.

degré de la dureté retenue par un barreau d'acier extra-dur que l'on soumet ensuite au recuit, dépend de la température du bain de recuit et de la durée de séjour dans ce bain; mais l'effet du temps, qui a une importance prédominante pour les basses températures, en a de moins en moins au fur et à mesure que la température est plus élevée; le recuit est donc atteint de plus en plus rapidement au fur et à mesure que la température est plus élevée, mais il n'est jamais atteint soudainement. »

Nous pouvons, en nous fondant sur ces observations et, aussi, sur toutes les observations analogues auxquelles peuvent donner lieu les modifications permanentes produites par l'action de la température (modifications du soufre, déplacement du point 0° du thermomètre, etc.), énoncer la loi suivante :

Soit ξ *la valeur de* x *qui correspond à l'état naturel relatif à la température* T.

n *et* a *étant donnés, à une même valeur de l'excès* $(x - \xi)$ *correspondra une valeur de* v *d'autant plus grande que la température* T *est elle-même plus élevée.*

Il existe une limite inférieure des valeurs observables de v, limite d'autant plus petite :

1° Que les moyens d'observation sont plus délicats;

2° Que l'intervalle de temps pendant lequel les modifications du corps sont soumises à l'observation est plus long.

Soit u la valeur de cette limite inférieure, *pour les moyens et la durée d'observation dont on est censé disposer.*

La ligne $v = u$ devra, d'après la loi précédente, s'éloigner extrêmement de la ligne des états naturels aux basses températures, pour se rapprocher de la ligne des états naturels au fur et à mesure que la température s'élève.

Nous pouvons admettre que la ligne SS' *est le lieu des points au-dessous desquels la modification de l'acier est trop lente pour pouvoir être appréciée par les moyens d'observation dont disposaient MM. Barus et Strouhal, et avec les durées d'expérience* (quelques heures) *qu'ils employaient.*

Mais l'état de l'acier dont le point figuratif se trouve au-dessous de la ligne SS′ n'est pas devenu invariable; la dureté de cet acier continue à diminuer, bien qu'avec une extrême lenteur; ces modifications, inappréciables au bout de quelques heures, peuvent être perceptibles au bout de plusieurs années. Ainsi, quelque raide que soit la trempe d'un barreau d'acier, l'action de la température ordinaire semble n'apporter aucune modification à cet état de trempe si l'observation dure seulement quelques heures; mais le recuit est appréciable au bout de plusieurs années; selon M. C. Barus (*), « la température ordinaire, agissant sur un barreau trempé raide pendant un certain nombre d'années produit un effet comparable à celui qu'une température de 100° produit pendant un certain nombre d'heures ».

On peut, en employant l'expression dont M. C. Barus fait usage, dire que la région comprise entre les lignes SS′, NN′ est la *région où le corps éprouve un recuit séculaire.*

Cette région, dont l'existence a une très grande importance dans l'interprétation des propriétés des corps trempés, possède essentiellement les caractères suivants :

1° En chaque point de cette région se coupent une ligne ascendante et une ligne descendante qui font entre elles un angle extrêmement voisin de π.

2° Très large à basse température, cette région se resserre de plus en plus au fur et à mesure que la température s'élève.

3° Cette région n'est pas séparée de la région des recuits appréciables par une ligne rigoureusement définie; la frontière commune de ces deux régions a une position qui dépend de la précision et de la durée des observations; au fur et à mesure que l'on fait croître cette précision et cette durée, la région des recuits séculaires se resserre et tend à s'évanouir.

(*) Carl Barus, *The mechanism of solid viscosity*, p. 79. (Bulletin of the United States geological Survey, n° 94; 1892.) — Depuis la présentation du présent travail à l'Académie, M. Carl Barus a publié de nouvelles recherches, plus sensibles et plus précises, qui confirment pleinement les résultats expérimentaux que nous venons d'invoquer (Carl Barus, *The secular softening of cold hard steel, with remarks on electrical standards.* Philosophical Magazine, série V, vol. XLIV, p. 486; 1897).

Au-dessous de la ligne NN′ des états naturels, on peut naturellement tracer une ligne ss', montant de gauche à droite et séparant la région située à droite de cette ligne ss', où le corps éprouve un accroissement appréciable de dureté, de la région comprise entre ss' et NN′, où la dureté n'éprouve que des accroissements séculaires.

La région des recuits séculaires et la région des durcissements séculaires peuvent être réunies en une seule région, la *région des variations séculaires de la dureté.* Cette région présente les trois mêmes caractères essentiels que la région des recuits séculaires; par le premier et le troisième de ces caractères, elle est analogue à la région que, dans l'étude des déformations élastiques isothermes, on nomme *région d'élasticité parfaite.*

Lorsque l'on considère la disposition de la ligne NN′ des états naturels et de la région des variations séculaires telles que les recherches de MM. Barus et Strouhal nous conduisent à les tracer, on est frappé de l'analogie que cette disposition présente avec la disposition de la *ligne des équilibres véritables* et de la *région des faux équilibres* pour une modification endothermique qui s'accomplirait *sans hysteresis,* mais *avec frottement;* c'est cette dernière disposition que nous avons indiquée ailleurs (*) et que M. H. Pélabon (**) a vérifiée d'une manière complète pour le cas de la formation de l'acide sélénhydrique aux dépens du sélénium liquide et de l'hydrogène. Ces deux dispositions coïncident, si l'on établit la correspondance suivante :

MODIFICATIONS

AVEC HYSTERESIS.	AVEC FROTTEMENT.
Ligne des états naturels.	Ligne des équilibres véritables.
Région des variations séculaires.	Région des faux équilibres.
Région des recuits appréciables.	Région où x décroît forcément.
Région des trempes appréciables.	Région où x croît forcément.

(*) P. Duhem, *Traité élémentaire de mécanique chimique,* t. I, p. 230.

(**) H. Pélabon, *Comptes rendus de l'Académie des sciences,* t. CXXIV, p. 360, 1897; *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* 5e série, t. III, 1898; *Sur la dissociation de l'acide sélénhydrique,* Paris (A. Hermann), 1898.

Cette analogie, toutefois, n'est pas une identité; il ne faudrait pas, comme semblent le supposer certains auteurs qui ont écrit touchant la trempe de l'acier, oublier les différences notables qui existent entre les deux catégories de modifications.

Ainsi, dans la région des recuits appréciables, il ne faudrait pas croire que x ne puisse croître; il est seulement vrai que si, partant d'une température donnée, on revient à *cette même température,* après avoir fait subir au système une modification quelconque durant laquelle il ne sort pas de la région des recuits, on aura certainement produit une diminution de la variable x.

De même, tandis qu'en la région des faux équilibres, un système à frottement a une composition rigoureusement invariable, la composition d'un système à hysteresis à une température donnée est variable dans la région des modifications séculaires; mais la variation n'est appréciable que si la température a subi un nombre très considérable d'oscillations.

Enfin et surtout, on ne doit pas oublier que les lignes qui bornent la région des faux équilibres d'un système à frottement sont des lignes définies en thermodynamique, tandis que les lignes qui, pour un système à hysteresis, bornent la région des modifications séculaires, changent de forme et de position selon la sensibilité des procédés d'observation et la durée des expériences.

Toutefois, dans un grand nombre de cas, la région des variations séculaires joue, dans la discussion des phénomènes de trempe et de recuit, un rôle analogue à celui que la région des faux équilibres joue dans la discussion des phénomènes de dissociation; l'étude des effets produits par un refroidissement extrêmement lent nous en fournira un exemple.

Considérons tout d'abord un système doué de frottement et où peut se produire une modification chimique : un système renfermant, par exemple, du sélénium, de l'hydrogène, de l'acide sélénhydrique. La ligne qui sépare la région de combinaison de la région des faux équilibres a une forme semblable à celle de la ligne SMS' en la figure 26.

Supposons que le système, d'abord porté à une température élevée, se refroidisse lentement; le point qui a pour abscisse la température et pour

ordonnée la proportion d'acide sélénhydrique que le système renferme, suivra d'abord une trajectoire d'autant plus voisine de S'M que le refroidissement sera plus lent; puis cette trajectoire rencontrera, entre S et M, et d'autant plus près du point M que le refroidissement aura été plus lent, la ligne SM qui limite la région des faux équilibres; à partir de ce moment, on pourra continuer à abaisser la température du système sans faire varier sa teneur en acide sélénhydrique; le système renfermera donc une proportion d'acide sélénhydrique supérieure à l'ordonnée du point M et d'autant moins différente de l'ordonnée du point M que le refroidissement aura été plus lent.

Étudions de même le refroidissement très lent d'un fer ou d'un acier qui a été porté à une très haute température.

Traçons la ligne SMS' relative à nos moyens d'observation et à l'ordre de grandeur de la durée de nos expériences. Le point figuratif de l'acier ou du fer refroidi très lentement suivra un chemin qui s'écartera de S'M d'autant moins que le refroidissement sera plus lent; il en sera ainsi jusqu'au moment où la trajectoire du point figuratif pénétrera dans la région des recuits séculaires, ce qui se fera en un point de la ligne SM d'autant plus voisin du point M que le refroidissement aura été plus lent; à partir de ce moment, le point figuratif suit sensiblement une descendante.

Si donc on trace, en la région des variations séculaires de la dureté, l'ascendante et la descendante qui se coupent au point M, lesquelles sont sensiblement confondues en une même ligne, le point figuratif d'un corps refroidi avec une extrême lenteur d'une température élevée à une température très basse, et dont on fait ensuite varier la température, mais sans le faire sortir de la région des variations séculaires de la dureté, demeurera quelque peu au-dessus de cette ligne, à moins que l'on ne considère des temps extrêmement longs; ce n'est que par une modification séculaire qu'il pourra passer au-dessous de cette ligne.

Cette ligne définit donc le corps *parfaitement doux*.

§ 3. — *La brûlure des métaux.*

Nous avons supposé jusqu'ici que les états naturels du système étudié étaient toujours des états naturels stables; cette supposition suffit à rendre compte des divers phénomènes qui accompagnent le changement du soufre soluble en soufre insoluble; elle suffit aussi à expliquer les divers effets du recuit des métaux aux températures peu élevées; mais elle serait incapable de s'adapter aux phénomènes que l'on observe lorsqu'on élève la température du fer et de l'acier jusqu'à la température du rouge cerise; nous allons voir, au contraire, que l'on parvient à représenter ces phénomènes, au moins dans leurs traits généraux, si l'on suppose que *les états naturels du système ne sont pas toujours stables.*

Supposons que le durcissement du corps soit, en toutes circonstances, un phénomène endothermique; rappelons-nous que les états naturels stables suivent la loi du déplacement de l'équilibre par les variations de la température, tandis que les états naturels instables contredisent à cette loi, et, par un raisonnement analogue à celui qui a été exposé au début du Chapitre précédent, nous arriverons à la proposition suivante :

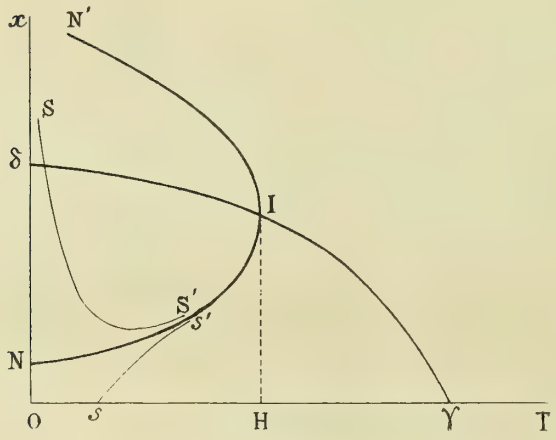


Fig. 27.

Si les états naturels du système sont les uns stables et les autres instables, la ligne des états naturels a une forme semblable à la ligne NIN′ de la figure 27. Aux températures inférieures à H, il existe deux états naturels correspondant à deux duretés différentes du métal; celui de ces états qui correspond à la moindre dureté est un état naturel stable; celui qui correspond à la plus grande dureté est un état naturel instable. Aux températures supérieures à H, il n'existe plus aucun état naturel du système.

Dans la région qu'enferme la concavité de la courbe NIN′, le séjour prolongé du corps à une température physiquement constante, c'est-à-dire à une température qui oscille de petites quantités autour d'une valeur invariable, diminue la dureté du corps; cette dureté tend vers une limite, caractéristique de la température, qui correspond à un état naturel stable; *le corps se recuit.*

Dans la région limitée par les lignes NI, OH, HI, le séjour prolongé du corps à une température physiquement constante augmente la dureté du corps; cette dureté tend vers une limite caractéristique de la température, qui correspond à un état naturel stable.

Pour comparer ces deux propositions aux résultats de l'expérience, il ne faut point oublier l'existence de la *région des variations séculaires,* comprise entre les deux lignes *ss′* et SS′.

A droite des lignes HIN′, le séjour prolongé du corps dans un bain à température physiquement constante augmente la dureté de ce corps; cette transformation n'a d'autre limite que le passage de la masse entière du corps à l'état β; x tend vers 1.

A ces diverses lignes, nous devons adjoindre, pour achever de délimiter les diverses régions du plan, la ligne $\delta\gamma$, que définit l'équation, analogue à l'équation (9) du Chapitre précédent,

$$\left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x,\mathrm{T})}{\partial x^2}\right]^2 \frac{\partial f(x,\mathrm{T})}{\partial x} - 2f(x,\mathrm{T})\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x,\mathrm{T})}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \mathcal{F}(x,\mathrm{T})}{\partial x^3} + [f(x,\mathrm{T})]^2 \frac{\partial f(x,\mathrm{T})}{\partial x} = 0.$$

Cette ligne passe au point I, où l'on a

$$f(x,\mathrm{T}) = 0, \qquad \frac{\partial f(x,\mathrm{T})}{\partial x} = 0.$$

La région située au-dessous de cette ligne possède les deux propriétés suivantes :

Tant que le point figuratif de l'état du corps se trouve dans cette région, le séjour du corps dans un bain à température physiquement constante y engendre une modification dont la vitesse a pour valeur absolue une fonction décroissante du temps.

Cette modification a pour effet d'atténuer les différences de dureté que peuvent présenter les diverses parties du métal et, par conséquent, d'accroître l'homogénéité de ce dernier.

La région située au-dessus de la ligne $\gamma\delta$ possède les deux propriétés suivantes :

Tant que le point figuratif de l'état du corps se trouve dans cette région, le séjour du corps dans un bain à température physiquement constante y engendre une modification dont la vitesse a une valeur absolue qui croît avec le temps.

Cette modification a pour effet d'exagérer les différences de dureté que peuvent présenter les diverses parties du métal et, par conséquent, de donner à ce dernier une structure hétérogène.

Ces premiers principes posés, nous allons examiner les phénomènes que présente un métal soit lorsqu'on l'échauffe, soit lorsqu'on le refroidit.

Étudions, en premier lieu, les phénomènes qui accompagnent un *échauffement infiniment lent.*

Le point figuratif du système suit, tout d'abord, une ligne extrêmement voisine de l'une des lignes qui limitent la région des variations séculaires de la dureté : la ligne SS′ si le point figuratif se trouvait primitivement dans la région des recuits, la ligne *ss′* si le point figuratif se trouvait primitivement dans la région des accroissements de dureté; dans un cas comme dans l'autre, à partir d'une certaine température, le point figuratif finit par suivre sensiblement la ligne des états naturels NI, à laquelle les deux précédentes sont asymptotes; les différences de dureté qui pouvaient s'offrir d'un point à l'autre du métal vont en s'atténuant. Il en est ainsi jusqu'au moment où la température atteint la valeur H. Aussitôt que la température surpassera cette dernière valeur, le corps, dont la température varie avec une extrême lenteur, verra sa dureté croître avec une rapidité accélérée; ce phénomène se marquera par une absorption de chaleur qui pourra rendre stationnaire, malgré l'action des sources de chaleur extérieures, le thermomètre en contact avec le métal; il se marquera aussi par une variation accélérée de la densité, des propriétés mécaniques, électriques, du métal;

en outre, les différences de dureté qui pouvaient exister entre les diverses parties du métal iront en s'exagérant; le corps prendra une structure de plus en plus hétérogène. Cet accroissement rapide de dureté, accompagné de la transformation de la structure sensiblement homogène en une structure de plus en plus grenue, constituent ce que les métallurgistes nomment la *brûlure du métal* (*); la brûlure du métal est comparable de tous points à l'*allongement par striction* (*flow locally*) d'un fil étiré, qui a été étudié au § 3 du Chapitre précédent; ce n'est pas employer une simple métaphore que de l'appeler une *rupture chimique*.

Nous dirons que *la température* H *est la température de brûlure du métal chauffé avec une lenteur infinie.*

Examinons maintenant le cas opposé : celui où le métal serait *échauffé infiniment vite* et, pour fixer les idées, supposons que le métal dont il s'agit soit le métal infiniment doux. Le point figuratif se déplacera alors constamment sur l'ascendante MJ*m* qui passe au point le plus bas M de la courbe SS′ (fig. 28); sans éprouver aucune modification brusque ni aucune brûlure, le métal parviendra soit à la dureté complète ($x = 1$), soit à la température de fusion.

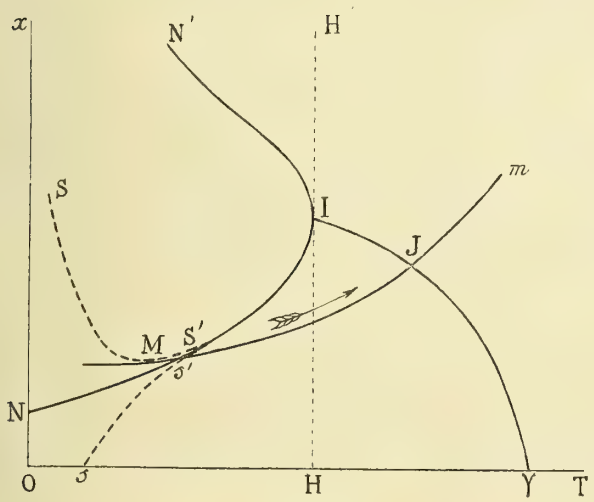


Fig. 28.

Si l'échauffement du corps n'est ni extrêmement lent ni extrêmement rapide, le point figuratif suivra un chemin intermédiaire entre la ligne NIH′ et la ligne MJ*m*. La dureté du corps croîtra d'abord graduellement, en

(*) Les métallurgistes réservent, en général, le nom de *brûlure* au cas où la transformation considérée est très avancée et a profondément altéré les propriétés du métal. Faute d'autre terme, nous étendrons la dénomination de brûlure à toute modification de ce genre, si peu avancée soit elle.

même temps que la texture deviendra de plus en plus homogène, jusqu'au moment où le point figuratif atteindra la ligne l_γ; cette rencontre aura forcément lieu à une température supérieure à H et d'autant plus voisine de H que l'échauffement aura été plus lent; à partir de ce moment, le métal pourra être le siège d'un accroissement accéléré de la dureté, accompagné d'une notable absorption de chaleur et de la formation d'une structure grenue et hétérogène; il se brûlera.

Ainsi *la brûlure du métal a lieu à une température d'autant plus élevée au-dessus de* H *que le métal est plus rapidement échauffé.*

En résumé, si nous prenons un métal très recuit et si nous le portons très rapidement à une température T, trois cas seront à distinguer :

1° *La température* T *est inférieure à* H; on pourra laisser séjourner le métal aussi longtemps qu'on voudra sans qu'il se brûle; sa dureté tendra vers une limite bien déterminée, d'autant plus élevée que la température T est plus élevée, et les variations que sa dureté subit lorsqu'on passe, dans ce métal, d'un point à l'autre, s'atténueront.

2° *La température* T *est supérieure à* H, *mais, tandis que le métal s'échauffait, le point figuratif n'a pas traversé la ligne* l_γ; la dureté du métal et son homogénéité croîtront d'abord par son séjour à la température T; mais, si ce séjour est trop prolongé, le point figuratif franchira la ligne l_γ; à partir de ce moment, la dureté du métal croîtra de plus en plus vite et il se brûlera.

3° *La température* T *est assez élevée pour que le point figuratif soit au-dessus de la ligne* l_γ; le métal se brûle d'autant plus complètement que le séjour à la température T est plus long, et aussi que cette température est plus élevée.

Montrons rapidement que ces divers phénomènes sont bien ceux que les métallurgistes ont observés dans le chauffage des métaux.

Barrett (*) a signalé l'absorption de chaleur, accompagnée d'un accroissement de densité, que subit l'acier lorsqu'on le porte au rouge cerise.

(*) Barrett, *Philosophical Magazine*, vol. XLVI, p. 473; 1873.

M. Osmond (*), qui a fait une étude détaillée de ce phénomène, a montré que, dans l'acier échauffé avec une extrême lenteur, l'accroissement accéléré du rapport x, accompagné d'une notable absorption de chaleur, se produisait à une température voisine de 710° C.; ce phénomène se produit à une température d'autant plus élevée que la vitesse d'échauffement est plus grande; avec un échauffement extrêmement rapide, on arrive à le retarder jusqu'au delà de 800°. Tous les carbures de fer, aciers, fontes, fers, etc., présentent ces phénomènes, à des températures qui varient de l'un à l'autre, parfois avec des complications que nous ne pouvons étudier ici; on les rencontre également dans d'autres composés; les aciers à aimants (**) à 2 ou 3 % de tungstène, se durcissent rapidement avec absorption de chaleur vers 850°; d'après M. G. Charpy (***), le laiton donne lieu, lorsqu'on le chauffe au voisinage de 700°, à une notable absorption de chaleur.

La brûlure de l'acier maintenu un certain temps à une température voisine de 900° ou de 1000° est un phénomène connu de tous les métallurgistes. Le fer se brûle rapidement au-dessus de 1000°; d'après M. André Le Chatelier (IV), le cuivre se brûle vers 900°, le zinc vers 150° ou 200°.

Les trois phases que nous avons distinguées dans le chauffage d'un métal, correspondent sensiblement aux trois phases que Tchernoff (V) a distinguées dans l'action de la température sur l'acier; notre température H correspond sensiblement au point qu'il nomme a; la phase comprise entre les points qu'il nomme b et c est notre deuxième période, qui est, selon lui, la période normale de travail de l'acier; au delà du point b s'étend, pour lui, la région de brûlure du métal, c'est-à-dire notre troisième période; toutefois, au début de cette période, l'accélération de la transformation de l'acier est encore très petite et le travail est possible moyennant quelques précautions.

(*) Osmond, *Transformations du fer et du carbone*. Paris, 1888. — L. Baclé, *Le génie civil*, t. XXI, pp. 71 et 198; 1892.

(**) H. Le Chatelier, *Revue générale des sciences*, p. 11; 1897.

(***) G. Charpy, *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 1131; 1893.

(IV) André Le Chatelier, *Le génie civil*, t. XIX, pp. 59, 73 et 107; 1891.

(V) Tchernoff, *Revue universelle des mines et de la métallurgie*, 1er sem., 1880, VII, p. 129. — Osmond et Werth, *Annales des mines*, 8e sér., t. VIII, p. 5, 1885. — L. Baclé, *Le génie civil*, t. XXI, p. 71, 1892.

§ 4. — *La recalescence.*

Étudions maintenant les phénomènes qui peuvent accompagner le refroidissement et, en particulier, le refroidissement lent du métal.

Supposons que le métal ait été porté à une température inférieure à H et ait acquis une dureté notable; pendant le refroidissement, le point figuratif suivra une trajectoire dont la forme différera d'autant plus d'une simple descendante issue du point initial que le refroidissement sera moins brusque; laissons de côté la discussion de la forme de la partie de cette trajectoire qui se trouve à droite de la ligne NIN′; supposons seulement qu'elle vienne rencontrer la ligne NIN′ (fig. 29) en un point *n*, correspondant à un état naturel instable, et pénètre alors dans la région située à gauche de la ligne NIN′; soit R un point de cette région, voisin du point *n*; soit T l'abscisse du point R.

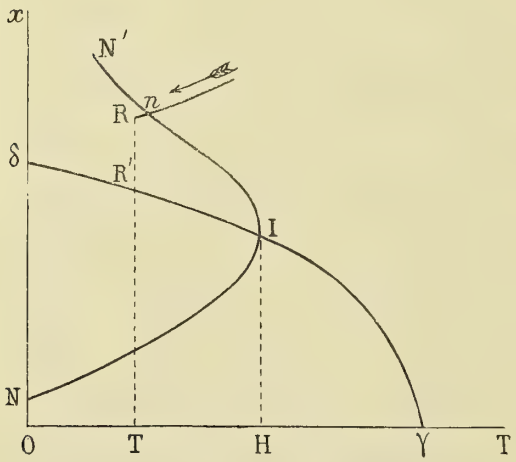


Fig. 29.

A partir du moment où le point figuratif est en R, supposons que l'on maintienne la température physiquement constante et égale à T; cette température subit seulement de petites variations inévitables au voisinage de la valeur T; le métal se met alors à éprouver un recuit accéléré, accompagné d'un dégagement de chaleur également accéléré; cette accélération se poursuit tant que le point figuratif est au-dessus de la ligne Iδ; au moment où il traverse en R′ cette ligne, la vitesse du recuit et la vitesse du dégagement de chaleur sont maxima; elles décroissent ensuite.

C'est un phénomène bien connu des praticiens que, lorsqu'on porte au rouge cerise une barre de fer ou d'acier et qu'on la laisse refroidir lentement, il arrive un moment où sa température demeure un certain temps stationnaire et où sa contraction s'arrête; la contraction et la chute de température peuvent même être momentanément renversées; l'éclat du métal augmente

d'une façon passagère, d'où le nom de *recalescence* donné à ce phénomène par Barrett, qui l'a, le premier, en 1873, soumis à une étude suivie (*).

Par son double caractère de transformation accélérée et de transformation qui dégage de la chaleur, la recalescence offre certaines analogies avec les réactions explosives des systèmes doués de frottement. Nous aurons occasion de revenir plus loin sur ces analogies.

L'explication précédente du phénomène de la recalescence met immédiatement en évidence ces deux propositions :

1° *La température où se produit le phénomène de recalescence, variable avec les conditions antérieures, est toujours inférieure à la température* H, *au-dessous de laquelle le métal ne se brûle point.*

2° *Si l'on est parti d'un métal très recuit, on n'observera pas le phénomène de la recalescence, à moins que l'on n'ait maintenu le métal à une température supérieure à* H *un temps suffisant pour qu'il ait subi un commencement de brûlure.*

Ces deux lois sont entièrement conformes aux résultats de l'expérience. D'après les observations de Brinnel, confirmées par les expériences plus précises de M. Osmond et de M. Howe, on n'obtient jamais la recalescence au refroidissement si l'on n'a pas tout d'abord chauffé le métal à la température, notablement plus élevée, où, pendant l'échauffement, se produit un durcissement accéléré.

M. Osmond (**) a trouvé qu'un acier mi-dur qui, au chauffage, présentait le phénomène inverse de la recalescence à la température de 701° C., manifestait la recalescence, au refroidissement, à la température de 661°; pour certains alliages, l'écart est beaucoup plus grand. « Les aciers à aimants (***) à 2 ou 3 % de tungstène présentent, par un échauffement rapide, les transformations de recalescence vers 850°, et, par un refroidissement rapide, quoique incapable de produire la trempe, vers 450°, soit, en tout, un écart de 400°. »

(*) Barrett, *Philosophical Magazine*, vol. XLVI, p. 476; 1873.
(**) Osmond, *Les transformations du fer et du carbone*. Paris, 1888.
(***) H. Le Chatelier, *Revue générale des sciences*, p. 14; 1897.

La température, toujours inférieure à la température H, à laquelle peut se manifester le phénomène de la recalescence, dépend des circonstances qui se sont produites pendant que le point figuratif de l'état du métal se trouvait à droite de la ligne NIN′ ; supposons le refroidissement, éprouvé pendant ce temps, assez brusque pour que la trajectoire du point figuratif jusqu'à la ligne NIN′ soit une simple descendante; pour fixer la température de recalescence, il faudrait encore connaître la position du point figuratif au moment où le refroidissement a commencé.

Imaginons, par exemple, deux températures supérieures à H, T_0, T'_0, cette dernière supérieure à T_0; soient M_0, M'_0 (fig. 30) deux points figuratifs ayant pour abscisses respectives T_0, T'_0 et une même ordonnée x_0; supposons que les descendantes issues des points M_0, M'_0 rencontrent la ligne IN′ aux points n, n'; le point n' aurait assurément une abscisse T′ supérieure à l'abscisse T du point n; *dans ces conditions, celui des deux métaux dont la température initiale était la plus élevée, serait aussi celui dont le point de recalescence au refroidissement serait le plus élevé.*

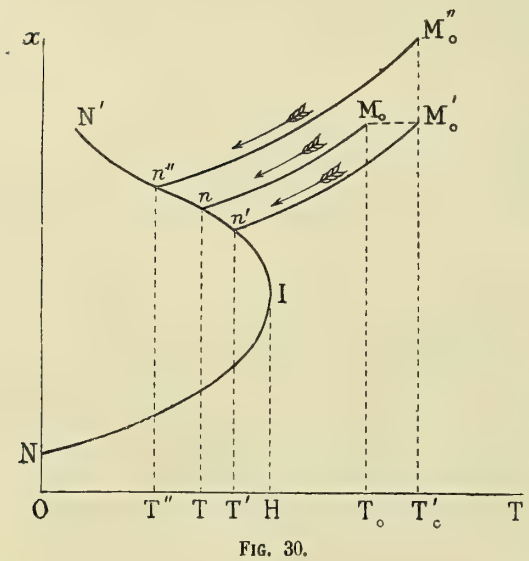


FIG. 30.

Mais ces conditions ne sont point celles que les expériences réalisent en général; en ces expériences, les deux métaux sont maintenus le même temps, l'un à la température T_0, l'autre à la température T'_0; dès lors, la valeur initiale de x est beaucoup plus élevée pour le dernier que pour le premier, car, aux températures supérieures à H, le durcissement marche d'autant plus vite que la température est plus élevée; nous aurons donc, pour représenter l'état initial de nos deux métaux, deux points, l'un M_0, d'abscisse T_0, l'autre M'_0, d'abscisse T'_0, ce dernier beaucoup plus élevé que le premier; la descendante issue du point M'_0 sera alors au-dessus de la descendante issue

du point M_0; la première de ces lignes rencontrera la ligne IN′ des états naturels en un point n'' dont l'abscisse T′′ sera inférieure à l'abscisse T du point n, où la descendante issue du point M_0 rencontre la ligne IN′; *dans ces conditions, celui des deux métaux dont la température initiale était la plus élevée sera celui dont le point de recalescence correspondra à la moindre température.*

C'est dans des conditions voisines de celles qui viennent d'être définies qu'a opéré M. Osmond (*), et les résultats qu'il a obtenus s'accordent avec la proposition précédente; ainsi, en partant de la température initiale de 745° pour le refroidissement de l'acier dur, on observe la recalescence à 686°, tandis que si le refroidissement a commencé à la température de fusion (1410°), la recalescence s'abaisse à 661°.

§ 5. — *La trempe.*

Dans le paragraphe précédent, pour étudier le phénomène de la recalescence, nous avons supposé que le corps chauffé à une température supérieure à H et fortement durci était ensuite refroidi jusqu'à ce que le point figuratif pénétrât dans la région comprise entre les lignes IN′ et Iδ, et que la température du corps était alors maintenue physiquement constante.

On peut supposer, au contraire, que le corps soit refroidi assez rapidement pour que la trajectoire du point figuratif, jusqu'au moment où il atteint la région des variations séculaires de dureté, se compose d'une simple descendante; la variable x aura alors subi une diminution bien moindre que si le phénomène de la recalescence s'était produit; le corps est beaucoup plus dur; le corps est dit *trempé raide;* il est d'ailleurs clair que la dureté d'un corps trempé raide dépend de la position qu'occupait le point figuratif au moment où le refroidissement brusque a commencé, c'est-à-dire de la température à laquelle le corps avait été porté avant la trempe et du temps pendant lequel il avait séjourné à cette température.

Supposons, en particulier, que le corps ait séjourné un temps assez long

(*) Osmond, *loc. cit.*

à une température notablement supérieure à H; les différences de dureté qui préexistaient entre les diverses parties de ce métal se sont exagérées; ses divers éléments de volume ont des duretés notablement différentes. Soumettons le métal à la trempe raide; les divers éléments de volume ont, initialement, des points figuratifs différents; ces points auront pour trajectoires des descendantes différentes qui les amèneront en des points différents de la région des variations séculaires de la dureté. Le métal trempé aura, comme le métal chaud dont il est issu, une structure hétérogène, d'autant plus marquée qu'à température élevée le métal a été plus complètement brûlé, c'est-à-dire que cette température était plus élevée et que le métal y a séjourné plus longtemps. Ces propositions sont conformes aux observations des métallurgistes (*).

Au lieu de tremper raide le métal chauffé, de telle sorte que le point figuratif de chaque élément de volume suive une simple descendante, on peut le refroidir plus lentement; le refroidissement sera, dès lors, moins régulier; des arrêts, des alternatives plus ou moins marquées dans le refroidissement et l'échauffement de chaque élément de volume pourront se produire; la trajectoire du point figuratif de chaque élément sera plus ou moins compliquée et, selon la forme de cette trajectoire à l'intérieur de la région NIN′, la dureté de cet élément s'abaissera plus ou moins au-dessous de la dureté qu'il aurait possédée s'il avait été trempé raide; la trempe sera plus ou moins *douce*.

La lenteur du refroidissement du métal n'a pas la même influence selon la partie de la région NIN′ où se trouve la trajectoire du point figuratif. Pour étudier clairement cette influence, supposons que le refroidissement s'arrête pendant un temps donné, cinq minutes par exemple, et que, pendant ce temps, la température soit maintenue *physiquement* constante. Si cet arrêt a lieu pendant que le point figuratif se trouve dans la région comprise entre les lignes IN′, Iδ, il se produira, pendant ce temps, une diminution accélérée de la dureté, un phénomène de recalescence; l'effet produit sera d'autant plus grand que, pendant l'arrêt, le point figuratif sera plus voisin de la ligne Iδ. Si l'arrêt a lieu pendant que le point figuratif se trouve dans la

(*) Voyez, en particulier, en ce qui concerne le fer, H. Moreillon, *Expériences pratiquées pour étudier les modifications moléculaires dans le fer*. (Le génie civil, t. XXI, p. 363; 1892.)

région située au-dessous de la ligne $I\delta$, il se produira, pendant ce temps, une diminution de la dureté d'autant plus faible que le point figuratif sera plus éloigné de la ligne $I\delta$. Si, enfin, l'arrêt a lieu lorsque le point figuratif a pénétré dans la région des variations séculaires de la dureté, il n'y a plus aucune influence. On voit par là que, si l'on veut que la pièce trempée présente une dureté notable, il faut éviter tout arrêt de quelque durée, dans le refroidissement de cette pièce, tandis que le point figuratif franchit la région qui s'étend de la ligne IN' jusqu'à une certaine distance au-dessous de la ligne $I\delta$; la rapidité du refroidissement a, ensuite, une importance beaucoup moindre. Ce fait a été mis nettement en évidence par une intéressante expérience de MM. Jarolimek et Ackermann (*). Si l'on chauffe un barreau d'acier au rouge blanc, qu'on le trempe dans un bain métallique porté à la température de 300° ou 400°, et qu'on le laisse ensuite refroidir lentement jusqu'à la température ordinaire, on constate que ce barreau a pris une dureté très notable; si, au contraire, on laisse le barreau se refroidir lentement jusqu'à 300° ou 400° et qu'on le plonge alors dans l'eau froide, on ne lui communique aucune dureté appréciable.

Les métallurgistes réservent en général le nom de *trempe* au grand accroissement de dureté qu'éprouve un métal doux lorsque, après avoir élevé sa température au delà de H, on laisse à l'accroissement accéléré de la dureté le temps de se produire plus ou moins complètement avant de refroidir brusquement le métal; il est évident, en effet, que, par ce procédé, le point figuratif, parti d'une position plus élevée dans la région NIN', reviendra à une position notablement plus élevée. Il est clair que *la trempe, entendue dans ce sens, ne se produira pas si le métal n'a pas été porté à une température supérieure à* H; M. Metclaf (**), M. Howe (***) ont vérifié cette loi, que M. Osmond admet également.

D'ailleurs, pour obtenir la trempe ainsi entendue, il sera nécessaire, mais non suffisant, que le métal ait été porté à une température supérieure à H; il faudra encore qu'il ait été maintenu un temps suffisant à cette température

(*) Jarolimek et Ackermann, *Zeitschrift für das chemische Grossgewerbe*, 1880.
(**) Metclaf, *Metallurgical Review*, vol. I, p. 246.
(***) H.-M. Howe, *La métallurgie de l'acier*, p. 24. Paris, 1894.

physiquement constante pour qu'un grand nombre de petites oscillations de la température se soient produites, entraînant un accroissement notable de la valeur x ; ce temps d'exposition à la température à partir de laquelle le refroidissement rapide doit commencer, devra en général être prolongé d'autant plus que la température en question est moins élevée. M. G. Charpy (*) a trouvé que la trempe ne durcissait pas notablement un acier exposé une heure à 700° ou cinq minutes à 750°, mais que la dureté était considérable après trente minutes de chauffe à 750° ou après cinq minutes de chauffe à 800°.

Mais ce serait une erreur de croire qu'il est impossible de faire croître la variable x, relative à un métal, autrement qu'en portant ce métal à une température supérieure à H. Si l'on prend un métal dont le point figuratif P_0 (fig. 31) soit situé assez bas dans la région NIN′ du plan, si l'on élève la température de T à τ, de manière à amener le point figuratif en ϖ dans la région comprise entre les lignes ss'I et HI, et si l'on abaisse ensuite la température de τ à T, le point figuratif reviendra en P_1, au-dessus de P_0 : le métal se sera durci. Cet effet sera encore plus marqué si, tandis que le métal était porté à la température physiquement constante τ, on le laisse subir les petites oscillations de cette température pendant un temps suffisamment long ; le point figuratif tendra vers le point ϖ', qui a pour abscisse τ sur la ligne NI ; après refroidissement, il viendra dans une position qui a pour limite P_1'. Ces phénomènes semblent correspondre aux *doubles trempes* imaginées par M. Walrand et étudiées par M. A. Le Chatelier (**).

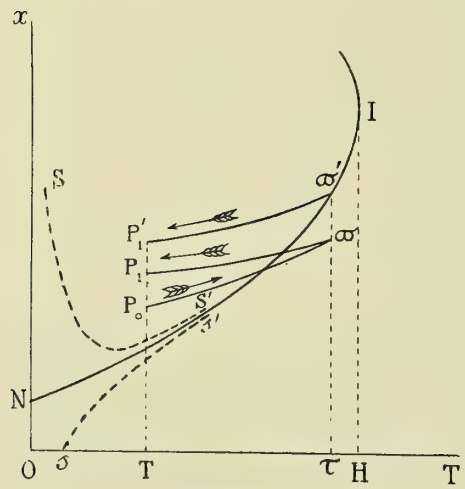


Fig. 31.

De même que les métallurgistes réservent le nom de trempe au refroidissement rapide d'un métal qui a subi un commencement de brûlure, ils

(*) G. Charpy, *Comptes rendus*, t. CXVIII, p. 418 ; 1894.
(**) H. Le Chatelier, *Revue générale des sciences*, p. 21 ; 1897.

réservent le nom de *recuit* à un refroidissement lent, au cours duquel se produit le phénomène de la recalescence ; il n'y a alors, en général, de recuit proprement dit que si le métal a été chauffé au préalable à une température supérieure à H ; mais on peut, comme nous l'ont montré les expériences de MM. Strouhal et Barus décrites au § 2, diminuer la dureté d'un métal en amenant le point figuratif dans la région comprise entre les lignes SMS'I et ∂I et en maintenant la température constante pendant un certain temps ; un tel recuit a reçu le nom de *revenu* ou de *tempérament*.

M. Osmond (*) a montré que le revenu du fer ou de l'acier trempé était accompagné d'un dégagement de chaleur.

La branche IN' des états naturels et la ligne I∂ doivent se prolonger jusqu'aux températures les plus basses ; d'autre part, à une température suffisamment basse, la variation de la dureté doit être *séculaire* (selon le terme adopté par MM. Carl Barus et Vincent Strouhal) quelle que soit la valeur de x ; les deux lignes IN', I∂ doivent donc pénétrer dans la région des variations séculaires de la trempe.

La partie de la région des variations séculaires qui se trouve au-dessus de la ligne I∂ nous paraît posséder des propriétés qu'il est intéressant d'étudier.

Il est clair, tout d'abord, que pour amener dans cette région le point figuratif de l'état du métal, il aura fallu porter celui-ci à une haute température et l'y laisser un temps suffisant pour que x prenne une très grande valeur ; les corps que nous allons étudier sont donc des corps plus ou moins brûlés ; leur structure est hétérogène.

Le point figuratif d'un tel corps peut se trouver au-dessus de la ligne IN' ; dans ce cas, les oscillations petites et continuelles de la température y feront croître la variable x ; il peut se trouver au-dessous de la ligne IN', tout en étant au-dessus de la ligne I∂ ; dans ce cas, les mêmes oscillations de la température y feront sans cesse décroître la variable x ; mais, dans un cas comme dans l'autre, ces modifications seront accompagnées d'une exagération de plus en plus marquée de l'hétérogénéité du corps ; entre les *grains* durs et le *ciment* moins dur qui les relie, la différence de dureté ira croissant et

(*) Osmond, *Les transformations du fer et du carbone*. Paris, 1888.

le corps finira par devenir friable, pulvérulent. Ces transformations s'accompliront d'autant plus vite que les variations de température du corps seront plus fréquentes et plus amples.

Cette transformation graduelle, à basse température, d'un corps qui a été trop chauffé en un corps pulvérulent, semble rendre compte d'un certain nombre de faits étranges que M. Howe a rangés sous ce titre : *Les caprices de l'acier* (*); un commencement de brûlure au cours du travail des tôles d'acier qui sont ultérieurement devenues fragiles, peut être au moins soupçonné dans la plupart des cas cités par M. Howe.

Parmi ces cas, il en est un qui est caractéristique: c'est celui que l'auteur nomme *cas de Maginnis ;* une grande élévation de température pendant le travail est rendue extrêmement vraisemblable par la discussion à laquelle M. Howe soumet ce cas; d'autre part, les oscillations amples et nombreuses de la température ne sont pas douteuses, puisque les tôles en question avaient servi à fabriquer les chaudières de deux steamers, et que ces chaudières avaient fonctionné pendant deux ans et demi; au bout de ce temps, ces tôles étaient devenues d'une fragilité extraordinaire.

Le verre présente des propriétés analogues ; voici une observation, que je dois à M. Ditte, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, et qui peut être rapprochée des observations relatives aux tôles d'acier, citées par M. Howe : Une plaque épaisse de verre était, depuis de longues années, placée sur un poêle et subissait, par conséquent, des variations quotidiennes notables de température; sans avoir changé d'aspect extérieur, ce verre s'effritait entre les doigts comme du biscuit de mer.

Ces dévitrifications *se propagent,* en général, de la partie du verre dont l'altération est déjà avancée à la partie qui est encore saine; lorsque les points figuratifs des diverses parties de ce verre se trouvent dans la région comprise entre les lignes IN′ et Iδ, le mécanisme de cette propagation se comprend aisément si l'on se souvient :

1° Que l'altération d'un élément de volume se produit d'autant plus vite que cette altération est déjà plus avancée;

(*) H.-M. Howe, *La métallurgie de l'acier,* p. 295. Paris, 1894.

2° Que cette altération dégage de la chaleur;

3° Que, toutes choses égales d'ailleurs, la vitesse de cette transformation croît avec la température.

Considérons, à la limite de la partie dévitrifiée et de la partie saine, un élément de volume à demi altéré; les oscillations de la température accélèrent de plus en plus la transformation de cet élément, qui s'achèvera très vite; au cours de cet achèvement rapide de la transformation, se dégagera une quantité de chaleur qui élèvera momentanément la température des parties voisines et, par là, contribuera à avancer l'altération dont elles sont le siège; celles-ci agiront de même, à leur tour, sur les parties qui leur sont contiguës, et la dévitrification *fera tache d'huile*. Toutefois, si certaines parties du verre ont leur point figuratif au-dessous de la ligne $l\delta$, ces parties formeront comme une sorte de barrière à la propagation de la dévitrification.

Cette propagation rappelle quelque peu, par son mécanisme, la propagation d'une onde explosive dans un mélange détonant; l'analogie peut parfois être telle que la dévitrification, partant d'un point soudainement modifié et se propageant dans toute la masse, simule une véritable explosion; tout le monde a vu éclater une larme batavique dont on brise la pointe; or, la larme batavique réunit bien toutes les conditions que suppose notre explication : haute température initiale, trempe brusque, dureté extrême, grandes variations de dureté entre ses diverses couches (*). Les aciers friables dont

(*) Depuis la présentation du présent travail à l'Académie, nous avons eu connaissance d'un mémoire (*Bulletins of the United States geological Survey*, vol. VII, p. 98; 1888) où MM. C. Barus et V. Strouhal étudient les propriétés des larmes bataviques. Ils ont trouvé, entre autres résultats, qu'une larme batavique réchauffée à 450° reprend assez d'homogénéité pour redevenir isotrope, et perd, en même temps, ses propriétés explosives; un séjour prolongé à 200° est, au contraire, sans effet. On explique sans peine ces observations en admettant qu'au-dessous de 200° les points figuratifs des diverses parties de la lame demeurent dans la région des recuits séculaires; tandis qu'en élevant la température, on fait passer ces points figuratifs dans la région de recalescence. La température étant alors physiquement constante, la larme éprouve un recuit, d'abord accéléré et accompagné d'un accroissement d'hétérogénéité, puis retardé et accompagné d'un retour à l'homogénéité. On explique de même comment, dans une pièce de verre trempé, les parties dont le refroidissement a été assez lent sont sensiblement homogènes et isotropes, et ne sont pas explosives.

nous avons parlé d'après M. Howe peuvent également donner lieu à des ruptures quasi explosives que les métallurgistes nomment *tapures*.

On voit que la théorie développée dans ce Chapitre fournit au moins une première esquisse, sinon une représentation détaillée, des phénomènes qui accompagnent la trempe et le recuit; la figure 32 résume cette théorie.

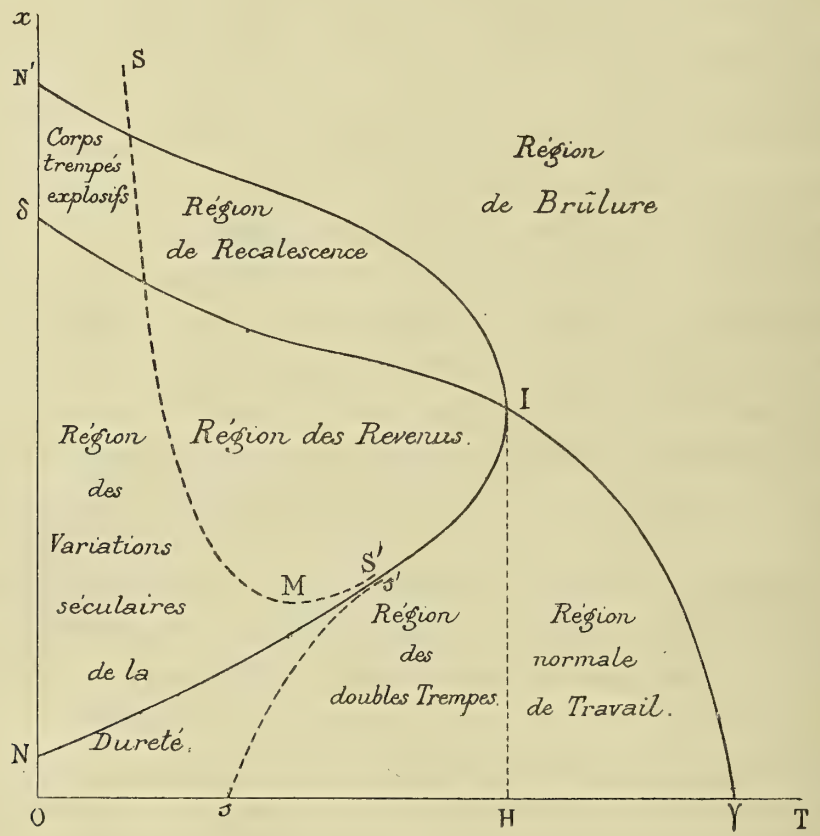


Fig. 32.

Nous allons voir, au Chapitre suivant, que les mêmes principes rendent compte des principaux effets de l'écrouissage.

CHAPITRE IV.

L'ÉCROUISSAGE DES MÉTAUX.

§ 1. — *Théorèmes généraux.*

Dans le Chapitre précédent, pour présenter l'étude de la trempe et du recuit avec plus de clarté, il nous a été nécessaire de la simplifier; nous avons supposé qu'une seule variable normale suffisait à définir l'état du corps, à savoir le rapport x qui indique, en chaque masse élémentaire, la proportion relative des deux substances dont la transformation l'une dans l'autre donne lieu aux phénomènes de trempe et de recuit. En réalité, il n'en est jamais ainsi : en même temps qu'il se trempe et se recuit, le corps change de volume et de forme, en sorte que pour définir complètement l'état d'un élément quelconque de ce corps, il ne suffit pas de connaître sa température T et la valeur de x qui fixe son état chimique; il faut encore connaître les valeurs des variables par lesquelles, en élasticité, on représente les déformations subies par une masse élémentaire.

Or le problème se trouve par là singulièrement compliqué.

Pour mettre en lumière au moins l'une des complications qui surgissent alors, adressons-nous à un cas qui, bien que plus complexe que celui qui a fait l'objet du Chapitre précédent, présente cependant encore une simplicité idéale; supposons qu'à la température T et à la variable x, il soit suffisant d'adjoindre, pour définir complètement l'état du corps, une seule variable élastique l et que les deux variables x et l jouent le rôle de variables privilégiées (*); imaginons, par exemple, pour fixer les idées, que notre

(*) Voyez notre troisième mémoire : *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis*. § 3.

corps ait, comme au Chapitre II, la forme d'un fil homogène tendu et que l en soit la dilatation longitudinale. Alors, en désignant par $\mathcal{F}(x, l, \mathrm{T})$ le potentiel thermodynamique interne de la masse du cylindre qui, dans l'état originel, occupait l'unité de volume, par Θ la tension par unité d'aire de la section initiale, nous aurons à écrire, pour définir toute modification élémentaire réalisable, les deux égalités suivantes :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} d\Theta &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l^2}\, dl + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l \partial x}\, dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial l \partial \mathrm{T}}\, d\mathrm{T} + g_l(l, x, \mathrm{T}, \Theta)\,|dl|, \\ 0 &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial l}\, dl + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial \mathrm{T}}\, d\mathrm{T} + g_x(l, x, \mathrm{T}, \Theta)\,|dx|. \end{aligned} \right.$$

Dans le mémoire qui fait suite à celui-ci, nous nous occuperons tout spécialement de l'étude de systèmes dont les modifications réalisables sont définies par deux telles équations; le Chapitre III de ce mémoire sera, en particulier, consacré à la discussion des relations (1); on verra alors combien cette discussion est pénible et combien sont réduits les résultats que l'on en peut déduire.

Le problème, au contraire, se simplifie beaucoup si le coefficient d'hysteresis $g_l(l, x, \mathrm{T}, \Theta)$ est égal à 0; dans ce cas, en effet, ainsi que nous l'avons expliqué dans notre troisième mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis,* la première relation (1) doit être remplacée par l'équation en termes finis que donne la thermodynamique classique et ces relations (1) doivent être remplacées par les deux relations

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \Theta &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l}, \\ 0 &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial l}\, dl + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial \mathrm{T}}\, d\mathrm{T} + g_x(l, x, \mathrm{T}, \Theta)\,|dx|. \end{aligned} \right.$$

Un système dont les modifications élémentaires seraient régies par ces relations serait tel qu'aucune dilatation permanente ne s'y présenterait si la constitution chimique, marquée par la variable x, n'éprouvait elle-même une variation permanente; aucun métal susceptible de trempe ne se comporte

rigoureusement comme le supposent ces relations; mais il est certains phénomènes dont elles suffisent, tout au moins, à tracer une théorie approchée.

Ces égalités (2) peuvent être très aisément traitées en suivant la méthode qui nous a servi, en un problème analogue, au § 2 du Chapitre I^er^ de notre second mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis*.

Supposons que l'on résolve la première équation (2) par rapport à l; elle deviendra

$$(3) \quad \ldots \quad l = l(x, \Theta, T).$$

Posons

$$(4) \quad \ldots \quad \Phi(x, \Theta, T) = \mathcal{F}[l(x, \Theta, T), x, T] - \Theta l(x, \Theta, T);$$

$\Phi(x, \Theta, T)$ sera le *potentiel thermodynamique du système sous la tension constante* Θ.

Posons, en outre,

$$(5) \quad \ldots \quad f(x, \Theta, T) = g[l(x, \Theta, T), x, \Theta, T].$$

Les relations (2) pourront être remplacées par les suivantes :

$$(6) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x^2}\,dx + \dfrac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x\,\partial\Theta}\,d\Theta + \dfrac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x\,\partial T}\,dT + f(x, \Theta, T)|dx| = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi(x, \Theta, T)}{\partial\Theta} = -l. \end{cases}$$

La première égalité permet de déterminer la variation dx que x éprouve par suite de variations données de la tension Θ et de la température T. Une fois cette variation déterminée, la seconde égalité (6) détermine sans peine la variation correspondante de l.

Il est facile, en particulier, de suivre au moyen de la première égalité (6) les variations qu'éprouve la variable x, c'est-à-dire la dureté, lorsqu'on fait

varier la température T, en maintenant à la tension Θ une valeur invariable. Elle devient, en effet, dans ce cas

$$\frac{\partial^2\Phi(x, T)}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2\Phi(x, T)}{\partial x\partial T}dT + f(x, T)|dx| = 0.$$

Sauf la substitution de $\Phi(x, T)$ à $\mathcal{F}(x, T)$, c'est l'équation (1) du Chapitre précédent.

Nous nous proposons maintenant d'étudier les phénomènes qui se produisent lorsqu'on fait varier la tension Θ en laissant invariable la température T, phénomènes régis par les équations

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x^2}dx + \dfrac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x\partial\Theta}d\Theta + f(x, \Theta, T)|dx| = 0, \\ dT = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi(x, \Theta, T)}{\partial\Theta} = -l. \end{cases}$$

Imaginons que, d'une manière quelconque, on ait fait passer le système d'un état où, sous la tension Θ_0, à la température T, il avait la composition x à un autre état où, à la même température T, avec la même composition x, il est soumis à une tension différente Θ_1; l a, dans le premier cas, la valeur l_0 et, dans le second, la valeur l_1; nous formulerons l'HYPOTHÈSE suivante : $(l_1 - l_0)$ *a le même signe que* $(\Theta_1 - \Theta_0)$.

En vertu de la dernière égalité (7), cette hypothèse peut se traduire ainsi : Quels que soient Θ_0, Θ_1, la différence

$$\frac{\partial\Phi(x, \Theta_0, T)}{\partial\Theta_0} - \frac{\partial\Phi(x, \Theta_1, T)}{\partial\Theta_1}$$

a le signe de $(\Theta_1 - \Theta_0)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait constamment

$$(8)\quad \frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial\Theta^2} < 0.$$

Ce premier point acquis, considérons deux états où le corps, porté à la température T et soumis à la tension Θ, offre deux compositions différentes, x_0, x_1 ; les valeurs de l, en ces deux états, sont l_0, l_1, et nous avons, en vertu de la troisième relation (7),

$$l_1 - l_0 = \frac{\partial \Phi(x_0, \Theta, T)}{\partial \Theta} - \frac{\partial \Phi(x_1, \Theta, T)}{\partial \Theta}.$$

Supposons que, dans la région où le système est étudié, $\frac{\partial^2 \Phi(x, \Theta, T)}{\partial x \partial \Theta}$ ait un signe invariable, et nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Si l'on a l'inégalité

$$(9) \quad \dots \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, \Theta, T)}{\partial \Theta \partial x} > 0,$$

le fil, porté à une température donnée et soumis à une tension donnée, est d'autant plus court que la valeur de x *est plus grande.*

Si, au contraire, on a l'inégalité

$$(9^{bis}) \quad \dots \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, \Theta, T)}{\partial \Theta \partial x} < 0,$$

le fil, porté à une température donnée et soumis à une tension donnée, est d'autant plus long que la valeur de x *est plus grande.*

Nous allons maintenant admettre la nouvelle HYPOTHÈSE que voici :

Les changements isothermiques de constitution chimique du système vérifient la loi du déplacement de l'équilibre par variation de la tension.

Plus explicitement, cette hypothèse peut s'énoncer ainsi :

Si le système étudié vérifie l'égalité (9), *tout accroissement isothermique de la tension est accompagné d'une diminution de la valeur de* x ; *si, au contraire, le système étudié vérifie l'égalité* (9^{bis}), *tout accroissement isothermique de la tension est accompagné d'une augmentation de la valeur de* x.

Le produit $d\Theta dx$ est donc négatif dans le premier cas et positif dans le second, en sorte que l'hypothèse précédente se traduit, en tout état de cause, par l'inégalité

$$(10) \quad \frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial\Theta\partial x} d\Theta dx < 0.$$

Mais dx et $d\Theta$ vérifient la première égalité (7), égalité d'où nous déduisons sans peine

$$\left[\frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x^2} + f(x, \Theta, T)\frac{|dx|}{dx}\right]dx^2 = -\frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial\Theta\partial x} d\Theta dx.$$

Pour que l'inégalité (10) soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait, quel que soit dx,

$$\frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{dx^2} + f(x, \Theta, T)\frac{|dx|}{dx} > 0,$$

ce qui équivaut aux deux inégalités

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x^2} + f(x, \Theta, T) > 0, \\ \dfrac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x^2} - f(x, \Theta, T) > 0, \end{cases}$$

qui entraînent cette troisième :

$$(11^{bis}) \quad \frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x^2} > 0.$$

Il est aisé de voir que les hypothèses faites entraînent la conséquence suivante :

Toute modification isothermique réalisable est soumise à la loi du déplacement isothermique (*) *de l'équilibre, que traduit l'inégalité*

$$(12) \quad d\Theta dl > 0.$$

(*) Au sujet de la différence qui existe entre la *loi du déplacement de l'équilibre par variation de la tension* et la *loi du déplacement isothermique de l'équilibre*, voir : P. Duhem, *Traité élémentaire de mécanique chimique*, t. I, p. 142.

Les égalités (7) donnent, en effet,

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+f\frac{|dx|}{dx}\right)dx+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}d\Theta=0,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}dx+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta^2}d\Theta=-dl.$$

Multiplions la première de ces égalités par dx, la seconde par $d\Theta$, et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons :

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+f\frac{|dx|}{dx}\right)dx^2-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta^2}d\Theta^2=d\Theta dl.$$

En vertu des inégalités (8) et (11), cette égalité entraîne l'inégalité (12).

Des inégalités (10) et (12), on peut encore conclure l'inégalité suivante, vérifiée en toute modification isothermique,

$$(13)\quad\ldots\ldots\ldots\quad\frac{\partial^2\Phi(x,\Theta,T)}{\partial x\partial\Theta}dldx<0.$$

Proposons-nous d'étudier le tracé d'une modification isothermique soit sur le plan ΘOl, soit sur le plan ΘOx.

L'inégalité (12) nous montre que, dans le plan ΘOl, il existe deux catégories de lignes représentant les modifications isothermiques; les unes, correspondant aux valeurs croissantes de Θ, montent de gauche à droite; les autres, correspondant aux valeurs décroissantes de Θ, descendant de gauche à droite. Tout cycle fermé, formé d'une seule boucle, est *sinistrorsùm*.

En ce qui concerne le plan ΘOx, deux cas sont à distinguer :

PREMIER CAS. — *On a*

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta\partial x}>0.$$

Dans ce cas, en vertu de l'inégalité (10), il existe, dans le plan ΘOx, deux catégories de lignes qui représentent des modifications isothermiques : les unes, correspondant aux valeurs croissantes de Θ, descendent de gauche

à droite; les autres, correspondant aux valeurs décroissantes de Θ, montent de droite à gauche. Tout cycle fermé, formé d'une seule boucle, est *dextrorsùm*.

SECOND CAS. — *On a*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta \partial x} < 0.$$

Dans ce cas, en vertu de l'inégalité (10), il existe, dans le plan $\Theta O x$, deux catégories de lignes qui représentent des modifications isothermiques; les unes, correspondant aux valeurs croissantes de Θ, montent de gauche à droite; les autres, correspondant aux valeurs décroissantes de Θ, descendent de droite à gauche. Tout cycle fermé, formé d'une seule boucle, est *sinistrorsùm*.

Dans le plan $\Theta O x$, la *ligne des états naturels* est représentée par l'équation

$$f(x, \Theta, T) = 0. \tag{14}$$

Dans le plan $\Theta O l$, elle est représentée par l'équation que l'on obtient en éliminant x entre les deux équations

$$\begin{cases} f(x, \Theta, T) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x, \Theta, T)}{\partial \Theta} = -l. \end{cases} \tag{15}$$

De la première égalité (7), jointe à l'inégalité (11^{bis}), on déduit sans peine la conséquence suivante :

Si le système est quelque peu écarté de l'état naturel relatif à la tension qui le sollicite et à la température à laquelle il est porté, les petites variations qu'éprouvent cette température et cette tension lorsqu'on les maintient physiquement constantes, font tendre le système vers l'état naturel considéré ou l'en éloignent selon qu'en cet état naturel $\frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial x}$ *est positif ou négatif.*

Nous pouvons donc distinguer les *états naturels stables*, pour lesquels on a

$$\frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial x} > 0, \tag{16}$$

et les *états naturels instables,* pour lesquels on a

$$(16^{bis}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial x} < 0.$$

Les premiers doivent vérifier la loi du déplacement de l'équilibre par variation de la tension; si l'on désigne par Δx, $\Delta\Theta$ les composantes d'un élément de la partie stable de la ligne des états naturels, on doit avoir

$$(17) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x \partial\Theta} \Delta x \Delta\Theta < 0.$$

Premier cas. — *On a*

$$\frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x \partial\Theta} > 0.$$

Dans le plan $\Theta O x$, la partie de la ligne des états naturels qui représente des états stables descend de gauche à droite.

Second cas. — *On a*

$$\frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x \partial\Theta} < 0.$$

Dans le plan $\Theta O x$, la partie de la ligne des états naturels qui représente des états stables monte de gauche à droite.

Mais l'égalité (14) donne

$$\frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial\Theta} \Delta x = 0.$$

Comme on a, pour tout état naturel stable,

$$(18) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial x} > 0,$$

on voit que l'inégalité (17) peut être remplacée par la suivante :

$$(19) \quad \ldots \ldots \ldots \frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x \partial\Theta} \frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial\Theta} > 0.$$

Il est alors aisé de voir que les états naturels stables vérifient la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, exprimée par l'inégalité

(20) . . . . . $\Delta\Theta\Delta l > 0.$

Les égalités (15) donnent, en effet,

$$\frac{\partial f(x,\Theta,T)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,\Theta,T)}{\partial\Theta}\Delta\Theta = 0,$$
$$\frac{\partial^2\Phi(x,\Theta,T)}{\partial x\partial\Theta}\Delta x + \frac{\partial^2\Phi(x,\Theta,T)}{\partial\Theta^2}\Delta\Theta + \Delta l = 0.$$

Multiplions les deux membres de la première de ces égalités par $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}\Delta x$, les deux membres de la seconde par $\frac{\partial f}{\partial\Theta}\Delta\Theta$, et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(21)\qquad \frac{\partial f(x,\Theta,T)}{\partial\Theta}\Delta\Theta\Delta l = \frac{\partial f(x,\Theta,T)}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi(x,\Theta,T)}{\partial x\partial\Theta}(\Delta x)^2 - \frac{\partial f(x,\Theta,T)}{\partial\Theta}\frac{\partial^2\Phi(x,\Theta,T)}{\partial\Theta^2}(\Delta\Theta)^2.$$

En vertu des inégalités (8), (18) et (19), cette égalité entraîne l'inégalité (20), qui peut encore se traduire par l'énoncé suivant :

Dans le plan ΘOl, la portion de la ligne des états naturels qui représente des états stables monte de gauche à droite.

Considérons maintenant les états naturels instables, pour lesquels on a

$$(18^{bis}) \ldots\ldots\ldots \frac{\partial f(x,\Theta,T)}{\partial x} < 0.$$

Nous admettrons que la loi de variation de ces états est en contradiction avec la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, c'est-à-dire que l'on a

(22) . . . . . $\Delta\Theta\Delta l < 0,$

ce qui peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Dans le plan ΘOl, la portion de la ligne des états naturels qui représente des états instables descend de gauche à droite.

On peut encore écrire ici l'égalité (21), qui peut se mettre sous cette forme:

$$\frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial x}\left[\Delta\Theta\Delta l + \frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial\Theta^2}(\Delta\Theta)^2\right] = \frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x\partial\Theta}\frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial x}(\Delta x)^2.$$

Si l'on tient compte des inégalités (8), (18^{bis}) et (22), on voit que cette égalité exige que l'inégalité (19) soit encore vérifiée.

Or on a

$$\frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial\Theta}\Delta\Theta = 0.$$

En vertu des inégalités (18^{bis}) et (19), cette égalité entraîne l'inégalité

$$(17^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial^2\Phi(x, \Theta, T)}{\partial x\partial\Theta}\Delta x\Delta\Theta > 0.$$

Les états naturels instables contredisent à la loi du déplacement de l'équilibre par variation de la tension.

Cette proposition entraîne les conséquences suivantes :

PREMIER CAS. — *On a*

$$\frac{\partial^2\Phi(x, \Theta)}{\partial x\partial\Theta} > 0.$$

Dans le plan $\Theta O x$, la portion de la ligne des états naturels qui représente des états instables monte de gauche à droite.

SECOND CAS. — *On a*

$$\frac{\partial^2\Phi(x, \Theta)}{\partial x\partial\Theta} < 0.$$

Dans le plan $\Theta O x$, la portion de la ligne des états naturels qui représente des états instables descend de droite à gauche.

L'inégalité (19) ayant lieu en toutes circonstances, on voit que, pour tout

état naturel, $\frac{\partial f(x, \Theta, T)}{\partial \Theta}$ a le même signe. On en conclut sans peine le théorème suivant :

Pour un système de valeurs données de x, T, il existe au plus un état naturel du système.

Ces divers renseignements vont nous permettre de tracer la ligne des états naturels soit dans le plan $\Theta O l$, soit dans le plan $\Theta O x$.

Dans le plan $\Theta O l$, la disposition de la ligne des états naturels se discutera par une suite de considérations analogues à celles qui ont été exposées au Chapitre II.

Si le système doit présenter à la fois des états naturels instables et des états naturels stables, deux cas pourront se présenter : ou bien, pour toute tension inférieure à une certaine limite H, il existera un état naturel stable et un état naturel instable, tandis qu'une tension supérieure à H ne présentera plus aucun état naturel ; ou bien, il n'existera aucun état naturel tant que la tension demeurera inférieure à H, et, au contraire, pour toute tension supérieure à H, il existera un état naturel stable et un état naturel instable.

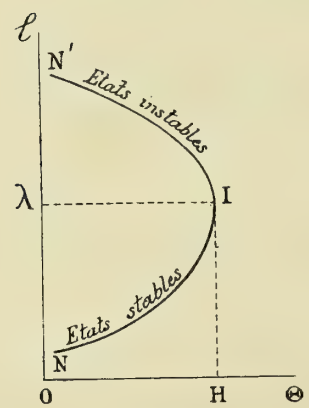


Fig. 33.

Étudions seulement le premier cas ; ce qui concerne le second cas se déduirait sans peine de ce que nous allons dire du premier.

La disposition de la ligne des états naturels dans le plan $\Theta O l$ est celle qu'offre la figure 33 ; la branche NI, qui monte de gauche à droite, représente les états naturels stables ; la branche N'I, qui descend de gauche à droite, représente les états naturels instables.

Pour tracer la ligne des états naturels dans le plan $\Theta O x$, il faut distinguer deux cas :

PREMIER CAS. — *On a*

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, \Theta, T)}{\partial x \partial \Theta} > 0$$

Dans ce cas, aux lignes NI, IN' du plan $\Theta O l$, dont la première monte de

gauche à droite et la seconde de droite à gauche, doivent correspondre, dans le plan ΘOx, deux lignes ni, in', dont la première descend de gauche à droite et la seconde de droite à gauche; la ligne des états naturels doit avoir la disposition qu'indique la figure 34.

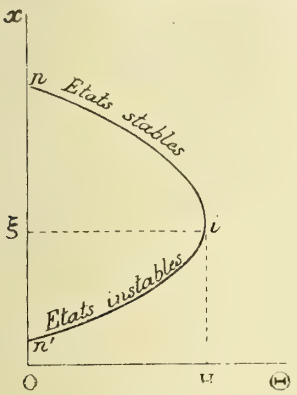


Fig. 34.

Second cas. — *On a*

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, \Theta, T)}{\partial x \partial \Theta} < 0.$$

Dans ce cas, aux lignes NI, IN′ du plan ΘOl, doivent correspondre, dans le plan ΘOx, deux lignes ni, in', dont la première monte de gauche à droite, et la seconde de droite à gauche; la ligne des états naturels doit avoir la disposition qu'indique la figure 35.

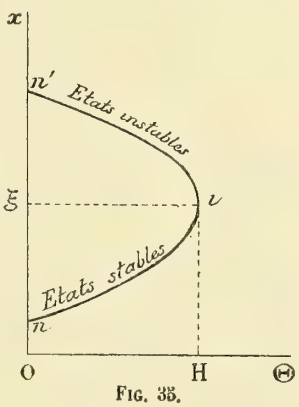


Fig. 35.

§ 2. — *L'écrouissage des métaux.*

Faisons usage des principes développés au paragraphe précédent pour expliquer les divers phénomènes qui accompagnent l'écrouissage des métaux.

« La trempe et l'écrouissage, dit M. Osmond (*), font subir aux propriétés physiques des fers carburés des modifications tellement analogues que les principales théories proposées rapportent à un seul phénomène les effets de ces deux actions. »

Soit donc x la variable de nature chimique dont les variations, produites par les variations de la température tandis que les actions mécaniques extérieures demeurent invariables, expliquent les phénomènes de la trempe et du recuit; lorsque des variations des actions mécaniques, accomplies à température constante, feront croître la valeur de x, nous dirons qu'elles *écrouissent* le métal.

(*) Osmond et Werth, *Théorie cellulaire des propriétés de l'acier*. (Annales des mines, 8e sér., t. VIII, p. 35; 1885.)

Dans les divers cas que nous avons étudiés, tout accroissement virtuel de la variable x, sous tension constante et à température constante, était accompagné d'une absorption de chaleur. Tous ces métaux possèdent également une même propriété : un fil, soumis à une tension donnée et porté à une température donnée, est d'autant plus long que la valeur de x est plus grande. Ce fil se trouve donc dans le cas que caractérise l'inégalité

$$(9^{bis}) \quad \dots \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, \Theta, T)}{\partial x \partial \Theta} < 0$$

et auquel se rapportent les figures 33 et 35 (*).

L'aspect de la figure 35, comparé à celui de la figure 27, nous montre que l'on pourra répéter mot pour mot, au sujet des variations que x éprouve lorsque l'on fait varier la tension Θ en maintenant la température T invariable, — c'est-à-dire au sujet de l'*écrouissage par traction*, — ce que nous avons dit au sujet des variations que x éprouve, sous tension constante, par l'effet des changements survenus dans la température T, — c'est-à-dire au sujet des phénomènes de *trempe* et de *recuit*. Il suffira de reprendre toutes les considérations établies au Chapitre précédent, en remplaçant simplement la température T par la tension Θ.

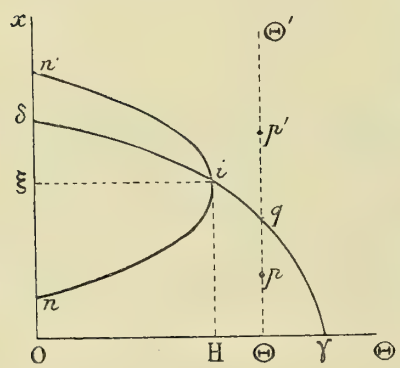


Fig. 36.

En particulier, il est intéressant d'étudier ce qui se produit lorsque l'on soumet le fil à l'action prolongée d'une charge physiquement constante et supérieure à H.

Pour discuter complètement cette question, il convient de tracer, dans le plan $\Theta O x$ (fig. 36), la ligne $\gamma i \delta$, analogue à la ligne $\gamma l \delta$ du plan TOx que nous avons constamment considérée au Chapitre précédent.

(*) Les recherches récentes de M. C.-Éd. Guillaume (*Comptes rendus*, t. CXXIV, pp. 176, 732 et 1515; 1897) montrent que l'inverse a lieu pour le nickel et les aciers au nickel qui renferment une forte proportion de ce dernier métal; la traction, et les actions mécaniques analogues doivent alors produire sur ces corps des effets inverses de la trempe; c'est ce que M. Cantone a constaté pour le nickel (*Rendiconti dell' Accad. dei Lincei*, vol. IV, p. 31; 1895).

Prenons alors une tension physiquement constante Θ, supérieure à H ; supposons que a soit l'amplitude moyenne des oscillations de la tension autour de la valeur Θ, et n le nombre moyen des oscillations dans l'unité de temps ; supposons n et a à peu près invariables.

Tant que le point figuratif p est au-dessous du point q où la ligne $\Theta\Theta'$ rencontre la ligne $i\gamma$, la variable x augmente par les oscillations de la tension ; mais cette augmentation est soumise aux deux lois suivantes :

1° La vitesse avec laquelle x croît va en s'atténuant ;

2° Les parties du fil où x a la plus grande valeur sont aussi celles où x croît le moins vite, en sorte que les différences de dureté qui préexistent entre les différentes parties du fil tendent à s'atténuer.

Lorsque le point figuratif p' se trouve au-dessus du point q, la valeur de x continue à croître avec les oscillations de la tension ; mais cet accroissement est soumis aux deux lois suivantes :

1° La vitesse avec laquelle x croît va en s'accélérant ;

2° Les parties du fil où x a la plus grande valeur sont aussi celles où x croît le plus vite, en sorte que les différences de dureté qui préexistaient entre les différentes parties du fil vont en s'exagérant ; le fil écroui aura une structure hétérogène.

On peut dire que le corps subit une véritable *brûlure* par l'effet de la tension, sans élévation de température.

Voyons maintenant quels phénomènes correspondront à ces divers changements de la variable x, si l'on observe les dilatations linéaires du fil.

Il est déjà clair que les allongements que la tension provoque, dans un fil dénué de déformations élastiques permanentes, mais susceptible d'écrouissage, ont les plus étroites analogies avec les allongements que la tension détermine dans un fil dénué de changement d'état chimique, mais susceptible de modifications élastiques permanentes. Toutefois, entre les deux phénomènes, il existe certaines différences que nous allons mettre en évidence.

Supposons le fil porté à une température invariable et soumis à une

tension physiquement invariable Θ_0; soient n et a le nombre moyen par unité de temps et l'amplitude moyenne de la tension. Supposons ces nombres sensiblement invariables : x croît avec une valeur moyenne u, donnée par l'égalité suivante, analogue à l'égalité (6) du Chapitre II :

$$(23) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u = -2na \frac{f(x, \Theta_0)}{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 - [f(x, \Theta_0)]^2}.$$

L'*accélération moyenne* de ce changement d'état sera

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x},$$

en sorte que l'on aura

$$(24) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\frac{du}{dt}}{u} = \frac{\partial u}{\partial x} = -2na \frac{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial x} - 2f\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} + f^2\frac{\partial f}{\partial x}}{\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 - f^2\right]^2}.$$

La ligne $\gamma i\delta$ a pour équation

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial x} - 2f\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} + f^2\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Le premier membre de l'égalité (25), positif au-dessous de la ligne $\gamma i\delta$, est négatif au-dessus.

Désignons par v la vitesse moyenne d'allongement du fil.

La dernière égalité (7) nous donne

$$v = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial\Theta} u.$$

Nous en déduirons

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial\Theta}u^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}\frac{du}{dt}\right) = -u\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial\Theta}u + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

et aussi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial\Theta}u + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Nous aurons donc

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}\frac{\frac{dv}{dt}}{v}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial\Theta}u+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ou bien, en vertu des égalités (23) et (24),

$$(26)\quad -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}\frac{\frac{dv}{dt}}{v}=\frac{\partial v}{\partial x}=2na\,\frac{\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2-f^2\right]\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial\Theta}f+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x}-2f\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+f^2\frac{\partial f}{\partial x}\right]}{\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2-f^2\right]^2}.$$

Considérons, dans le plan ΘOl, la ligne CD (fig. 37) définie par l'équation que l'on obtient en éliminant x entre les équations

$$(27)\quad \left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2-f^2\right]\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial\Theta}f+\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x}-2f\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+f^2\frac{\partial f}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}=0,$$

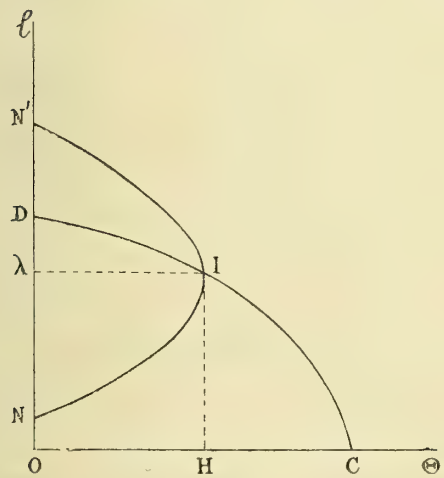


Fig. 37.

$$(28)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}=-l.$$

Cette ligne passe assurément au point I, car, en l'état du système auquel correspond ce point, on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}=0,\qquad f=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=0.$$

Elle partage le plan en deux régions. En chacune de ces régions, le résultat obtenu en substituant à x, dans le premier membre de l'équation (27), son expression en fonction de l et de Θ déduite de l'équation (28), a un signe que nous nous proposons de déterminer. Pour cela, prenons un point de la ligne NIN'. Pour un tel point, le premier membre de l'égalité (28) se réduit à

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\Theta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x}.$$

A cause de l'inégalité (9bis), il est de signe contraire $\frac{\partial f}{\partial x}$; il est donc négatif en tout point de la branche NI qui représente les états naturels stables et positif en tout point de la branche IN′ qui représente les états naturels instables.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La ligne CID *partage le plan* ΘOl *en deux régions. Dans l'une de ces régions, qui renferme la ligne* IN, $\frac{\partial v}{\partial x}$ *est constamment négatif; dans l'autre région, qui renferme la ligne* IN′, $\frac{\partial v}{\partial x}$ *est constamment positif.*

D'ailleurs, l'égalité (26), jointe à l'inégalité (9bis), permet d'énoncer également la proposition suivante :

Dans la première région, le rapport $\frac{\frac{dv}{dt}}{v}$ *est négatif; il est positif dans la seconde région.*

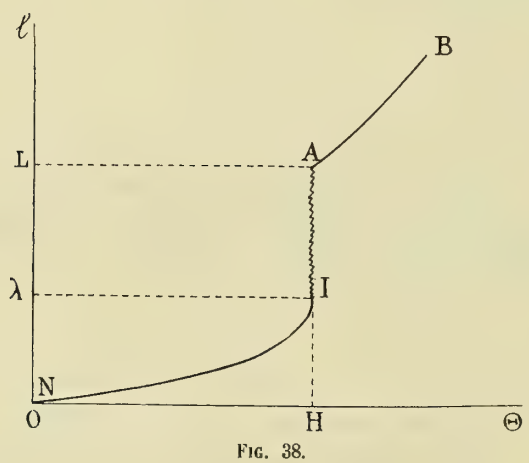


Fig. 38.

Supposons que nous prenions un corps pour lequel x a une très petite valeur, c'est-à-dire un corps très doux, et que nous le soumettions à une traction graduellement croissante. Imaginons, tout d'abord, que la traction soit produite avec une excessive lenteur, ou, en d'autres termes, que le fil reste soumis un temps extrêmement long à l'action de chacun des poids qu'on lui applique successivement.

Tant que la tension appliquée est inférieure à H, le fil s'allonge jusqu'à ce que la dilatation ait atteint la valeur qui convient à l'état naturel stable sous cette tension et pour cette température. Le point figuratif, dans le plan Θ*Ol*, suit la ligne NI (fig. 38).

Aussitôt que la tension surpasse d'une quantité, si petite soit-elle, la tension H, le fil se met à s'allonger avec une vitesse de plus en plus grande sous l'influence des petites oscillations de la tension et de la température; le point figuratif décrit une ligne qui s'éloigne peu d'une parallèle à O*l*.

Cet allongement n'est pas illimité ; il fait passer la dilatation linéaire l de la valeur λ à la valeur L donnée par l'égalité

$$\frac{\partial \Phi(1, H)}{\partial H} = -L,$$

qui correspond au corps complètement durci ($x = 1$).

Lorsque cet état est atteint, le corps, dont l'état chimique est devenu invariable, s'allonge suivant les lois ordinaires de la traction ; le point figuratif décrit la ligne AB.

Le phénomène de *brûlure par traction,* dans un fil soumis à une traction très lente, se traduit donc, sur le tracé qui représente les dilatations linéaires en fonction des tensions, par l'existence d'un *palier* IA, parallèle à l'axe des dilatations, palier que le point figuratif décrit de I vers A d'un mouvement accéléré.

L'existence d'un tel palier a été observée depuis bien longtemps par les praticiens qui ont soumis le fer ou l'acier recuit à des essais de traction ; ce palier ne se rencontre jamais dans les fers ou les aciers trempés ou écrouis (*). MM. Osmond et Werth (**) ont, les premiers, proposé d'interpréter ce palier en admettant qu'une traction suffisante pouvait, à froid, produire une modification semblable à celle que, dans le phénomène de Barrett, produit une élévation de température suffisante, en l'absence de toute traction.

La tension pour laquelle l'allongement accéléré du fil se produit a reçu des praticiens divers noms : *limite de fatigue, limite de stabilité* (***), point de destruction (*break-down point*). Todhunter (IV) le nomme *point de mollesse* (*yield-point*). Il faut bien remarquer que cette tension n'est définie

(*) G. Charpy, *Comptes rendus,* t. CXVII, p. 539, 1893 ; t. CXVIII, p. 868, 1894.

(**) Osmond et Werth, *Stahl und Eisen,* t. VI, p. 539 (août 1886) ; *La lumière électrique,* t. XXXV, p. 428, 1886.

(***) Cavalli, *Mémoire sur la théorie de la résistance statique et dynamique des solides, surtout aux impulsions comme celles du tir des canons.* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 2e sér., t. XXII, p. 157 ; 1860.)

(IV) Todhunter, *A history of the theory of elasticity,* vol. I, p. 887.

et égale à H qu'autant que l'on suppose la traction infiniment lente; si la traction n'est pas infiniment lente, l'allongement accéléré se produira sous une tension qui dépendra de la manière dont s'exerce la traction et qui sera d'autant plus grande, en général, que la traction sera plus rapide (*).

L'allongement accéléré dont nous venons de parler offre d'évidentes analogies avec l'allongement accéléré qui se produit pendant la période d'*écoulement local* (Chapitre II, § 3); il en diffère, cependant, en ce qu'il n'est pas illimité. D'ailleurs, il se produit pour des tensions beaucoup moindres, en sorte que l'on peut observer successivement, sur un même métal étiré, le *yield point* et le *flow locally*, comme dans les expériences de Kennedy, rapportées par Todhunter (**).

L'allongement accéléré que nous étudions en ce moment présente encore d'autres particularités dignes d'attention.

En général, le fil étudié n'est pas homogène; ses divers éléments ont des duretés différentes, qui correspondent à des valeurs différentes de x; or, $\frac{\partial v}{\partial x}$ étant positif lorsque le point figuratif est au-dessus de la ligne CID, ce sont les parties les plus dures qui s'allongent le plus vite; en d'autres termes, chaque élément subit pour son compte le phénomène de l'allongement accéléré; ce phénomène commence plus tôt et finit plus tôt pour les parties qui présentaient, initialement, une plus grande valeur de x. Par là s'expliquent des circonstances singulières qu'ont notées une foule d'observateurs.

Masson (***) avait noté que « les solides ne s'allongent pas d'une manière continue, mais par saut brusque ».

Kennedy (IV) remarque que durant la période qu'il nomme *yield-stage*, et qui correspond au *palier* que nous avons décrit, de grands allongements se produisent aux divers points du barreau étiré, non point simultanément, mais successivement.

(*) G. Charpy, *Comptes rendus*, t. CXVIII. p. 868; 1894.
(**) Todhunter, *loc. cit.*
(***) Masson, *Annales de chimie et de physique*, t. III, p. 454; 1841.
(IV) Todhunter, *loc. cit.*

MM. Osmond et Werth (*) s'expriment ainsi au sujet du même phénomène : « Comme le ciment n'est jamais réparti d'une façon absolument uniforme, certains noyaux peuvent briser leur enveloppe plus mince sous une pression plus faible ; d'autres, qui n'ont pas d'enveloppe sur une ou plusieurs faces, se déforment plus fortement encore ; de là ces déchirures parfois visibles à la surface des barreaux d'épreuve et les bruits que l'on entend pendant l'essai ; *chaque cellule a, en réalité, sa limite élastique,* et celle que l'on attribue à l'acier ne correspond qu'au maximum d'un phénomène plus ou moins irrégulier. »

Enfin, M. André Le Chatelier (**) a donné une description détaillée de cet allongement *par saccades,* qui concorde pleinement avec l'explication théorique que nous venons d'indiquer. « On peut, dit-il, se le représenter de la manière suivante : Une première déformation permanente produit la transformation d'une petite partie du métal, qui devient plus résistante en perdant ses facultés d'allongement ; le barreau cesse alors de s'allonger jusqu'à ce que la charge soit devenue assez élevée pour produire la rupture de ce métal transformé ; le métal non transformé se trouve alors soumis à une charge qu'il ne peut équilibrer et s'allonge brusquement ; cet allongement produit une nouvelle transformation partielle, et ainsi de suite ; chaque saccade correspondrait ainsi à une sorte de rupture intérieure. »

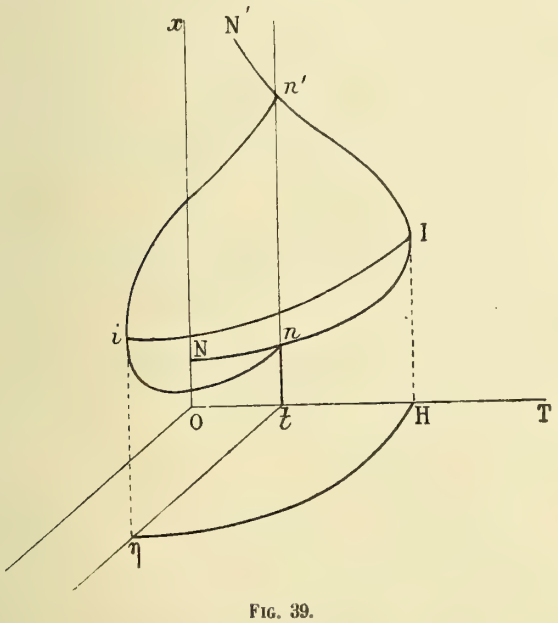


Fig. 39.

Prenons, sur trois axes de coordonnées rectangulaires (fig. 39), les

(*) Osmond et Werth, *Théorie cellulaire des propriétés de l'acier.* (Annales des mines, 8e sér., t. VIII, p. 80; 1885.)

(**) André Le Chatelier, *Le génie civil,* t. XIX, p. 109; 1891.

valeurs de la température T, de la tension Θ et de la dureté x. Par rapport à ces trois axes, l'équation

$$f(x, \Theta, T) = 0$$

représentera une surface, la surface des états naturels.

Touchant la forme de cette surface, nous possédons déjà quelques renseignements. Nous savons, par ce qui a été dit au Chapitre précédent, que le plan $\Theta = 0$ coupe cette surface suivant une courbe NIN', qui admet au point I, correspondant à la valeur H de T, une tangente parallèle à Ox; aux températures inférieures à H correspondent en général deux points de cette courbe; aux températures supérieures à H ne correspond plus aucun point de cette courbe.

D'autre part, nous venons de voir que le plan $T = t$, où t désigne la température ordinaire, coupait la même surface suivant une ligne nin', qui admet, au point i, une tangente parallèle à Ox. Le point i correspond à une valeur de Θ que nous avons désignée au présent paragraphe par H et que nous désignerons désormais par η; aux tensions inférieures à η correspondent deux points distincts sur la courbe nin'; aux tensions supérieures à η ne correspond plus aucun point sur la ligne nin'.

Les deux points I, i sont deux points du contour apparent Ii de la surface des états naturels pour un observateur infiniment éloigné dans la direction de Ox. Les équations de ce contour apparent sont

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, \Theta, T) = 0. \\ \dfrac{\partial}{\partial x} f(x, \Theta, T) = 0, \end{array} \right.$$

La ligne Ii partage la surface des états naturels en deux régions; tout point de la région inférieure, qui regarde le plan TOΘ, représente un état naturel stable; tout point de la région supérieure représente un état naturel stable.

Si l'on élimine x entre les équations (29), on obtient l'équation, rapportée aux axes TOΘ, de la projection H_η de la ligne Ii sur le plan TOΘ.

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire au sujet de cette ligne H_η

est la suivante : A toute valeur de T inférieure à H correspond un seul point de cette ligne; à toute valeur de Θ inférieure à η correspond également un seul point de cette ligne.

Le tracé de cette ligne, une fois connu, nous fournit des renseignements importants; il nous fait connaître, en effet, pour chaque valeur de la tension, la valeur de la température pour laquelle le métal commence à présenter le phénomène inverse de la recalescence; et, pour chaque valeur de la température, la valeur de la tension pour laquelle le palier commence à se former dans l'essai de traction du métal.

Si la ligne $H\eta$ est telle que nous l'avons supposée, nous pourrons énoncer les théorèmes suivants :

Sous une tension donnée, la température minima où l'on puisse observer le phénomène inverse de la recalescence est d'autant plus basse que la tension est plus forte.

A une température donnée, la tension minima pour laquelle on puisse observer la formation du palier de traction est d'autant plus basse que la température est plus élevée.

Cette dernière proposition est confirmée par les recherches de M. G. Charpy (*).

(*) G. Charpy, *Comptes rendus*, t. CXVIII, p. 868; 1894.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

INTRODUCTION 3

CHAPITRE PREMIER. — DE LA STABILITÉ DES CYCLES FERMÉS 8

§ 1. — Cycle isotherme décrit entre deux valeurs de l'action extérieure . 8
§ 2. — Cycle isotherme décrit entre deux valeurs de la variable normale. 18
§ 3. — Cycles isobares 21
§ 4. — Application des théorèmes précédents à divers faits d'expérience. 21
§ 5. — Influence de l'hysteresis sur les oscillations infiniment petites d'un système élastique 27

CHAPITRE II. — DE LA RUPTURE DES CORPS ÉLASTIQUES 35

§ 1. — De la forme qu'affecte la ligne des états naturels dans un fil tendu. 35
§ 2. — De l'effet que produit, sur un fil tendu, une variation cyclique de la charge 41
§ 3. — De la rupture d'un fil tendu 48
§ 4. — Effets analogues aux précédents, dus à des actions élastiques autres que la traction 59

CHAPITRE III. — LA TREMPE DES MÉTAUX 62

§ 1. — Les modifications du phosphore rouge 62
§ 2. — Le recuit des métaux 64
§ 3. — La brûlure des métaux 76
§ 4. — La recalescence 82
§ 5. — La trempe 85

CHAPITRE IV. — L'ÉCROUISSAGE DES MÉTAUX 93

§ 1. — Théorèmes généraux 93
§ 2. — L'écrouissage des métaux 105

TABLE DES MATIÈRES 116

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS

CINQUIÈME MÉMOIRE

ÉTUDE DE DIVERS SYSTÈMES DÉPENDANT DE DEUX VARIABLES

CHAPITRE PREMIER.

DES SYSTÈMES A DEUX VARIABLES PRIVILÉGIÉES.

§ 1. — *Quelques théorèmes relatifs à un système défini par deux variables privilégiées.*

Considérons un système dont l'état soit défini par la température absolue T et deux *variables privilégiées* (*), α et β. Les lois qui président à toute transformation réalisable d'un pareil système sont données par les égalités

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} dA &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\,d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\,d\beta + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial T}\,dT + g_\alpha(\alpha, \beta, A, B, T)|d\alpha|,\\ dB &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta \partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}\,d\beta + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta \partial T}\,dT + g_\beta(\alpha, \beta, A, B, T)|d\beta|, \end{aligned}\right.$$

$\mathcal{F}(\alpha, \beta, T)$ étant le potentiel thermodynamique interne du système.

(*) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* (Troisième mémoire, §§ 2 et 3.)

Nous avons admis, d'une manière générale (*), que la loi du déplacement isothermique de l'équilibre devait être vérifiée quels que soient $d\alpha$, $d\beta$; c'est-à-dire que, sous la condition $d\mathrm{T} = 0$, on devait avoir, en toute circonstance,

$$d\mathrm{A}d\alpha + d\mathrm{B}d\beta > 0.$$

En vertu des égalités (1), cette condition devient

$$(2) \quad \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha \frac{|d\alpha|}{d\alpha}\right) d\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} d\alpha d\beta + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\beta \frac{|d\beta|}{d\beta}\right) d\beta^2 > 0,$$

inégalité qui doit avoir lieu à moins que l'on n'ait simultanément

$$d\alpha = 0, \qquad d\beta = 0.$$

Il est clair que cette condition équivaut à l'ensemble des conditions suivantes :

1° On a les quatre inégalités

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha > 0, & \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} - g_\alpha > 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\beta > 0, & \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - g_\beta > 0, \end{cases}$$

qui entraînent les deux inégalités

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} > 0.$$

2° Les deux équations

$$(5) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha\right) x^2 + 2\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} x + \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\beta\right) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha\right) x^2 + 2\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} x + \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\beta\right) = 0 \end{cases}$$

n'admettent aucune racine positive.

(*) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* (Troisième mémoire, § 4.)

3° Les deux équations

$$(6)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha\right) x^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} x + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - g_\beta\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} - g_\alpha\right) x^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} x + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\beta\right) = 0 \end{cases}$$

n'admettent aucune racine négative.

Pour pousser plus loin la discussion de ces conditions, nous distinguerons deux cas :

Premier cas :

$$(7)\quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} > 0.$$

Dans ce cas, on voit sans peine que les inégalités (3) suffisent à empêcher les équations (5) d'admettre des racines positives; pour que les équations (6) n'admettent pas de racines négatives, il faut et il suffit que l'on ait

$$(8)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha\right)\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - g_\beta\right) - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 > 0, \\ \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} - g_\alpha\right)\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\beta\right) - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 > 0, \end{cases}$$

inégalités qui peuvent encore s'écrire

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 - g_\alpha g_\beta + g_\alpha \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - g_\beta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 - g_\alpha g_\beta - g_\alpha \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\beta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} > 0 \end{cases}$$

et qui entraînent l'inégalité suivante :

$$(10)\quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 - g_\alpha g_\beta > 0.$$

Deuxième cas :

$$(7^{bis})\quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} < 0.$$

Dans ce cas, on voit sans peine que les inégalités (3) suffisent à empêcher les équations (6) d'admettre des racines négatives; pour que les équations (5) n'admettent pas de racines positives, il faut et il suffit que l'on ait

$$(8^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha\right)\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\beta\right) - \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 > 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} - g_\alpha\right)\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - g_\beta\right) - \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 > 0, \end{array} \right.$$

inégalités qui peuvent encore s'écrire

$$(9^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 + g_\alpha g_\beta + g_\alpha \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\beta \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} > 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 + g_\alpha g_\beta - g_\alpha \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - g_\beta \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} > 0, \end{array} \right.$$

et qui entraînent l'inégalité suivante

$$(10^{bis}) \quad \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial \beta}\right)^2 + g_\alpha g_\beta > 0.$$

§ 2. — *Premier problème étudié.*

Nous supposerons que l'on maintienne constantes :

1° La température T;

2° L'action extérieure B.

On ne garde que les trois variables A, α, β, que nous portons sur trois axes de coordonnées rectangulaires comme on porte habituellement les trois variables x, y et z.

Les modifications réalisables du système sont régies par les équations (1), qui deviennent

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} dA = \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} d\alpha + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} d\beta + g_\alpha |d\alpha|, \\ 0 = \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} d\alpha + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} d\beta + g_\beta |d\beta|. \end{array} \right.$$

PREMIER CAS :

$$\text{(7)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} > 0.$$

La seconde des égalités (11) peut s'écrire

$$\text{(12)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} d\alpha + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \frac{|d\beta|}{d\beta}\right) d\beta = 0.$$

L'inégalité (7), jointe aux dernières égalités (3), montre que, *dans ce premier cas,* $d\alpha$ *et* $d\beta$ *sont toujours de signes contraires.* Cette proposition s'exprime par l'inégalité

$$\text{(13)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d\alpha d\beta < 0,$$

inégalité dont nous déduisons sans peine l'égalité suivante :

$$\text{(14)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{|d\alpha|}{d\alpha} + \frac{|d\beta|}{d\beta} = 0.$$

Les équations (11) donnent, d'ailleurs,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} dA = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 d\beta - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} + g_\alpha \frac{|d\alpha|}{d\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \frac{|d\beta|}{d\beta}\right) d\beta$$

ou bien, en vertu de l'égalité (14),

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} dA = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 d\beta - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} - g_\alpha \frac{|d\beta|}{d\beta}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \frac{|d\beta|}{d\beta}\right) d\beta$$

ou enfin, tout calcul fait,

$$\text{(15)} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} dA = \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 d\beta - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta\right] d\beta + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta\right)|d\beta|.$$

En vertu de l'égalité (14), l'égalité (12) peut s'écrire

$$d\beta = -\frac{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta \dfrac{|d\alpha|}{d\alpha}} d\alpha,$$

égalité d'où les deux dernières inégalités (3), jointes à l'inégalité (7), permettent de déduire

$$|d\beta| = \frac{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta \dfrac{|d\alpha|}{d\alpha}} |d\alpha|.$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (15) devient :

$$dA = -\frac{\left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta\right]\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \dfrac{|d\alpha|}{d\alpha}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2} d\alpha + \frac{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta\right)\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \dfrac{|d\alpha|}{d\alpha}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2} |d\alpha|$$

ou bien

$$(16) \quad \left\{ dA = -\frac{\left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta\right]\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta\right) g_\beta}{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2} d\alpha \right.$$

$$\left. - \frac{\left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta\right] g_\beta - \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta\right)\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}}{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta}\right)^2 - g_\beta{}^2} |d\alpha|, \right.$$

Ainsi, toute transformation élémentaire vérifie les égalités (12), (15) et (16), dont chacune est conséquence des deux autres.

Considérons, en premier lieu, une modification le long de laquelle α *croît constamment;* le long de cette modification, β *décroît constamment,* en vertu de l'inégalité (13). Les égalités (12), (15) et (16) deviennent :

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} d\alpha &= -\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta\right) d\beta, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} dA &= \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta - g_\alpha \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\right] d\beta, \\ \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2\right] dA &= -\left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta - g_\alpha \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\right]\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta\right) d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Deux quelconques de ces trois équations suffisent à définir la ligne qui représente la modification considérée.

Considérons maintenant une modification le long de laquelle α *décroît constamment;* en vertu de l'inégalité (13), le long de cette modification β *croît constamment.* Les égalités (12), (15), (16) deviennent

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,d\alpha = -\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta\right) d\beta, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,d\mathrm{A} = \left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta + g_\alpha \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\right] d\beta, \\ \left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2\right] d\mathrm{A} = -\left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta + g_\alpha \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\right]\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta\right) d\alpha. \end{cases}$$

Deux quelconques de ces trois équations suffisent à définir la ligne qui représente la modification considérée.

Deuxième cas :

$$(7^{bis})\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} < 0.$$

La seconde des égalités (11) peut s'écrire

$$(12)\quad \ldots\ldots\ldots \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,d\alpha + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \frac{|d\beta|}{d\beta}\right) d\beta = 0.$$

L'inégalité (7^{bis}), jointe aux deux dernières égalités (3), montre que, *dans ce cas,* $d\alpha$ *et* $d\beta$ *sont toujours de même signe :*

$$(13^{bis})\quad \ldots\ldots\ldots\ldots d\alpha d\beta > 0,$$

inégalité dont nous déduisons sans peine l'égalité suivante :

$$(14^{bis})\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{|d\alpha|}{d\alpha} - \frac{|d\beta|}{d\beta} = 0.$$

On en déduit aisément que l'on a

$$(15^{bis}) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} dA = \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\alpha g_\beta\right] d\beta - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta\right) |d\beta|.$$

En vertu de l'égalité (14^{bis}), l'égalité (12) devient

$$d\beta = -\frac{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \dfrac{|d\alpha|}{d\alpha}} d\alpha,$$

égalité d'où les deux dernières égalités (3), jointes à l'inégalité (7^{bis}), permettent de déduire

$$|d\beta| = -\frac{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta \dfrac{|d\alpha|}{d\alpha}} |d\alpha|.$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (15^{bis}) devient

$$dA = -\frac{\left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\alpha g_\beta\right]\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta \dfrac{|d\alpha|}{d\alpha}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2} d\alpha + \frac{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta\right)\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta \dfrac{|d\alpha|}{d\alpha}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2} |d\alpha|$$

ou bien

$$(16^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} dA = &-\frac{\left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\alpha g_\beta\right]\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta\right) g_\beta}{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2} d\alpha \\ &+ \frac{\left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\alpha g_\beta\right] g_\beta + \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta\right)\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}}{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2} |d\alpha|. \end{aligned} \right.$$

Considérons, en premier lieu, une modification le long de laquelle α *est*

constamment croissant; en vertu de l'inégalité (13bis), β *est constamment croissant.* Les égalités (12), (15bis) et (16bis) deviennent :

$$(17^{bis})\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,d\alpha = -\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta\right)d\beta,\\
&\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,d\mathrm{A} = \left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\alpha g_\beta - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}g_\alpha - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}g_\beta\right]d\beta,\\
&\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2\right]d\mathrm{A} = -\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\alpha g_\beta - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}g_\alpha - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}g_\beta\right]\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta\right)d\alpha.
\end{aligned}\right.$$

Deux quelconques de ces équations suffisent à définir la ligne qui représente la modification considérée.

Considérons, en second lieu, une modification le long de laquelle α est *constamment décroissant;* en vertu de l'inégalité (13bis), β est *constamment décroissant.* Les égalités (12), (15bis) et (16bis) deviennent :

$$(18^{bis})\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,d\alpha = -\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\beta\right)d\beta,\\
&\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,d\mathrm{A} = -\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\alpha g_\beta + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}g_\alpha + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}g_\beta\right]d\beta,\\
&\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2 - g_\beta{}^2\right]d\mathrm{A} = -\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\alpha g_\beta + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}g_\alpha + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}g_\beta\right]\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\beta\right)d\alpha.
\end{aligned}\right.$$

Deux quelconques de ces équations suffisent à définir la ligne qui représente la modification.

Considérons maintenant le cas général, qui réunit les deux précédents, où $\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}$ n'a pas un signe invariable.

La surface

$$(19)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} = 0$$

représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à OA. Ce cylindre partage le plan en *deux régions.* Dans la *première région,* $\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}$ est positif; l'égalité (7) est vérifiée; le système se trouve dans le *premier cas.* Dans la *seconde région,* $\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}$ est négatif; l'inégalité (7bis) est vérifiée; le système se trouve dans le *second cas.*

Les équations (17), (18), (17bis), (18bis) déterminent *quatre familles* différentes de lignes analytiques. Par chaque point de l'espace, il passe une et une seule ligne de chaque famille.

Si le point appartient à la première région, les deux lignes des familles (17) et (18) qui passent par ce point représentent, pour le système, des modifications réalisables à partir de l'état auquel correspond ce point; les deux lignes des familles (17bis), (18bis) existent géométriquement, mais n'ont aucun sens physique.

L'inverse a lieu si le point appartient à la deuxième région.

Considérons un point P du cylindre défini par l'équation (19) et voyons comment se comportent, en ce point, les quatre lignes (17), (18), (17bis), (18bis) qui y passent.

Les quatre groupes (17), (18) (17bis), (18bis) s'accordent à donner, en chaque point de la surface définie par l'équation (19),

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}=0, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial A}=0.$$

Donc *les quatre lignes* (17), (18), (17bis), (18bis) *qui passent au point* P *sont tangentes en ce point au plan, perpendiculaire à l'axe* Oβ, *mené par ce point.*

Considérons maintenant la dernière égalité de chacun des quatre groupes (17), (18), (17bis), (18bis). Elle peut s'écrire, toute réduction faite,

$$(17')\ \ \left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2-g_\beta{}^2\right]dA=-\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}+g_\beta\right)d\alpha+\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2-g_\beta{}^2\right]\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}+g_\alpha\right)d\alpha,$$

$$(18')\ \ \left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2-g_\beta{}^2\right]dA=-\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}-g_\beta\right)d\alpha+\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2-g_\beta{}^2\right]\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}-g_\alpha\right)d\alpha,$$

$$(17'_{bis})\ \ \left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2-g_\beta{}^2\right]dA=-\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}-g_\beta\right)d\alpha+\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2-g_\beta{}^2\right]\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x^2}+g_\alpha\right)d\alpha,$$

$$(18'_{bis})\ \ \left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2-g_\beta{}^2\right]dA=-\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}+g_\beta\right)d\alpha+\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right)^2-g_\beta{}^2\right]\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}-g_\alpha\right)d\alpha.$$

Au point P, appartenant à la surface (19), les égalités (17′) et (17′^{bis}) se réduisent à la forme commune

$$(20) \qquad dA = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha\right) d\alpha,$$

tandis que les égalités (18′) et (18′^{bis}) se réduisent à la forme commune

$$(21) \qquad dA = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} - g_\alpha\right) d\alpha,$$

résultat que l'on aurait pu, d'ailleurs, déduire directement des égalités (11) et (19).

Ainsi, *en chaque point* P *de la surface* (19), *se raccordent tangentiellement entre elles la ligne* (17) *et la ligne* (17bis), c'est-à-dire les deux lignes *qui, lorsqu'elles représentent une modification réalisable, représentent une modification le long de laquelle* α *croît constamment.*

En ce même point P *se raccordent tangentiellement entre elles la ligne* (18) *et la ligne* (18bis), c'est-à-dire les deux lignes *qui, lorsqu'elles représentent une modification réalisable, représentent une modification le long de laquelle* α *décroît constamment.*

D'ailleurs, au point P, les deux lignes (17) et (17bis), tangentes entre elles, ne sont pas en général tangentes aux deux lignes, tangentes entre elles, (18) et (18bis). Pour que ces quatre lignes n'aient, au point P, qu'une seule et même tangente, il faut et il suffit que les équations (20) et (21) deviennent identiques, c'est-à-dire qu'à l'équation (19) se joigne l'équation

$$(22) \qquad g_\alpha = 0.$$

En un point de l'espace qui n'appartient pas à la surface (19), pour que les deux lignes (17) et (18) soient tangentes entre elles, il faut et il suffit que l'on ait

$$(23) \qquad g_\alpha = 0, \qquad g_\beta = 0,$$

c'est-à-dire que l'état du système soit un *état naturel.* Ces mêmes condi-

tions (23) sont nécessaires et suffisantes pour que les deux lignes (17^{bis}) et (18^{bis}) soient tangentes entre elles.

D'ailleurs, lorsqu'elles sont vérifiées en un point (point de la surface des états naturels), les quatre groupes (17), (18), (17^{bis}), (18^{bis}) se réduisent à la forme unique

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,d\alpha = -\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\,d\beta,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,dA = \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right] d\beta,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\,dA = -\left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2}\right] d\alpha,$$

en sorte que les quatre lignes que définissent ces groupes ont une seule et même tangente en tout point qui représente un état naturel.

Après avoir étudié les propriétés des lignes qui représentent une transformation dans l'espace (A, α, β), nous allons étudier successivement les propriétés de leurs projections sur chacun des trois plans AOα, AOβ, αOB. Sur ces projections, certains caractères essentiels des lignes de l'espace se trouveront masqués.

Ainsi, par chaque point de l'espace passe une et une seule ligne de chacun des quatre systèmes (17), (18), (17^{bis}), (18^{bis}). Au contraire, par chaque point de chaque projection passera une infinité de lignes de chacun des quatre systèmes.

Il pourra donc arriver que les projections λ, λ', de deux lignes L, L' de l'espace qui ne se coupent pas, se coupent, elles, en un point M. Le point M sera ce que nous appellerons une *intersection apparente*. Il serait absurde de supposer que la projection du point figuratif arrive en M par la ligne λ et quitte le point M par la ligne λ' ; ce serait supposer que le point figuratif se meut, dans l'espace, d'un mouvement discontinu.

1° *Projection sur le plan* AOα.

Nous regarderons cette projection d'un point de l'axe Oβ. Quelle que soit celle des deux régions dans laquelle se trouve le point de l'espace qui

représente l'état du système, à une valeur positive de $d\alpha$ correspond une valeur de dA donnée soit par la dernière égalité (17), soit par la dernière égalité (17^{bis}); en vertu des inégalités (3), et (9) ou (9^{bis}), cette valeur est toujours positive ; donc *toute la ligne ascendante monte de gauche à droite.* A une valeur négative de $d\alpha$ correspond une valeur de dA donnée soit par la dernière égalité (18), soit par la dernière égalité (18^{bis}); en vertu des inégalités (3), et (9) ou (9^{bis}), cette valeur de dA est toujours négative ; donc *toute ligne descendante descend de droite à gauche.*

Ces résultats auraient pu se déduire de l'inégalité

$$dAd\alpha > 0,$$

à laquelle se réduit, dans le cas où l'action B est maintenue constante, la règle du déplacement isothermique de l'équilibre.

Si une ligne ascendante passe de la première région dans la seconde ou inversement, elle se compose de deux portions analytiques différentes ; mais ces deux portions se raccordent tangentiellement l'une à l'autre. On peut en dire autant d'une ligne descendante qui n'est pas tracée tout entière dans une même région.

Un cycle fermé doit vérifier l'inégalité de Clausius

$$\int \frac{dQ}{T} > 0$$

qui devient, pour un cycle isothermique,

$$\int (Ad\alpha + Bd\beta) > 0.$$

Mais, dans le cas qui nous occupe, B étant maintenu constant, on a

$$\int Bd\beta = B \int d\beta = 0,$$

en sorte que l'inégalité de Clausius se réduit à

$$\int Ad\alpha > 0.$$

Si la projection du cycle fermé sur le plan $AO\alpha$ est formée d'une seule

boucle, cette boucle est *sinistrorsùm* ; si elle est formée de plusieurs boucles, la somme des aires embrassées par les boucles *sinistrorsùm* surpasse la somme des aires embrassées par les boucles *dextrorsùm*.

Les diverses propriétés que nous venons de démontrer rapprochent les projections que nous étudions des lignes isothermes d'un système défini par une seule variable. Mais voici des caractères qui distinguent ces deux études :

En premier lieu, lorsque nous étudions les modifications isothermes, relatives à une température donnée, d'un système qui dépend d'une seule variable, par chaque point du plan passent une seule ligne ascendante et une seule ligne descendante. Ici, au contraire, par chaque point du plan $AO\alpha$ passent les projections d'une infinité de lignes ascendantes et les projections d'une infinité de lignes descendantes.

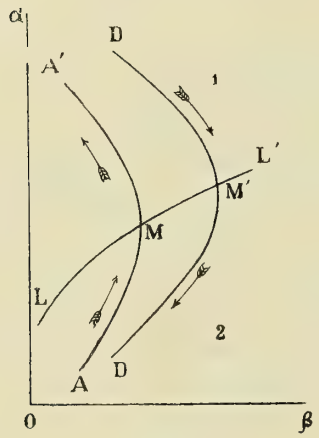


Fig. 1.

En second lieu, tous les cycles simples que l'on a à considérer dans le premier problème sont formés d'une seule boucle ; au contraire, dans le second problème, la projection d'un cycle fermé simple sur le plan $AO\alpha$ peut être formée de plusieurs boucles.

Nous aurons plus loin à faire usage de ces diverses remarques.

2° *Projection sur le plan* $\beta O\alpha$.

Nous regarderons cette projection (fig. 1) d'un point de l'axe des A négatifs.

Le cylindre

$$(19) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} = 0$$

rencontre le plan $\beta O\alpha$ suivant une ligne LL′ qui divise ce plan en deux régions ; l'une, la région 1, où $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}$ est positif ; l'autre, la région 2, où $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}$ est négatif.

Nous distinguerons deux cas :

Premier cas. — Dans la région que nous considérons, on a

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2 \partial \beta} > 0. \qquad (24)$$

La région 2 est alors au-dessous de la ligne LL′ ; la région 1 est au-dessus.

En tout point M de la ligne LL′ passent les projections d'une infinité de lignes représentatives de modifications réalisables. Toutes ces projections ont, au point M, une tangente parallèle à $O\alpha$.

Dans la région 1, $d\alpha$ et $d\beta$ sont de signes contraires ; les projections des lignes ascendantes, telles que MA′, montent de droite à gauche ; les projections des lignes descendantes, telles que DM′, descendent de gauche à droite.

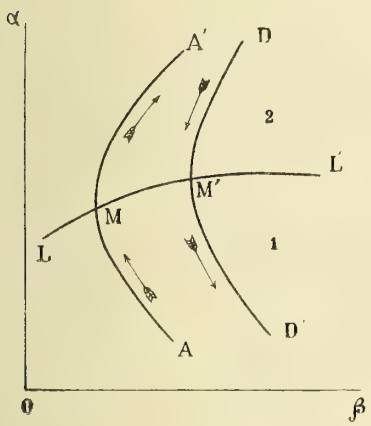


Fig. 2.

Dans la région 2, $d\alpha$ et $d\beta$ sont de même signe ; les projections des lignes ascendantes, telles que AM, montent de gauche à droite ; les projections des lignes descendantes, telles que M′D′, descendent de droite à gauche.

La projection AMA′ d'une ligne ascendante complète se compose de deux portions AM, MA′ de lignes analytiques différentes.

Il en est de même de la projection DMD′ d'une ligne descendante complète.

Deuxième cas. — Dans la région que nous considérons, on a

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2 \partial \beta} < 0. \qquad (25)$$

La région 2 est alors au-dessus de la ligne LL′ ; la région 1 est au-dessous de la même ligne.

La projection AMA′ d'une ligne ascendante et la projection DM′D′ d'une ligne descendante sont disposées comme l'indique la figure 2.

Il est clair, d'ailleurs, qu'un même système peut présenter simultanément, pour des valeurs différentes de α et de β, les deux cas que nous venons de caractériser.

3° *Projection sur le plan* $AO\beta$.

Regardons cette projection d'un point de l'axe des α négatifs (fig. 3).

Les divers points du cylindre

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \qquad (19)$$

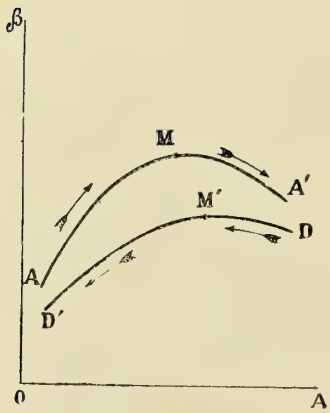


Fig. 3.

ne se projettent plus, comme dans le cas précédent, sur une simple ligne LL'; ils se projettent sur tout le plan, ou, tout au moins, en tout une région du plan.

Lorsqu'une ligne, représentative d'une transformation réalisable, rencontre la surface (19), elle admet une tangente normale à $O\beta$; sa projection sur le plan $AO\beta$ admet une tangente parallèle à OA.

Cherchons quelle variation subit, le long d'un élément de modification réalisable, la quantité $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}$.

Cette variation sera donnée par la formule

$$d\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2 \partial \beta} d\alpha + \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta^2} d\beta,$$

où l'on remplace $d\alpha$, $d\beta$ par leurs valeurs déduites des égalités (11).

Dans le cas particulier où l'élément de modification considéré est représenté par une ligne infiniment voisine du cylindre (19), on a

$$d\beta = 0, \qquad d\alpha = \frac{1}{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha \frac{|d\alpha|}{d\alpha}} dA,$$

et, par conséquent,

$$(26)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad d\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\dfrac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial\alpha^2\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}+g_\alpha\dfrac{|d\alpha|}{d\alpha}}\,d\mathrm{A}.$$

Distinguons deux cas :

Premier cas, caractérisé par l'inégalité

$$(24)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial\alpha^2\partial\beta}>0.$$

Suivons une ligne le long de laquelle A croît constamment. En vertu de l'inégalité (24) et des premières inégalités (3), l'égalité (26) donne, au moment où cette ligne rencontre la surface du cylindre défini par l'équation (19),

$$d\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}>0.$$

La ligne représentative de la transformation passe de la seconde région dans la première région ; or, dans la seconde région, $d\mathrm{A}$ et $d\beta$ sont de même signe ; dans la première région, au contraire, $d\mathrm{A}$ et $d\beta$ sont de signes contraires. La projection de cette ligne sur le plan $\mathrm{AO}\beta$ monte d'abord de gauche à droite de A en M ; en M, elle admet une tangente parallèle à OA ; elle descend ensuite de gauche à droite, suivant MA′.

Suivons maintenant une ligne le long de laquelle A décroît constamment. En vertu de l'inégalité (24) et des premières inégalités (3), l'égalité (26) donne, au moment où cette ligne rencontre la surface du cylindre défini par l'équation (19),

$$d\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}<0.$$

La ligne représentative de la transformation passe de la première région dans la seconde région. La projection de cette ligne sur le plan $\mathrm{AO}\beta$ monte d'abord de droite à gauche, de D en M′ ; en M′, elle admet une tangente parallèle à OA ; enfin, elle descend de droite à gauche, suivant M′D′.

Les deux portions AM, MA′, de la ligne AMA′ appartiennent à deux lignes analytiques différentes ; de même, les deux portions DM′, M′D′ de la ligne DM′D′ appartiennent à deux lignes analytiques différentes.

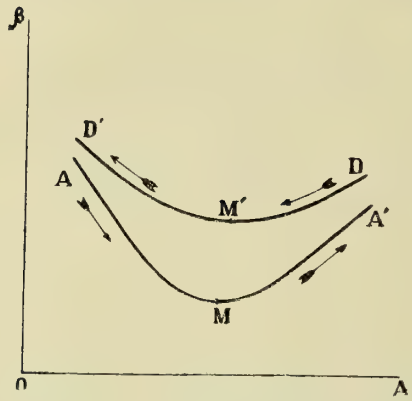


Fig. 4.

Deuxième cas, caractérisé par l'inégalité

$$(25) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2 \partial \beta} < 0.$$

La disposition des lignes AMA′, DM′D′ est alors celle qu'indique la figure 4.

Les projections sur le plan AOβ de deux lignes représentatives de modifications peuvent se couper alors que les lignes elles-mêmes ne se coupent pas ; ainsi l'intersection de deux lignes, toutes deux parcourues dans le sens des A croissants, ou toutes deux parcourues dans le sens des A décroissants, est assurément une intersection apparente.

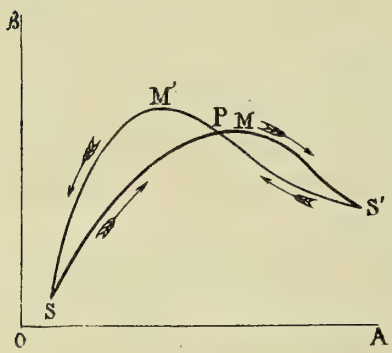


Fig. 5

Il en est de même d'un point, tel que le point P (fig. 5), où se coupent une ligne correspondant aux valeurs croissantes de A et une ligne correspondant aux valeurs décroissantes de A, si les coefficients angulaires des tangentes à ces deux lignes ont des signes contraires.

Si, par exemple, SPMS′PM′S est un cycle fermé, SPM′S et PMS′P ne sont pas des cycles fermés, le point P correspondant, en réalité, à deux points différents de l'espace, l'un situé sur la ligne dont SMS′ est la projection, l'autre sur la ligne dont S′M′S est la projection.

§ 3. — *Deuxième problème étudié. — Corrélation avec le problème précédent.*

Au lieu de laisser invariables la température T et l'action B, et d'observer la variation simultanée des trois quantités A, α, β, on peut laisser invariables la température T et l'action A, et observer la variation simultanée des trois quantités B, α, β. Ce second problème se traite comme le premier.

Si $\delta\alpha$, $\delta\beta$, δB sont les variations infiniment petites de α, β, B, au cours d'une modification réalisable soumise aux restrictions que nous venons d'indiquer, restrictions qu'expriment les égalités

$$\delta T = 0, \qquad \delta A = 0,$$

on aura, en vertu des égalités (1),

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\delta\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\delta\beta + g_\alpha |\delta\alpha|, \\ \delta B &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\delta\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}\delta\beta + g_\beta |\delta\beta|. \end{aligned} \right.$$

La première des égalités (27), jointe aux premières inégalités (3), nous montre que si $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}$ est positif, $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ sont de signes contraires ; que si, au contraire $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}$ est négatif, $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ sont de même signe.

D'où deux cas à distinguer :

Premier cas :

$$(7)\quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} > 0.$$

Les égalités (27) peuvent alors être remplacées par les égalités

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} + g_\alpha \frac{|\delta\alpha|}{\delta\alpha} \right) \delta\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\delta\beta, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}\delta B &= \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} + g_\alpha g_\beta \right] \delta\alpha + \left(g_\beta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} - g_\alpha \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} \right) |\delta\alpha|. \end{aligned} \right.$$

DEUXIÈME CAS :

$$(7^{bis}) \quad \dots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta} < 0.$$

Les égalités (27) peuvent alors être remplacées par les égalités

$$(28^{bis}) \quad \begin{cases} 0 = \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} + g_\alpha \dfrac{|\delta\alpha|}{\delta\alpha}\right)\delta\alpha + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\delta\beta, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\delta B = \left[\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta\right]\delta z - \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\beta\right)|\delta\alpha|. \end{cases}$$

Le problème que nous venons de traiter offre une intéressante corrélation avec le problème traité au paragraphe précédent.

PREMIER CAS. — Prenons un système dans un état initial donné : α, β, T, A, B, et, à partir de cet état initial, considérons deux modifications élémentaires infiniment petites. Dans la première, T et B étant maintenus constants, on fait croître A d'une quantité *positive* dA ; α croît d'une quantité positive $d\alpha$, β d'une quantité négative $d\beta$. D'après l'égalité (15), on a

$$\frac{d\mathrm{A}}{d\beta} = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta - \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} g_\alpha - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta\right)}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}}.$$

Dans la seconde, T et A étant maintenus constants, on fait croître B d'une quantité *négative* δB; β croît d'une quantité négative $\delta\beta$ et α d'une quantité positive $\delta\alpha$.

D'après la seconde égalité (28), on a :

$$\frac{\delta\mathrm{B}}{\delta\alpha} = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} + g_\alpha g_\beta + \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2} g_\beta \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta^2} - g_\alpha\right)}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}}.$$

La comparaison des deux égalités que nous venons d'obtenir donne

$$\frac{d\mathrm{A}}{d\beta} = \frac{\delta\mathrm{B}}{\delta\alpha}.$$

Nous aurions obtenu la même égalité si nous avions pris pour dA une valeur négative et pour δB une valeur positive. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Un système, pour lequel $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}$ *est positif, est pris dans un état initial donné* (α, β, T, A, B). *A partir de cet état, si* A *croît de* dA, B *et* T *étant maintenus invariables,* β *croît de* $d\beta$ *; si, au contraire,* B *croît de* δB, A *et* T *étant maintenus invariables,* α *croît de* $\delta\alpha$. SI dA ET δB SONT DE SIGNES CONTRAIRES, *on a*

$$(29) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d\mathrm{A}\cdot\delta\alpha = \delta\mathrm{B}\cdot d\beta.$$

DEUXIÈME CAS. — On démontrerait d'une manière analogue le théorème suivant :

Un système, pour lequel $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\partial\beta}$ *est négatif, est pris dans un état initial donné* (α, β, T, A, B). *A partir de cet état, si* A *croît de* dA, B *et* T *étant maintenus invariables,* β *croît de* $d\beta$ *; si, au contraire,* B *croît de* δB, A *et* T *étant maintenus invariables,* α *croît de* $\delta\alpha$. SI dA ET δB SONT DE MÊME SIGNE, *on a*

$$(29^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d\mathrm{A}\cdot\delta\alpha = \delta\mathrm{B}\cdot d\beta.$$

§ 4. — *Ligne des états naturels.*

Tout état naturel (α, β, T, A, B) du système est défini par la condition de satisfaire aux deux équations

$$(30) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} g_\alpha(\alpha, \beta, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0, \\ g_\beta(\alpha, \beta, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0. \end{cases}$$

Si, comme dans le premier problème dont nous nous sommes occupés, les quantités T et B sont données, ces équations définissent, dans l'espace (A, α, β), une ligne bien déterminée. Si nous convenons de dire que nous

avons affaire à *un état du premier problème,* chaque fois que l'on nous donne un système de valeurs de (B, T), nous voyons que *chaque état du premier problème correspond, dans l'espace, à une ligne des états naturels parfaitement déterminée.*

Soit F (α, β, T) le potentiel thermodynamique apparent. Les équations (30) pourront aussi s'écrire

$$(31)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{\partial F(\alpha, \beta, T)}{\partial \alpha}, \\ B = \dfrac{\partial F(\alpha, \beta, T)}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Soit un état du premier problème, et soient dA, $d\alpha$, $d\beta$ les composantes d'un élément de la ligne des états naturels qui lui correspond. Nous aurons

$$dA = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} d\alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} d\beta,$$
$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} d\alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} d\beta$$

ou bien

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} dA = \left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2\right] d\alpha, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} dA = -\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2\right] d\beta. \end{cases}$$

Supposons, pour fixer les idées, que le système appartienne à la *première catégorie;* c'est d'ailleurs le seul cas que nous aurons à considérer dans les applications que nous avons en vue. Nous aurons

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} > 0, \qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} > 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 > 0. \end{cases}$$

Nous aurons alors deux cas à distinguer :

Premier cas :

$$(34)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} > 0.$$

D'après les égalités (32), $d\mathrm{A}$ et $d\alpha$ sont de même signe, mais $d\mathrm{A}$ et $d\beta$ sont de signes contraires.

DEUXIÈME CAS :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\alpha\partial\beta} < 0. \tag{34^{bis}}$$

D'après les égalités (32), $d\mathrm{A}$ et $d\alpha$ sont de même signe; il en est de même de $d\mathrm{A}$ et de $d\beta$.

On pourrait traiter de même le cas où A et T sont maintenus constants. A chaque état du second problème ainsi déterminé correspondrait une ligne des états naturels.

Les composantes $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\mathrm{B}$ d'un élément de cette ligne seraient données par les égalités

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\alpha^2}\,\delta\mathrm{B} = \left[\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2\right]\delta\beta, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\,\delta\mathrm{B} = -\left[\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2\right]\delta\alpha. \end{cases} \tag{35}$$

La seconde égalité (32), comparée à la seconde égalité (35), conduit au théorème suivant :

Soit (α, β, T, A, B) *un état naturel du système.*

1° *Laissant constants* B *et* T, *on fait croître* A *de* $\mathrm{d}\mathrm{A}$; *l'état naturel varie et* β *croît de* $\mathrm{d}\beta$;

2° *Laissant constants* A *et* T, *on fait croître* B *de* $\delta\mathrm{B}$; *l'état naturel varie et* α *croît de* $\delta\alpha$.

On a

$$d\mathrm{A}\,.\,\delta\alpha = \delta\mathrm{B}\,.\,d\beta. \tag{36}$$

§ 5. — *Stabilité des états naturels et des cycles limites.*

Si les inégalités (33) sont vérifiées, tout état naturel du système est un état stable, ainsi que nous l'avons vu au § 12 de notre troisième mémoire *Sur les déformations permanentes.* Il nous est permis d'admettre, sans que toutefois nous puissions l'établir en toute rigueur, comme nous l'avons fait dans le cas d'un système dépendant d'une seule variable normale (*), que le système, porté à une température *physiquement* constante T, et soumis à des actions extérieures *physiquement* constantes A et B, subit des variations qui le font tendre vers l'état naturel relatif à la température T et aux valeurs A et B des actions extérieures.

De même, on peut admettre, mais sans pouvoir en donner une démonstration analogue à celles que nous avons développées au Chapitre Ier de notre quatrième mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis,* que si deux des trois quantités A, B, T demeurant constantes, la troisième oscille un nombre indéfini de fois entre deux valeurs limites complètement fixes, le point figuratif de l'état du système tend à décrire un cycle fermé bien déterminé.

(*) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* (Quatrième mémoire, Chapitre Ier.)

CHAPITRE II.

ÉLASTICITÉ ET MAGNÉTISME.

§ 1. — *Préliminaires.*

Lorsque l'on fait agir simultanément, sur un métal magnétique, une force magnétisante et une action capable de le déformer, on réalise un système auquel s'appliquent les considérations exposées au Chapitre précédent; deux variables privilégiées doivent être jointes à la température absolue pour définir l'état d'un semblable système : l'une est l'intensité de l'aimantation dont la direction est supposée connue et invariable au cours d'une même série d'expériences; l'autre est la variable qui définit la déformation (dilatation linéaire, par exemple). Les deux problèmes corrélatifs distingués au Chapitre précédent peuvent être traités ici; on peut maintenir invariable l'action magnétisante et faire varier l'action élastique : c'est le premier problème. On peut, au contraire, maintenir l'action élastique invariable et faire varier la force magnétisante : c'est le second problème.

Toutefois, aucune des expériences réalisées jusqu'ici n'est faite exactement dans les conditions où il faudrait qu'elle fût faite pour que la théorie précédente pût lui être appliquée en toute rigueur; ces conditions sont d'ailleurs difficilement réalisables.

Soient $\mathcal{U}$ la fonction potentielle magnétique du champ (bobine) qui agit sur l'aimant étudié et $\mathcal{W}$ la fonction potentielle magnétique de l'aimantation distribuée sur ce corps; posons

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}.$$

La *force magnétisante* H a pour composantes, suivant les trois axes coordonnés,

$$H_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right),$$
$$H_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right),$$
$$H_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right).$$

L'état magnétique d'un élément étant défini par les composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de son intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$, ce sont les quantités H_x, H_y, H_z qui jouent, dans la théorie de l'hysteresis magnétique (*), le rôle de composantes de l'action extérieure. Ce sont ces quantités qu'il faudrait connaître pour pouvoir comparer exactement les données de l'expérience aux conséquences de la théorie.

Malheureusement, ces quantités sont malaisées à connaître dans la plupart des cas; ce que l'on connaît assez aisément, et ce que les expérimentateurs font figurer, en général, dans les tableaux ou les graphiques qui résument leurs expériences, ce sont les composantes

$$\mathcal{G}_x = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}, \qquad \mathcal{G}_y = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}, \qquad \mathcal{G}_z = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z},$$

du *champ extérieur* $\mathcal{G}$. En substituant les unes aux autres les composantes du champ extérieur et les composantes de la force magnétisante, on fait une grossière approximation qui peut même se transformer en une grave erreur. Dans notre premier mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis,* nous avons montré comment les recherches expérimentales devraient être conduites si l'on voulait éviter cette substitution; mais, en attendant que des données de signification certaine aient été fournies par une semblable méthode, utilisons, au moins au point de vue qualificatif, les renseignements déjà recueillis par les expérimentateurs, malgré l'incertitude

(*) Voyez le Chapitre IV de notre premier mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.*

dans laquelle nous sommes touchant la légitimité de la substitution des quantités H, $\mathcal{G}$, l'une à l'autre.

Comme en notre premier mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis*, nous supposerons que les deux quantités $\mathfrak{M}$ et $\mathcal{G}$ ont, sans cesse, une même direction invariable; cette restriction nous dispensera de considérer les trois composantes de chacune de ces grandeurs suivant trois axes de coordonnées rectangulaires; ces grandeurs seules entreront en ligne de compte.

L'état du système sera supposé défini non seulement par son intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$, mais encore par une autre variable α, désignant une déformation élastique, une dilatation, par exemple; à cette variable α correspondra une action extérieure A; les variables $\mathfrak{M}$ et $\mathcal{G}$ remplaceront les variables B et β du Chapitre précédent.

Si nous désignons par $f(\mathfrak{M}, \alpha, T)$ la fonction magnétisante qui conviendrait au corps dépourvu d'hysteresis, la fonction $\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, T)$, qui joue ici le rôle de potentiel thermodynamique interne, sera telle que l'on ait

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, T)}{\partial \mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}}{f(\mathfrak{M}, \alpha, T)}. \tag{1}$$

Les égalités qui définissent les lignes ascendantes ou descendantes seront :

$$(2)\quad \begin{cases} dH = \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{M}^2} d\mathfrak{M} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{M} \partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{M} \partial T} dT + g_M(\mathfrak{M}, \alpha, H, A, T) |d\mathfrak{M}|, \\ dA = \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} d\alpha + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}} d\mathfrak{M} + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial T} dT + g_\alpha(\mathfrak{M}, \alpha, H, A, T) |d\alpha|, \end{cases}$$

égalités dans lesquelles, en vertu de l'égalité (1),

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{M}^2} = \dfrac{1}{f(\mathfrak{M}, \alpha, T)} - \dfrac{\mathfrak{M}}{[f(\mathfrak{M}, \alpha, T)]^2} \dfrac{\partial f(\mathfrak{M}, \alpha, T)}{\partial \mathfrak{M}}, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{M} \partial \alpha} = - \dfrac{\mathfrak{M}}{[f(\mathfrak{M}, \alpha, T)]^2} \dfrac{\partial f(\mathfrak{M}, \alpha, T)}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{M} \partial T} = - \dfrac{\mathfrak{M}}{[f(\mathfrak{M}, \alpha, T)]^2} \dfrac{\partial f(\mathfrak{M}, \alpha, T)}{\partial T}. \end{cases}$$

Ces égalités (3) font connaître sans peine le sens qu'il convient d'attribuer aux égalités (2), lorsqu'on y suppose négligeables les deux coefficients d'hysteresis g_M et g_α.

§ 2. — *Fil soumis à une action magnétisante invariable et à une traction variable.*

Supposons tout d'abord qu'un fil magnétique, pris dans un état initial donné, ait une longueur l_0 et une section ω_0; prenons-le ensuite dans un autre état, où sa longueur est l et sa section ω; nous pourrons définir la modification élastique qu'il a subie par la valeur de la dilatation linéaire

$$\alpha = \frac{l - l_0}{l_0}.$$

Soit P le poids tenseur; le travail externe élastique a pour valeur Pdl; il a aussi pour valeur $Ad\alpha$; on a d'ailleurs $dl = l_0 d\alpha$; on a donc

$$A = Pl_0.$$

L'action élastique A varie proportionnellement au poids tenseur.

Il résulte de considérations de symétrie évidentes que deux systèmes qui se déduisent l'un de l'autre en changeant $\mathfrak{M}$ et H en $-\mathfrak{M}$, $-H$ (cas auquel $\mathscr{H}$ doit être remplacé par $-\mathscr{H}$), sont identiques. D'où les propositions suivantes :

La fonction $\mathscr{F}(\mathfrak{M}, \alpha, T)$ *ne change ni de signe ni de valeur absolue, lorsqu'on y change le signe de* $\mathfrak{M}$ *sans en changer la valeur.*

La fonction g_M *change de signe sans changer de valeur lorsqu'on y remplace respectivement* $\mathfrak{M}$ *et* H *par* $-\mathfrak{M}$ *et* $-H$.

La fonction g_α *ne change ni de valeur, ni de signe, lorsqu'on y remplace respectivement* $\mathfrak{M}$ *et* H *par* $-\mathfrak{M}$ *et* $-H$.

C'est surtout à M. Ewing (*) que l'on doit un grand nombre de déterminations expérimentales touchant les propriétés d'un fil à la fois aimanté et soumis à une traction.

M. Ewing a étudié, en particulier, ce qui arrive si l'on maintient constant le champ magnétique dans lequel se trouve le fil et si l'on fait varier la charge qu'il supporte. Nous admettons que la constance du champ magnétique extérieur $\mathscr{H}$ puisse être regardée comme équivalente à la constance de la force magnétisante H. Les expériences de M. Ewing correspondront alors à ce que, dans le Chapitre précédent, nous avons nommé le premier problème.

Dans l'espace des $(A, \alpha, \mathfrak{M})$, le point figuratif du système décrit une trajectoire; c'est la projection de cette trajectoire sur le plan $AO\mathfrak{M}$ qu'a tracée et étudiée M. Ewing.

Bien que la ligne que l'on obtient en maintenant constant le champ extérieur $\mathscr{H}$ et en projetant sur le plan $AO\mathfrak{M}$ la trajectoire du point figuratif du système, diffère selon que l'on a affaire à du fer trempé, à du fer recuit, à du fer écroui, un même caractère essentiel se marque en toutes ces circonstances : selon les valeurs de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$ et de la variable α qui marque l'allongement par traction (par exemple, la dilatation linéaire), le système appartient à l'un ou à l'autre des deux cas que nous avons étudiés au Chapitre précédent; un accroissement de la charge que porte le métal déterminé soit un accroissement, soit une diminution de l'aimantation.

Villari (**) avait déjà remarqué ce fait dès 1868; plus tard, W. Thomson (***) le découvrit à son tour.

(*) J.-A. Ewing, *Experimental researches in magnetism.* (Philosophical transactions of the royal Society of London, vol. CLXXVI, p. 523, 1885.) — Voyez aussi H. Tomlinson, *Philosophical transactions of the royal Society of London*, vol. CXXXII, A., p. 341, 1891.

(**) Villari, *Poggendorff's Annalen*, CXXVI, p. 68, 1868.

(***) W. Thomson, *Effects of stress on inductive magnetism in a soft Iron.* (Proceedings of the royal Society, 10 juin 1875; Mathematical and physical papers, vol. II, p. 353.) — *Effects of stress on magnetisation of Iron, Nickel, and Cobalt.* (Proceedings of the royal Society, mai 1878; Mathematical and physical papers, vol. II, p. 403.) — *Effects of stress on the magnetisation of Iron, Nickel and Cobalt.* (Transactions of the royal Society, 1878; Mathematical and physical papers, vol. II, p. 358.)

W. Thomson avait cru pouvoir énoncer la loi suivante : Si la force magnétisante est inférieure à une certaine valeur, fonction de la température et de la charge qui tend la pièce métallique, tout accroissement de la charge détermine un accroissement de l'aimantation, et toute diminution de la charge détermine une diminution de l'aimantation. Si, au contraire, la force magnétisante est supérieure à cette valeur, tout accroissement de la charge détermine une diminution de l'aimantation et toute diminution de la charge détermine un accroissement de l'aimantation. W. Thomson nomme cette valeur : *valeur critique de Villari.*

M. J.-A. Ewing (*) a fait observer fort justement que cet énoncé donné par W. Thomson ne pouvait s'accorder avec ses expériences ; il a indiqué comme plus vraisemblable la loi que l'on déduirait de la précédente en remplaçant respectivement la *force magnétisante* et *la charge* par l'*intensité d'aimantation* et l'*allongement.* Cette manière de voir est entièrement confirmée par la théorie exposée au Chapitre précédent. D'après cette théorie, en effet, il ne sert de rien, pour savoir si le système se trouve dans le premier cas ou le second, de considérer les valeurs des actions extérieures qui le sollicitent; il suffit de considérer les valeurs des variables normales privilégiées α et β (ici α et $\mathfrak{M}$) qui en définissent l'état, et de chercher quel signe elles font prendre à la quantité $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}$ (que nous pouvons désigner ici par $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$).

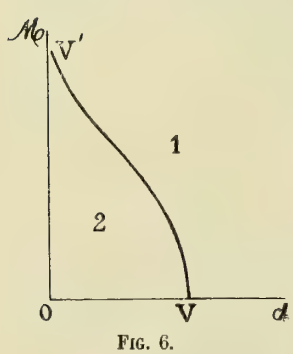


FIG. 6.

Supposons la température T invariable. Dans le plan $\alpha 0 \mathfrak{M}$ (fig. 6), l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}} = 0$$

définit une ligne VV' que l'on peut, à l'imitation de W. Thomson, nommer *ligne de Villari.*

(*) J.-A. EWING, *loc. cit.*, p. 622.

Toutes les observations relatées et figurées par Ewing s'expliquent bien si l'on admet les propositions suivantes :

1° La ligne de Villari VV′ monte de droite à gauche;

2° Dans la région 1, située à droite de la ligne de Villari, $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est positif; le système se trouve dans le premier cas; tout allongement de l'aimant produit une diminution de l'intensité magnétique;

3° Dans la région 2, située à gauche de la ligne de Villari, $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est négatif; le système se trouve dans le second cas; tout allongement du fil produit un accroissement de l'intensité d'aimantation;

4° Pour le fer recuit, la ligne de Villari VV′ est plus voisine de l'axe O$\mathfrak{M}$ que pour le fer trempé;

5° Pour le fer écroui, la ligne de Villari VV′ est plus écartée de la ligne O$\mathfrak{M}$ que pour le fer recuit.

M. Ewing n'a point projeté la trajectoire du point figuratif du système sur le plan αO$\mathfrak{M}$, ce qui eût donné des renseignements faciles à interpréter; il a donné seulement la projection, beaucoup plus difficile à discuter, de cette trajectoire sur le plan AO$\mathfrak{M}$. Les tracés ainsi obtenus s'accordent bien, en général, avec les propositions que nous venons d'énoncer.

Nous avons vu que, d'après les expériences de M. Ewing, la ligne de Villari existait, mais avec des positions différentes, selon que le fer était trempé, recuit ou écroui. W. Thomson avait cru reconnaître que, pour le nickel et le cobalt, la ligne de Villari n'existait pas et que, dans la région où se trouve l'origine des coordonnées, ces corps se trouvaient non pas dans le second cas, mais dans le premier, un accroissement du poids tenseur provoquant une diminution de l'aimantation et inversement. MM. J.-A. Ewing et G.-C. Cowan (*) avaient confirmé cette manière de voir. Mais M. A. Heydweiler (**) a montré, il y a quelques années, que le nickel se comportait

(*) J.-A. Ewing et G.-C. Cowan, *London philosophical transactions*, vol. CLXXIX, A., p. 325, 1888.

(**) A. Heydweiler, *Wiedemann's Annalen*, Bd. LII, p. 462, 1894.

comme le fer, la ligne de Villari étant seulement beaucoup plus rapprochée de l'origine des coordonnées pour celui-là que pour celui-ci. Plus récemment, M. Georg S. Mayer (*) a montré qu'il en était de même du cobalt.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que l'aimantation du fil de fer soumis à la tension était dirigée dans un certain sens, et nous avons compté ce sens comme positif.

Mais on peut aussi donner à ce fil une aimantation longitudinale de sens contraire, qui sera comptée comme négative.

Considérons deux fils identiques, soumis à des tractions identiques et aimantés à des intensités égales, mais opposées; une même variation de traction produira, sur ces deux fils, des variations d'aimantation égales en valeur absolue, mais de sens contraires, ainsi que les simples raisons de symétrie que nous avons fait valoir au début de ce paragraphe suffisent à le montrer. On en trouve d'ailleurs la démonstration expérimentale très nette dans un mémoire dû à M. Shida (**).

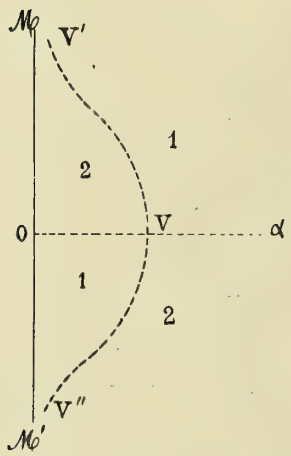


FIG. 7.

Si l'on admet la proposition que nous venons d'énoncer, on voit que $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ doit changer de signe lorsqu'on traverse l'axe 0α. En outre, la ligne de Villari doit se composer de deux parties symétriques par rapport à 0α.

La figure 6 doit donc être complétée comme l'indique la figure 7. Les lignes pointillées sont les lignes le long desquelles $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est égal à 0. Rien ne détermine *a priori* la position du point V sur l'axe 0α; ce point peut même être rejeté à l'infini.

Dans l'angle $\alpha 0 \mathfrak{M}'$, la ligne de Villari VV'' partage le plan en deux régions; dans la région voisine de l'origine des coordonnées, la quantité $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est négative et le système se trouve dans le premier cas; dans la région qui se trouve au delà de la ligne VV'' par rapport à

(*) GEORG.-S. MAYER, *Wiedemann's Annalen*, Bd. LIX, p. 134, 1896.
(**) R. SHIDA, *Proceedings of the royal Society of London*, vol. XXXV, p. 404, 1883.

l'origine, la quantité $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est positive et le système se trouve dans le second cas.

Si, dans un champ magnétique constant, on fait osciller indéfiniment l'action élastique extérieure A (poids tenseur) entre deux valeurs fixes A_0, A_1, la trajectoire du point figuratif du système dans l'espace $(A, \mathfrak{M}, \alpha)$ tendra vers un cycle fermé qui se projettera également sur le plan $A0\mathfrak{M}$ suivant un cycle fermé. M. Ewing a tracé un certain nombre de ces cycles fermés dans des conditions variées; une forme fréquente de tels cycles est celle que représente la figure 8.

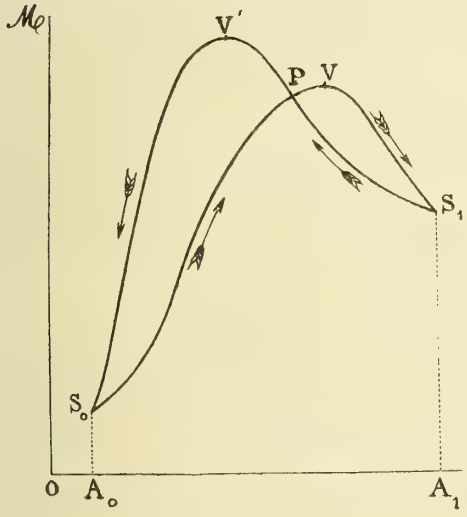


Fig. 8

Les points V, V' sont les projections de points de l'espace en lesquels est vérifiée l'équation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}} = 0.$$

Sur le plan $\alpha 0\mathfrak{M}$, ces points de l'espace se projettent en des points de la ligne de Villari. On peut donner le nom de *cylindre de Villari* à la surface que définit l'équation (1). P est une intersection apparente.

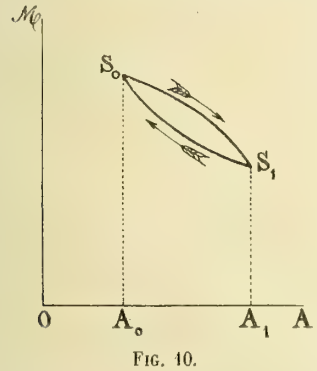


Fig. 10.

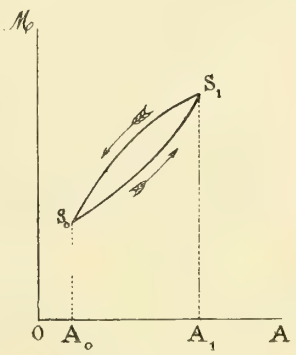


Fig. 9.

On peut d'ailleurs rencontrer des cycles fermés dont la trajectoire ne rencontre pas le cylindre de Villari. Un cycle fermé tel que le cycle représenté par la figure 9 est tout entier décrit dans une région de l'espace où $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est négatif. Au contraire, les cycles que représentent les figures 10 et 11 sont décrits en entier dans la région de l'espace où $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est positif;

dans le second de ces deux cycles, P est une intersection apparente.

Les expériences de M. Ewing nous offrent des exemples de ces divers types de cycles fermés.

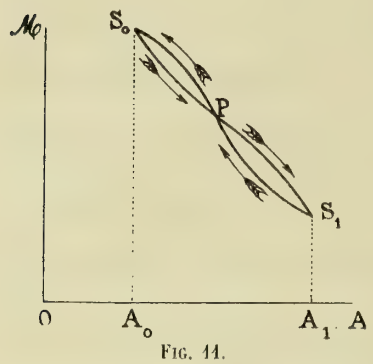


Fig. 11.

Supposons maintenant qu'un fil, placé dans un champ magnétique déterminé et soumis à une traction déterminéeé prouve des secousses; pour pouvoir raisonner avec précision au sujet de ces secousses, nous imaginerons qu'elles consistent en petites variations de l'action extérieure (poids tenseur) autour d'une valeur moyenne invariable A. Le système tendra vers l'état naturel qui correspond aux valeurs moyennes de la force magnétisante et de l'action élastique auxquelles il est soumis. La projection du point figuratif sur le plan A0$\mathfrak{M}$ se déplacera sur une parallèle à l'axe 0$\mathfrak{M}$; il montera ou descendra, selon que l'état initial du système était au-dessous ou au-dessus de la surface des états naturels. Ces effets des secousses ont été fort exactement observés par M. Ewing et rapportés dans le mémoire que nous avons cité.

Soit $F(\mathfrak{M}, \alpha)$ la fonction qui joue, dans le cas actuel, le rôle de potentiel thermodynamique apparent. L'état naturel du système soumis à l'action élastique A et à la force magnétisante H est défini par les équations

$$A = \frac{\partial F(\mathfrak{M}, \alpha)}{\partial \alpha},$$

$$H = \frac{\partial F(\mathfrak{M}, \alpha)}{\partial \mathfrak{M}}.$$

Si, maintenant constante la force magnétisante, on fait varier l'action élastique A, ces équations représentent, dans l'espace des $(A, \alpha, \mathfrak{M})$, une ligne bien déterminée, qui se projette également, sur le plan A0$\mathfrak{M}$, suivant une ligne déterminée NN'. Lorsque le système, soumis à l'action magnétisante constante que l'on considère, et à une action élastique sensiblement constante, éprouve des oscillations prolongées, la projection du point figuratif sur le plan A0$\mathfrak{M}$ tend vers le point d'abscisse A sur la ligne NN'.

Supposons que, maintenant l'action magnétisante constante, on fasse osciller l'action A entre deux valeurs déterminées A_0, A_1; supposons en outre qu'avant d'observer la valeur de $\mathfrak{M}$ qui correspond à chaque valeur de A, on soumette le système à une longue série de secousses; la valeur obtenue de $\mathfrak{M}$ sera sensiblement l'ordonnée du point de la courbe NN′ qui a pour abscisse A; dès lors, les lignes d'aller et de retour, au lieu d'être distinctes, de former, par exemple, un cycle fermé comme le cycle $S_0VS_1V'S_0$ (fig. 12), seront sensiblement confondues avec la ligne NN′. Sur la figure 12, la ligne des états naturels NN′ est marquée en points ronds; les lignes d'aller et de retour du système soumis à des vibrations, en traits interrompus.

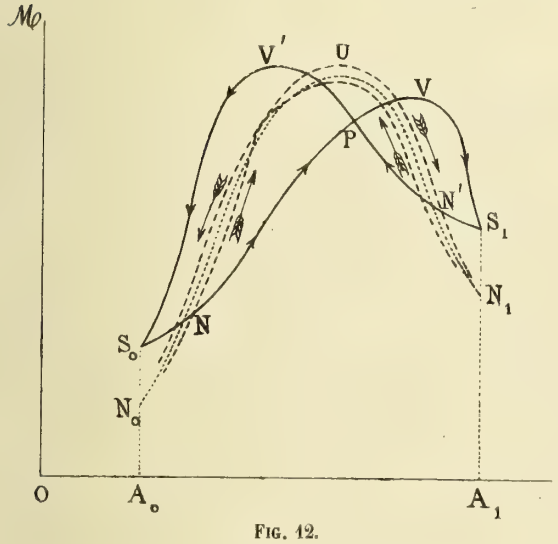


FIG. 12.

Les observations de M. Ewing concordent fort exactement avec les indications qui précèdent.

M. Ewing a trouvé que la ligne NN′ pouvait, comme en la figure 12, présenter un point U plus élevé que tous les autres. En ce point, on a nécessairement

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 F(\mathfrak{M}, \alpha)}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}} = 0.$$

Il y a donc des points de l'espace où cette égalité (2) est vérifiée; ces points sont sur un cylindre, de génératrices parallèles à OA, que l'on peut nommer *cylindre de Villari pour les états naturels;* ce cylindre partage l'espace en deux régions : dans la région voisine de l'origine des coordonnées et située du côté des $\mathfrak{M}$ positifs, $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est négatif; l'inverse a lieu dans l'autre région.

D'ailleurs, $\frac{\partial^2 F(\mathfrak{M}, \alpha)}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ doit, comme $\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha)}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$, changer de signe avec $\mathfrak{M}$; la

ligne de Villari relative aux états naturels doit donc avoir, elle aussi, la disposition de la figure 7.

§ 3. — *Fil soumis à une traction invariable et à une force magnétisante variable.*

Nous avons étudié les phénomènes produits lorsqu'on maintient invariable l'action magnétisante H (ou plutôt le champ extérieur $\mathscr{H}$) et que l'on fait varier l'action élastique A; il nous faut maintenant examiner le problème inverse : laisser invariable l'action élastique A, faire varier la force magnétisante, et étudier comment varient la déformation α et l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$.

Touchant ce second problème, nous trouvons des renseignements expérimentaux dans les mémoires déjà cités de M. Ewing et de M. Shida; malheureusement, si ces auteurs nous indiquent de quelle manière, dans leurs expériences, l'aimantation a varié avec le champ magnétique, ils ne nous disent rien touchant les dilatations ou les contractions du fil magnétique par l'effet de ces variations; ce serait là une omission regrettable, car elle ne nous laisserait aucun moyen de vérifier une importante prévision de la théorie, si d'autres recherches ne nous fournissaient d'une manière complète cette vérification.

Projetons le point figuratif du système sur le plan $\alpha O \mathfrak{M}$. $\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ sera égal à 0 lorsque cette projection tombera soit en un point de l'axe $O\alpha$, soit en un point de la *ligne de Villari* V'VV'' (fig. 7). Si cette projection tombe en une région marquée 1 sur cette figure, $\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est positif; si elle tombe en une région marquée 2 sur la même figure, $\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{M}}$ est négatif. Dans le premier cas, tout accroissement de l'intensité d'aimantation (et, par conséquent, tout accroissement du champ extérieur) produira une contraction de l'aimant; dans le second cas, tout accroissement de l'intensité d'aimantation (et, par conséquent, tout accroissement du champ extérieur) produira une dilatation de l'aimant.

Cet énoncé équivaut visiblement au suivant :

Si la projection du point figuratif sur le plan $\alpha 0\mathfrak{M}$ *se trouve à l'intérieur de la courbe de Villari* $V'0V''$, *tout accroissement de la valeur absolue de l'aimantation produit une dilatation de l'aimant, toute diminution de la valeur absolue de l'aimantation produit une contraction de l'aimant. L'inverse a lieu si la projection du point figuratif tombe à l'extérieur de la ligne* $V'0V''$.

Si les expériences de M. Ewing et de M. Shida ne nous permettent pas de soumettre ce théorème au contrôle de l'expérience, du moins est-il d'accord avec d'anciennes expériences de Joule (*).

Joule a montré, en effet, qu'une barre de fer que l'on aimante longitudinalement, subit une dilatation longitudinale appréciable; mais cette dilatation peut être remplacée par une contraction lorsque l'on soumet à une aimantation intense un fil de fer fortement tendu.

Ces expériences de Joule ont été reprises ultérieurement par M. A.-M. Mayer (**), par M. Barrett (***) et surtout par M. Bidwell (IV). Les résultats obtenus par ces observateurs confirment de la façon la plus heureuse les indications de la théorie ; voici, en effet, ces résultats, pour l'interprétation desquels on se souviendra des renseignements que les expériences de M. Ewing fournissent touchant la *ligne de Villari;* cette ligne, qui a la forme indiquée en la figure 7, est, pour une même valeur de $\mathfrak{M}$, plus écartée de l'axe $0\mathfrak{M}$ pour l'acier que pour le fer; elle s'écarte également de l'axe $0\mathfrak{M}$ par l'effet de la trempe.

Lorsqu'on aimante une barre ou un fil de fer non chargé, sa longueur croît d'abord avec la valeur absolue du champ, passe par un maximum, puis décroît lorsque la valeur absolue du champ continue à croître; il peut même arriver que la barre finisse par avoir une longueur moindre que celle qu'elle avait à l'état neutre.

L'acier se comporte de même, mais le maximum de longueur est atteint

(*) Joule, *Philosophical magazine,* vol. XXX, pp. 76 et 225, 1847.
(**) A.-M. Mayer, *Philosophical magazine,* vol. XLVI, p. 177.
(***) Barrett, *Nature,* vol. XXVI, p. 585, 1882.
(IV) Bidwell, *Proceedings of the royal Society,* vol. XL, pp. 109 et 257, 1886.

pour une valeur du champ moindre que pour le fer ; cette valeur est d'autant plus faible que l'acier est plus dur, du moins tant que la trempe de l'acier a lieu au-dessous du jaune; au-dessus, l'effet de la dureté est inverse.

Un fil de fer qui supporte un poids constant se comporte comme un fil de fer non tendu; mais la valeur du champ pour laquelle la longueur de ce fil cesse de croître pour commencer à décroître, est d'autant plus petite que le fil est plus chargé; elle est aussi, pour un fil d'acier, plus petite que pour un fil de fer.

Nous avons vu que, pour le nickel, les divers points de la ligne de Villari étaient si peu éloignés de l'origine que W. Thomson n'avait pu en reconnaître l'existence; il avait pensé que la traction diminuait toujours l'aimantation longitudinale d'un barreau de nickel. M. Heydweiler, il est vrai, a reconnu, pour le nickel, l'existence d'une ligne de Villari peu distante de l'origine des coordonnées. En conformité avec les expériences de W. Thomson, M. Bidwell a trouvé que l'aimantation longitudinale diminuait toujours la longueur d'un barreau de nickel ; il va sans dire que l'aimantation communiquée au nickel par cet observateur surpasse notablement celle qui a permis à M. Heydweiler de mettre en évidence la ligne de Villari.

W. Thomson avait pensé que l'inversion de Villari était déterminée par une relation entre la force magnétisante et le poids tenseur; M. Ewing a montré que cette manière de voir était incompatible avec ses expériences et a émis l'idée que la loi de cette inversion s'exprimait par une relation entre la dilatation longitudinale et l'aimantation ; cette idée est pleinement confirmée par la théorie précédente.

Les expériences de M. A.-M. Mayer et de M. Bidwell montrent de leur côté, ce qui s'accorde également avec notre théorie, que la force magnétisante qui produit l'allongement maximum d'un fil de fer soumis à une traction donnée n'est nullement déterminée; elle n'a pas la même valeur, selon qu'elle est obtenue en faisant croître le champ depuis 0 jusqu'à ce que le maximum de longueur du barreau soit atteint, ou bien en faisant croître le champ au delà de l'intensité que nous venons de définir, et en le faisant décroître ensuite.

La projection du point figuratif du système sur le plan HOm présente les

mêmes caractères généraux que si l'état du système était entièrement défini par les deux seules variables $\mathfrak{M}$ et T (*); cependant, ces caractères généraux pourraient être plus ou moins altérés par des *intersections apparentes* entre diverses lignes ascendantes ou descendantes; semblables intersections ne paraissent pas s'être rencontrées dans les recherches de M. Ewing et de M. Shida; les résultats de ces recherches sont absolument conformes, pour chaque charge invariable du fil magnétique, aux lois de l'hysteresis magnétique telles qu'on les peut établir en négligeant l'influence de la déformation élastique.

Nous n'aurions donc pas à insister sur le problème en question s'il ne nous amenait à envisager l'influence des chocs et des vibrations sur l'aimantation d'une tige de fer maintenue dans un champ magnétique invariable, dirigé suivant l'axe de la tige; supposons que ces chocs soient longitudinaux et puissent, par conséquent, être assimilés à des variations de tension longitudinale de la tige, autour d'une valeur moyenne sensiblement constante; l'état de l'aimant devra tendre vers l'*état naturel* correspondant au champ et à la tension moyenne qui agissent sur lui; ce renseignement, joint à ceux que nous possédons touchant la forme et la disposition de la projection, sur le plan H0$\mathfrak{M}$, de la ligne des états naturels relative à une valeur donnée de la tension A, rend aisément compte de toutes les observations accumulées depuis Gilbert touchant l'influence des secousses sur l'aimantation.

On voit que l'étude expérimentale des relations qui existent entre l'allongement d'un fil soumis à une traction et l'aimantation longitudinale de ce fil s'accorde pleinement avec les propositions théoriques que nous avons établies au Chapitre précédent.

(*) Voyez notre premier mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis*, Chapitre IV.

CHAPITRE III.

INFLUENCE DE LA TREMPE SUR LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES MÉTAUX.

§ 1. — *Intersections apparentes dans les tracés relatifs à certaines modifications permanentes des métaux.*

Les transformations allotropiques ou chimiques qui expliquent les effets de trempe, de recuit, d'écrouissage, accompagnent les divers changements de propriétés physiques des métaux et en compliquent les lois; elles expliquent certaines particularités qui, si l'on ne prenait garde à ces transformations, sembleraient contredire la théorie que nous développons.

Considérons un système défini par une variable normale α, à laquelle correspond l'action extérieure A, et étudions les modifications isothermiques réalisables de ce système; nous savons qu'une telle modification sera représentée, sur le plan $A0\alpha$, par des segments de *lignes ascendantes,* alternant avec des segments de *lignes descendantes;* par un point du plan $A0\alpha$ passe une ligne ascendante et une seule, une ligne descendante et une seule, en sorte que deux lignes ascendantes ne peuvent jamais se couper, non plus que deux lignes descendantes.

Il n'en est plus de même si le système dépend de deux variables normales privilégiées, α et β; maintenons constantes la température T et l'action B relative à la variable β et faisons varier l'action A; la trajectoire du point figuratif du système est une courbe gauche dans l'espace $0A\beta\alpha$; la projection de cette courbe sur le plan $A0\alpha$ peut présenter des intersections *apparentes* entre les projections de deux lignes qui, dans l'espace, ne se coupent pas. Au

cours des deux précédents Chapitres, nous avons eu occasion de rencontrer de telles intersections apparentes.

Si α est une propriété physique d'un métal (intensité d'aimantation, traction, flexion, torsion) et si β est la variable, de nature chimique, qui fixe le degré de dureté du métal, nous pourrons, dans le plan $A0\alpha$, constater des *intersections apparentes,* soit entre deux lignes ascendantes, soit entre deux lignes descendantes.

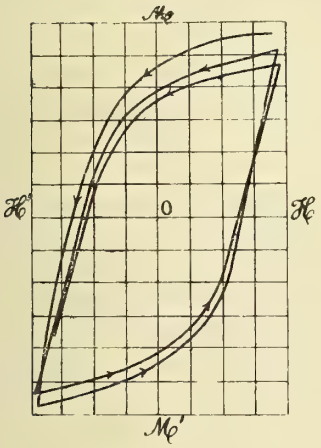


Fig. 13.

Les figures par lesquelles M. Ewing, en son grand mémoire sur l'hysteresis magnétique (*), représente les variations de l'intensité d'aimantation d'un barreau de fer en fonction du champ, présentent parfois de telles intersections apparentes. La figure 13, qui est la reproduction de la figure 26, planche 61, du mémoire de M. Ewing, montre ces intersections avec une netteté particulière.

M. Cantone (**), en étudiant la flexion d'une lame de laiton recuit, et en représentant les lois de cette flexion dans un plan où les poids fléchissants étaient portés en abscisses et les flèches en ordonnées, a obtenu la courbe que représente la figure 14; les intersections apparentes soit de deux lignes ascendantes, soit de deux lignes descendantes, y sont très nettement reconnaissables.

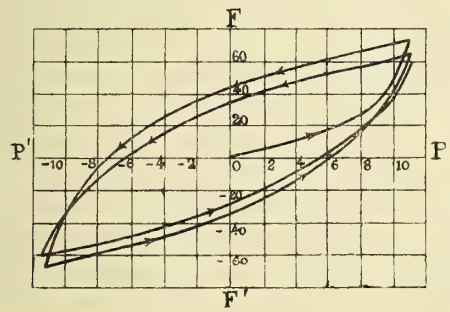


Fig. 14.

Enfin, M. H. Bouasse (***), dans son étude sur la torsion des fils de platine, donne des figures, les figures 11, 12 et 13, où se remarquent des intersections apparentes; nous ne les repro-

(*) J.-A. Ewing, *Experimental researches in magnetism.* (Philosophical transactions of the royal Society of London, vol. CLXXVI, 1885.)

(**) G. Cantone, *Sull' accomodazione elastica.* (Atti della reale Accademia dei Lincei, série V : *Rendiconti*, vol. II, p. 385, 1893.)

(***) H. Bouasse, *Sur la torsion des fils fins.* (Thèse de la Faculté des sciences de Paris, 1897.)

duisons pas ici, parce que la lecture du mémoire de M. H. Bouasse ne nous a pas permis de reconnaître si ces figures étaient la traduction directe de faits d'expériences, ou simplement des schémas destinés à représenter l'interprétation des phénomènes, telle que l'a conçue M. Bouasse.

§ 2. — *D'un système où la dureté ne subit que des variations séculaires.*

L'étude d'un système dont les propriétés dépendent à la fois d'une variable, — que nous sommes convenu d'appeler la *dureté,* — qui fixe son état chimique ou allotropique, et d'une autre variable, définissant quelque propriété physique et susceptible, comme la première, d'éprouver des variations permanentes, se présente, en général, comme très compliquée. Mais, dans certains cas, certaines approximations sont permises qui simplifient extrêmement cette étude; nous allons nous occuper surtout de ces approximations.

Au § 2 du Chapitre III de notre précédent Mémoire, la discussion des expériences de MM. Carl Barus et Vincent Strouhal nous a montré qu'aux températures basses ou modérément élevées existait une région étendue que nous avons nommée *région des variations séculaires de la dureté;* tant que le point figuratif se déplace seulement au sein de cette région, la *dureté* n'éprouve que des variations permanentes extrêmement petites; on peut, du reste, supposer que l'état du système dépend non seulement de la dureté, mais d'une autre variable, et que les variations permanentes de cette dernière ne sont pas assujetties à demeurer très petites; on est ainsi amené à étudier le problème général que voici :

Un système est défini par la température T *et par deux variables privilégiées* α *et* x, *correspondant aux actions extérieures* A *et* X; *toute modification réalisable de ce système vérifie les deux égalités*

$$(1)\quad dA = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial \alpha^2} d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial \alpha \partial x} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial \alpha \partial T} dT + f_\alpha(\alpha, x, T, A, X)\,|d\alpha|,$$

$$(2)\quad dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial \alpha \partial x} d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial x \partial T} dT + f_x(\alpha, x, T, A, X)\,|dx|.$$

On se propose d'étudier les modifications de ce système en supposant f_x *très petite par rapport aux autres fonctions qui figurent dans les divers termes des égalités* (1) *et* (2).

L'égalité (2), intégrée entre deux états 0 et 1 du système, peut s'écrire

$$(3) \quad \ldots \ldots \quad \left[X - \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial x}\right]_0^1 = \sum f_\alpha(\alpha, x, T, A, X)|dx|.$$

Supposons x assujetti à n'éprouver que des modifications qui ne soient pas très grandes; pour que $\sum|dx|$ ait une très grande valeur, il sera nécessaire et suffisant que x ait subi un grand nombre d'augmentations et de diminutions alternatives; hors ce cas, le second membre de l'égalité (3) est une quantité fort petite et

$$\left[X - \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial x}\right]_0^1$$

diffère fort peu de 0.

Prenons donc un état initial bien déterminé du système et désignons par C la valeur de

$$\left[X - \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial x}\right]$$

en cet état initial. *Si les modifications subies par le système pour passer de cet état initial à son état actuel ne font pas prendre à* $\sum|dx|$ *une très grande valeur,* nous pourrons, en cet état actuel et en tout état voisin, écrire l'égalité approchée

$$(4) \quad \ldots \ldots \ldots \quad X - \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial x} = C.$$

Résolvons cette équation par rapport à x; elle nous donnera

$$(5) \quad \ldots \ldots \ldots \quad x = \xi(\alpha, T, X, C).$$

Dans l'égalité (1), remplaçons x par cette valeur (5).

Si nous posons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha, T, X, C) &= \mathcal{F}[\alpha, \xi(\alpha, T, X, C), T], \\ g_\alpha(\alpha, T, X, A, C) &= f_\alpha[\alpha, \xi(\alpha, T, X, C), T, A, X], \end{aligned}\right.$$

l'égalité (1) deviendra

$$(7)\quad dA = \frac{\partial^2 F(\alpha, T, X, C)}{\partial \alpha^2} d\alpha + \frac{\partial^2 F(\alpha, T, X, C)}{\partial \alpha \partial X} dX + \frac{\partial^2 F(\alpha, T, X, C)}{\partial \alpha \partial T} dT + g_\alpha(\alpha, T, X, A, C)|d\alpha|.$$

Telle est la formule qui nous fera connaître $d\alpha$, sans que nous ayons à nous préoccuper de dx, lorsque nous connaîtrons les valeurs de dA, dX, dT.

Supposons, en particulier, que l'action X demeure constante ; c'est ce qui arrive assurément dans le cas où X désigne la *dureté*, car, dans ce cas, l'action extérieure X correspondant à cette variable est identiquement nulle; nous pouvons alors poser $dX = 0$, et, en outre, ne plus faire figurer X au nombre des variables dont dépend la fonction F ; l'égalité (7) deviendra

$$(8)\quad dA = \frac{\partial^2 F(\alpha, T, C)}{\partial \alpha^2} d\alpha + \frac{\partial^2 F(\alpha, T, C)}{\partial \alpha \partial T} dT + g_\alpha(\alpha, T, A, C)|d\alpha|.$$

Cette égalité, où C est une constante, a exactement la forme de l'égalité qui régit les modifications réalisables d'un système dont l'état dépend d'une seule variable normale hors la température.

Si donc un système, dont la dureté n'éprouve que des variations permanentes séculaires, dépend d'une autre variable susceptible de variations permanentes, cette dernière sera soumise à des lois semblables de tout point à celles qui régissent les modifications permanentes d'un système défini par une seule variable normale, hors la température.

En particulier, la surface définie, dans l'espace des A, T, α, par l'équation

$$(9)\quad g_\alpha(\alpha, A, T, C) = 0,$$

jouera, dans cette théorie, le rôle de surface des états naturels.

De ce premier théorème, les exemples abondent; la plupart des systèmes pris ordinairement comme exemples de systèmes qui dépendent d'une seule variable susceptible d'hysteresis (barreau aimanté, fil soumis à la traction, fil soumis à la torsion) sont, en réalité, des systèmes qui dépendent non seulement de cette première variable, mais encore de la *dureté;* seulement, dans les conditions où les modifications permanentes de ces systèmes sont étudiées, la dureté n'éprouve que des variations permanentes séculaires; ces systèmes se comportent donc comme s'ils ne dépendaient que d'une seule variable douée d'hysteresis.

Il importe de distinguer nettement entre les états du système qui jouent le rôle d'états naturels dans cette théorie approchée et les véritables états naturels du système.

A chaque système de valeurs de A, X, T correspond un seul état naturel (α, x) du système, défini par les deux équations

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} f_\alpha(\alpha, x, T, A, X) = 0, \\ f_x(\alpha, x, T, A, X) = 0. \end{cases}$$

Nous dirons que ces deux équations définissent les *états naturels proprement dits.*

Au contraire, les états qui jouent le rôle d'états naturels dans la théorie simplifiée, où la seule variable α est douée d'hysteresis, sont définis par les équations

$$(9^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad g_\alpha(\alpha, T, X, A, C) = 0,$$

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \xi(\alpha, T, X, A, C),$$

que la seconde égalité (6) permet encore d'écrire

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} f_\alpha(\alpha, x, T, A, X) = 0, \\ x = \xi(\alpha, T, X, A, C). \end{cases}$$

L'ensemble de ces états n'est défini qu'autant que l'on se donne la valeur de la constante C; nous leur donnerons le nom d'*états naturels fictifs relatifs à une valeur donnée de la constante* C.

La théorie approchée que nous venons de donner est applicable à un système qui part d'un état initial déterminé et qui, à partir de cet état, subit certaines modifications soumises aux deux restrictions suivantes :

1° Aucune de ces modifications n'est assez étendue pour faire sortir le système de la région où les variations permanentes de la variable x sont purement séculaires ;

2° Ces modifications ne sont pas assez nombreuses pour que $\sum d|x|$ ait une très grande valeur.

Supposons, pour le moment, la première condition vérifiée. Donnant à C la valeur que définit l'état initial du système, nous pourrons représenter, avec une approximation satisfaisante, par les égalités (5) et (7), une suite de modifications du système ; mais, lorsque cette suite se prolongera outre mesure, l'approximation cessera d'être satisfaisante ; si nous voulons obtenir de nouveau une représentation approchée des modifications ultérieures du système, nous devrons prendre, pour nouvel état initial, un des états auxquels le système est parvenu en dernier lieu ; calculer la valeur C′ que prend, en cet état, la quantité

$$\left[X - \frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial x}\right]$$

et substituer cette valeur C′ à la valeur C dans les égalités précédentes. La nouvelle représentation approchée ainsi obtenue sera valable pour une suite étendue de modifications du système ; mais lorsque cette suite se prolongera outre mesure, il faudra changer à son tour la représentation précédente en retouchant la valeur de la constante C′ et la remplaçant par une nouvelle valeur C″.

Éclaircissons ces considérations par un exemple.

Supposons que l'action X soit invariable, ainsi qu'il arrive lorsque la variable x est le degré de dureté d'un métal ; supposons, en outre, la température T maintenue invariable, et étudions les modifications isothermiques déterminées par les variations de l'action A.

Imaginons, par exemple, que l'action A oscille sans cesse entre deux valeurs extrêmes, A_0, A_1.

Prenons le système dans un certain état initial, dans lequel

$$\left[X = -\frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial x}\right]$$

a la valeur C, et considérons l'égalité (8) correspondant à cette valeur de C. Il existe un cycle isotherme simple, dont le parcours entier vérifie l'égalité (8) et dont les sommets ont pour abscisses respectives A_0, A_1; ce cycle est évidemment déterminé, de forme et de position, lorsqu'on connaît les valeurs des quatre quantités A_0, A_1, T, C; nommons-le $\gamma(A_0, A_1, T, C)$.

Si les états naturels fictifs relatifs à la valeur C de la constante sont des états naturels stables, — et nous supposerons qu'il en soit ainsi, — la trajectoire du point figuratif relative à chaque oscillation complète $A_0A_1A_0$ se déformera d'une oscillation à l'autre de manière à tendre vers le cycle $\gamma(A_0, A_1, T, C)$; en général, au bout d'un certain nombre d'oscillations, elle différera fort peu de ce cycle ; continuons alors indéfiniment les oscillations de l'action A ; au bout d'un nombre suffisant d'oscillations, nous constaterons que la trajectoire du point s'est déformée est déplacée d'une manière sensible; cette trajectoire sera encore très peu différente d'un cycle fermé, mais ce cycle ne sera plus le cycle $\gamma(A_0, A_1, T, C)$; si nous prenons un état du système marqué par un des points de la trajectoire actuelle, et si nous calculons la valeur C′ que prend, en cet état, la quantité

$$\left[X = -\frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, x, T)}{\partial x}\right],$$

nous constaterons que la trajectoire du point figuratif diffère maintenant très peu du cycle fermé $\gamma(A_0, A_1, T, C')$.

Ainsi, lorsqu'on fait indéfiniment osciller l'action extérieure A entre deux limites fixes A_0, A_1, on constate que la trajectoire du point figuratif, au lieu de tendre vers un cycle limite fixe, tend vers un cycle limite qui se déplace et se déforme lentement lorsque le nombre des oscillations de l'action extérieure croît et devient très grand.

On pourrait énoncer un théorème analogue pour le cas où, maintenant fixe l'action extérieure A, on ferait osciller la température T entre deux valeurs limites T_0, T_1.

De ce dernier théorème, nous trouverons, au prochain Chapitre, d'importantes confirmations en étudiant les recherches de M. L. Marchis sur le déplacement du point 0° du thermomètre à mercure ; à l'appui du premier, nous ne pouvons signaler que des faits étudiés d'une manière moins complète et moins systématique.

Si l'on soumet un fil à un nombre considérable d'oscillations de torsion entre deux azimuts donnés, la trajectoire du point figuratif de l'état du fil doit tendre, non vers un cycle fixe, mais vers un cycle dont la forme varie lentement pendant que les oscillations se multiplient. D'après ce que nous avons vu dans notre quatrième Mémoire, Chapitre Ier, § 5, cette déformation lente du cycle doit se traduire par une variation lente dans la loi d'amortissement des oscillations; ainsi s'expliquerait la *fatigue d'élasticité* constatée, dans ces circonstances, par W. Thomson (*).

Dans le laboratoire de M. Fleming, M. Roger Smith (**) a constaté une augmentation considérable de l'hysteresis dans un échantillon de fer ayant été soumis à 240 millions d'inversions d'aimantation.

Considérons le cycle isotherme fermé $\gamma(A_0, A_1, T, C)$. Il coupe assurément en deux points l'isotherme fictive des états naturels relative à la valeur C de la constante; on peut en conclure que $g_x(\alpha, T, A, C)$ et, par conséquent, $f_x(\alpha, x, T, A)$, qui est la même quantité exprimée au moyen d'autres variables, ne gardent pas un signe invariable tout le long de ce cycle; mais ce cycle ne rencontre pas forcément l'isotherme des états naturels proprement dits; il se peut donc que, le long du parcours de ce cycle, la fonction $f_x(\alpha, x, T, A)$ ne change pas de signe.

Ainsi, lorsque les variations permanentes de la variable x sont des variations séculaires, il peut arriver que toute une série de modifications subies

(*) W. Thomson, *Proceedings of the royal Society of London*, vol. XIV, p. 289, 18 mai 1865. — *Scientifics Papers*, vol. III, pp. 22 et seqq.

(**) Expérience rapportée dans : *L'éclairage électrique*, t. II, p. 310, 1895.

par le système laisse invariable le signe de la foncion f_x, bien que, parmi ces modifications, se trouvent des cycles presque fermés.

S'il en est ainsi, et si l'on sait quel est le signe invariable de f_x, on connaît le sens dans lequel varie la constante C lorsque le nombre des modifications subies par le système va croissant.

Supposons que par une longue suite de modifications le système passe d'un état initial 0 à un état final 1; l'égalité (2), intégrée entre ces deux états, nous donne :

$$\left[X - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right]_1 - \left[X - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right]_0 = \sum f_x |dx|,$$

ou, en désignant par C_0, C_1 les valeurs de la quantité C qui correspondent aux états 0 et 1,

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C_1 - C_0 = \Sigma f_x |dx|.$$

Cette égalité (12) nous montre que *le signe de* $(C_1 - C_0)$ *est le même que le signe constant de* f_x *pendant toute la durée des modifications qui ont fait passer le système de l'état* 0 *à l'état* 1.

Deux cas sont donc à considérer :

1° La fonction f_x demeure positive dans toutes les modifications que subit le système; si la variable x est celle que nous nommons dureté, *le système ne sort pas de la région des recuits séculaires;* la constante C croît sans cesse avec le nombre des modifications que le corps subit;

2° La fonction f_x demeure négative durant toutes les modifications que subit le système : *le système ne sort pas de la région des accroissements séculaires de la dureté;* la constante C décroît sans cesse, tandis que le corps subit des modifications de plus en plus nombreuses.

Supposons, par exemple, que l'on fasse osciller l'action extérieure A entre deux limites invariables A_0, A_1, la température restant constante, et

admettons que le cycle $\gamma(A_0, A_1, T, C)$ se déforme et se déplace dans un sens invariable lorsque la valeur de C augmente. Le système décrira sensiblement une suite de cycles se déformant et se déplaçant dans ce sens, si, durant la suite de modifications qu'il subit, il demeure toujours dans la région des recuits séculaires; si, au contraire, il demeure toujours dans la région des accroissements séculaires de la dureté, il décrira sensiblement une suite de cycles se déformant et se déplaçant en sens inverse des précédents.

Si les modifications subies par le système le font cheminer tantôt dans la région des recuits séculaires et tantôt dans la région des accroissements séculaires de la dureté, il n'est plus possible de déterminer simplement dans quel sens varie la valeur de C.

Au lieu de n'imposer au système que des modifications qui le laissent sans cesse dans la région où la dureté n'éprouve que des variations séculaires, on peut imaginer qu'on lui impose de temps en temps une modification de plus grande amplitude, qui l'oblige à sortir de cette région; nous donnerons à une telle modification le nom de *perturbation*.

Imaginons, en premier lieu, que le système éprouve, dans la région des variations séculaires de la dureté, une suite de modifications, ces modifications n'étant pas en nombre extrêmement considérable; ces modifications sont approximativement soumises aux égalités (5) et (7), où la quantité C a la valeur C_0 à laquelle $\left[x - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right]$ reste sensiblement égal pendant cette suite de modifications. Le système étant ainsi parvenu à un état 0, imposons-lui une perturbation plus ou moins compliquée qui le fasse sortir de la région des variations séculaires de la dureté, puis le ramène de nouveau à un état 1 appartenant à cette région.

Après cette perturbation, imposons de nouveau au système une suite de modifications qui ne produisent que des variations permanentes séculaires de la dureté; ces modifications seront de nouveau régies approximativement par les conditions (5) et (7), mais à la condition de donner à C une valeur C_1, différente de C_0.

On peut donner l'expression de la différence $(C_1 - C_0)$.

Nous devons avoir, en effet,

$$\left(X - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)_0 = C_0,$$

$$\left(X - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)_1 = C_1.$$

Or l'équation (2), intégrée pour la modification qui constitue la perturbation, donne

$$\left(X - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)_1 - \left(X - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right) = \sum f_x |dx|.$$

On a donc

$$(12^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C_1 - C_0 = \Sigma f_x |dx|,$$

la somme qui figure au second membre s'étendant à toutes les modifications élémentaires dont la suite constitue la *perturbation*.

Cette perturbation entraînant le système hors de la région où f_x n'a que de très petites valeurs, on voit que la différence $(C_1 - C_0)$ des valeurs de la quantité C avant et après cette perturbation ne sera pas négligeable, en général.

Imaginons, par exemple, qu'avant la perturbation, le système, de température invariable, soit soumis à une action extérieure qui oscille sans cesse entre les valeurs A_0, A_1, et qui d'ailleurs ne fait pas sortir le système de la région des variations séculaires de la dureté; la trajectoire du point figuratif se rapproche du cycle limite $\gamma(A_0, A_1, T, C_0)$.

Nous soumettons alors le système à une perturbation qui le fait sortir de la région des variations séculaires de la dureté, puis nous l'y ramenons; nous faisons de nouveau osciller l'action extérieure entre les deux limites A_0, A_1; la trajectoire du système tend vers un cycle limite différent du précédent, le cycle $\gamma(A_0, A_1, T, C_1)$.

On pourrait en dire autant si, au lieu de faire osciller l'action extérieure A entre deux limites fixes A_0, A_1, on fait osciller la variable α entre deux limites fixes α_0, α_1.

En général, la perturbation imposée au système consiste en une modifi-

cation tout entière décrite dans une région où f_x garde un signe invariable; ce signe est alors, en vertu de l'égalité (12^{bis}), celui de $(C_1 - C_0)$.

Deux cas sont donc à distinguer :

1° La perturbation entraîne le système dans la région où f_x est positif, c'est-à-dire dans la *région des revenus;* dans ce cas, la quantité C augmente par l'effet de la perturbation;

2° La perturbation entraîne le système dans la région où f_x est négatif, c'est-à-dire dans la *région des trempes;* dans ce cas, la quantité C diminue par l'effet de la perturbation.

Ces deux sortes de perturbations produiront donc des effets de sens contraire sur la forme et la position du cycle limite; selon que le changement de forme et de position de ce cycle aura lieu dans un sens ou dans l'autre, nous pourrons conclure que la perturbation a entraîné le système dans la région des revenus ou dans la région des trempes.

Les études faites jusqu'ici sur les modifications isothermiques ne fournissent pas, en général, de renseignements assez détaillés pour qu'il soit possible de les rapprocher des théorèmes précédents; les études de M. L. Marchis sur le déplacement du point 0° des thermomètres nous fourniront d'importantes applications de ces propositions.

§ 3. — *Calcul approché d'une modification permanente.*

Supposons un système défini par les variables α, x, T; imaginons que la température T et les actions extérieures A, X, partant des valeurs initiales T_0, A_0, X_0, y reviennent, après avoir subi certaines variations; les variables α et x, parties des valeurs initiales α_0, x_0, arrivent aux valeurs finales α_1, x_1, différentes de α_0, x_0.

Nous admettrons :

1° Que les quantités

$$f_\alpha(\alpha, x, T, A, X),$$
$$f_x(\alpha, x, T, A, X),$$

sont des quantités très petites, dans la région où s'effectue la modification considérée, sans que l'une d'elles soit négligeable par rapport à l'autre;

2° Que les sommes

$$\Sigma|d\alpha|, \qquad \Sigma|dx|,$$

étendues à la modification considérée, ne sont pas très grandes.

Les quantités

$$\Sigma f_\alpha|d\alpha|, \qquad \Sigma f_x|dx|,$$

étendues à cette même modification, seront très petites. Il en sera assurément de même des quantités $(\alpha_1 - \alpha_0)$, $(x_1 - x_0)$.

Nous allons montrer que l'on peut obtenir, de chacune de ces quantités, une expression simple où sont négligées seulement des quantités très petites par rapport à $(\alpha_1 - \alpha_0)$ et à $(x_1 - x_0)$.

Proposons-nous, par exemple, l'évaluation approchée de $(\alpha_1 - \alpha_0)$.

L'égalité (1), intégrée entre les deux états 0 et 1, donne

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, x, \mathrm{T})}{\partial \alpha}\right]_0^1 + \sum f_\alpha(\alpha, x, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{X})|d\alpha| = 0.$$

En négligeant des quantités très petites par rapport à $(\alpha_1 - \alpha_0)$ et à $(x_1 - x_0)$, et en remarquant que $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0 = 0$, on peut écrire

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(\alpha, x, \mathrm{T})}{\partial \alpha}\right]_0^1 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\alpha_0, x_0, \mathrm{T}_0)}{\partial \alpha_0^2}(\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\alpha_0, x_0, \mathrm{T}_0)}{\partial \alpha_0 \partial x_0}(x_0 - x_0),$$

en sorte que l'égalité précédente devient :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha_0^2}(\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha_0 \partial x_0}(x_1 - x_0) + \sum f_\alpha|d\alpha| = 0$$

L'égalité (2) donnerait de même

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha_0 \partial x_0}(\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x_0^2}(x_1 - x_0) + \sum f_x|dx| = 0.$$

En éliminant $(x_1 - x_0)$ entre ces deux équations, nous trouverons

$$(13)\ldots\left\{\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha_0^2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x_0^2}-\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha_0\partial x_0}\right)^2\right](\alpha_1-\alpha_0)&=\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha_0\partial x_0}\sum f_x(\alpha,x,\mathrm{T},\mathrm{A},\mathrm{X})|dx|\\&\quad-\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x_0^2}\sum f_\alpha(\alpha,x,\mathrm{T},\mathrm{A},\mathrm{X})|d\alpha|.\end{aligned}\right.$$

Évaluons les deux termes qui figurent au second membre et, en premier lieu, le second.

Nous remarquerons que si, sans changer $d\mathrm{T}$, $d\mathrm{A}$, $d\mathrm{X}$, nous négligeons f_x, les quantités $d\alpha$, dx, au lieu d'être déterminées par les équations (1) et (2), sont déterminées par

$$d\mathrm{A}=\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\,d\alpha+\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial x}dx+\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x\partial\mathrm{T}}d\mathrm{T}+f_\alpha|d\alpha|,$$

$$d\mathrm{X}=\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x\partial\mathrm{T}}d\mathrm{T}.$$

Il est clair que ces valeurs de $d\alpha$, dx diffèrent des quantités $d\alpha$, dx, définies par les égalités (1) et (2), par des quantités très petites d'ordre supérieur. Si donc on néglige f_x, on n'altère la quantité $\sum f_\alpha|d\alpha|$, relative à une variation donnée de T, A, X, que d'une quantité très petite d'ordre supérieur.

D'ailleurs, si l'on négligeait f_x, la variation cyclique considérée des quantités T, A, X imposerait à α une variation permanente $(\alpha_1' - \alpha_0)$. D'après ce qui précède, on aurait l'égalité, analogue à l'égalité (13),

$$(14)\ldots\left[\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha_0^2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x_0^2}-\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha_0\partial x_0}\right)^2\right](\alpha_1'-\alpha_0)=-\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x_0^2}\sum f_\alpha(\alpha,x,\mathrm{T},\mathrm{A},\mathrm{X})|d\alpha|.$$

Supposons maintenant qu'au lieu de négliger f_x, on néglige f_α. La variation cyclique considérée des quantités T, A, X imposerait à la variable α une variation permanente $(\alpha_1'' - \alpha_0)$, et l'on aurait

$$(16)\ldots\left[\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha_0^2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x_0^2}-\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha_0\partial x_0}\right)^2\right](\alpha_1''-\alpha_0)=\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha_0\partial x_0}\sum f_x(\alpha,x,\mathrm{T},\mathrm{A},\mathrm{X})|dx|.$$

Les égalités (14) et (16) donnent

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha_1 - \alpha_0 = (\alpha'_1 - \alpha_0) + (\alpha''_1 - \alpha_0),$$

égalité qui équivaut au théorème suivant :

Un système dépend de deux variables privilégiées α *et* x, *auxquelles correspondent des coefficients d'hysteresis* f_x, f_x *qui ont de petites valeurs; on donne à la température* T *et aux actions extérieures* A, X *une variation cyclique; il en résulte pour la variable* α *une variation permanente* $(\alpha_1 - \alpha_0)$.

Cette variation peut être approximativement remplacée par la somme de deux autres :

1° *La variation permanente* $(\alpha'_1 - \alpha_0)$ *que la même variation cyclique de* T, A, X *imposerait à la variable* α, *en un système fictif où* f_x *serait égal à* 0, *et qui, d'ailleurs, serait identique au précédent;*

2° *La variation permanente* $(\alpha''_1 - \alpha_0)$ *que la même variation cyclique de* T, A, X *imposerait à la variable* α, *en un système fictif où* f_α *serait égal à* 0, *et qui, d'ailleurs, serait identique au précédent.*

L'avantage de ce théorème est le suivant :

Tandis que l'étude d'un système dépendant de deux variables privilégiées douées d'hysteresis présente de très grandes difficultés, l'étude d'un système défini par deux variables dont une seule est douée d'hysteresis est aussi aisée que l'étude d'un système défini par une seule variable douée d'hysteresis.

Nous avons vu, au § 2, comment on pouvait, lorsque f_x était nul ou négligeable, étudier les modifications du système et, en particulier, les variations de α. Ces variations de α s'étudient d'une manière peu différente lorsque c'est f_α, et non plus f_x, qui est négligeable. Nous l'avons vu en détail au Chapitre IV de notre quatrième Mémoire.

CHAPITRE IV.

LES MODIFICATIONS PERMANENTES DU VERRE.

§ 1. — *Le déplacement du point* 0° *du thermomètre à mercure.*

Despretz (*) rapportait déjà une partie des variations permanentes de volume qu'éprouve le verre et que trahissent les déplacements du point 0° du thermomètre à mercure, à une cause semblable à celle qui produit les déformations permanentes des métaux ; mais, à côté de cette action, il pensait reconnaître l'existence d'une déformation spontanée, se produisant à chaque température avec une certaine vitesse.

M. Marcel Brillouin paraît avoir regardé le premier cette déformation lente comme due aux oscillations inévitables d'une température soi-disant fixe : « Enfin, dit-il (**), il me paraît probable que les phénomènes d'élasticité résiduelle (*elastische Nachwirkung*), pour lesquels on a cru nécessaire jusqu'ici de faire intervenir le temps directement comme variable indépendante, peuvent, en grande partie, être expliqués par les déformations dues à la répétition quotidienne de cycles très peu différents, dus aux variations diurnes des éléments météorologiques, principalement de la température ; tel serait le cas pour le déplacement lent du zéro des thermomètres. C'est du moins ce que semblent indiquer des expériences actuellement en cours d'exécution, dont j'espère pouvoir rendre compte dans quelques mois. »

(*) Despretz, *Annales de Chimie et de Physique*, t. LXIV, p. 312, 1837.
(**) M. Brillouin, *Journal de Physique*, 2e série, t. VII, p. 347, 1888.

M. Herbert Tomlinson (*) a émis des idées analogues.

Les idées de M. Herbert Tomlinson n'étaient pas appuyées d'expériences directes sur le thermomètre à mercure ; quant aux expériences annoncées par M. Marcel Brillouin, elles n'ont pas été publiées jusqu'ici ; aussi M. Sidney Young (**) a-t-il repris l'idée d'une déformation qui se produirait avec une certaine vitesse, même à une température rigoureusement fixe.

L'impossibilité d'obtenir une température rigoureusement fixe ne permet pas de réfuter directement cette assertion. Toutefois, la méthode expérimentale indirecte employée récemment par M. L. Marchis (***) donne un haut degré de probabilité à l'hypothèse de M. M. Brillouin et de M. Herbert Tomlinson.

Il est donc vraisemblable que toutes les modifications permanentes du verre peuvent être rangées au nombre des phénomènes d'hysteresis ; cette opinion a été exprimée par M. Cantone (IV) : « La dépression du *point zéro* d'un thermomètre, qui se produit lorsqu'on porte tout d'abord l'instrument à une température élevée, et l'ascension qui se produit dans le cas contraire, nous portent à admettre que des phénomènes d'hysteresis accompagnent également les modifications thermiques du verre ; il serait donc bon d'examiner attentivement la question de la mesure des températures en rapport avec le sens de leurs variations ; il est probable que pour une même température on a des indications différentes, selon qu'on parvient à cette température par un réchauffement ou par un refroidissement. »

Sans connaître l'opinion émise par M. Cantone, nous avons développé, dans notre premier mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis*, une théorie du déplacement du point 0° du thermomètre à mercure qui s'accorde avec cette opinion.

Cette théorie était trop simple ; analogue à la théorie simplifiée de

(*) Herbert Tomlinson, *Nature*, vol. XLI, p. 198. 1890.

(**) Sidney Young, *Nature*, vol. XLI, pp. 152, 271, 488. 1890.

(***) L. Marchis, *Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 4 mars 1897. (Comptes rendus de l'Académie des Sciences.)

(IV) Cantone, *Atti della reale Accademia dei Lincei*, série V : *Rendiconti*, vol. III, p. 68, 1894.

l'écrouissage des métaux que nous avons développée au Chapitre IV de notre quatrième mémoire, elle supposait l'état du verre défini par la température absolue T et deux autres variables, savoir : le volume spécifique v et une variable x indiquant le degré de la modification chimique ou allotropique mal connue que l'on peut désigner sous le nom de *dureté;* tandis qu'un terme d'hysteresis, proportionnel à la valeur absolue de la variation de cette dernière variable, était introduit dans les équations qui régissent les modifications du système, aucun terme d'hysteresis, proportionnel à la valeur absolue de la variation du volume spécifique v, ne figurait dans ces équations.

Une semblable théorie nous a permis, en notre second mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis,* de rendre compte en détail des modifications permanentes du soufre, si bien étudiées par M. D. Gernez ; elle n'est pas conciliable avec les lois, beaucoup plus compliquées, qui régissent le déplacement du point 0° du thermomètre à mercure ; nous avons dû le reconnaître en comparant les indications de cette théorie aux résultats des recherches patientes et systématiques que M. L. Marchis poursuit depuis plusieurs années ; ces recherches étant encore inédites (*) pour la plus grande partie, nous nous bornerons à indiquer ici les principes généraux qui en permettent la discussion.

Imaginons que le réservoir d'un thermomètre à mercure se dilate et se contracte, par les variations de température, en restant semblable à lui-même ; c'est là, assurément, une hypothèse approximative; elle paraît néanmoins suffisante pour suivre les faits que révèle l'observation la plus minutieuse.

Soit M la masse du verre, de même nature et de même état que les parois du réservoir, qui remplirait le réservoir jusqu'à un trait de repère marqué 0 sur la tige; soit μ le volume du même verre qui remplirait le volume d'une division ; les changements de température, de volume ou d'état du verre laissent invariables les valeurs de M et de μ, qui sont ainsi deux constantes particulières à chaque instrument.

(*) Les recherches de M. L. Marchis viennent d'être publiées sous le titre : *Les modifications permanentes du verre et le déplacement du zéro des thermomètres* (Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 5e série, t. IV, et Paris, A. Hermann, 1898).

Soit V_0 le volume qu'occuperait à 0° C. le mercure que renferme l'instrument ; soit K le coefficient de dilatation du mercure.

Prenons le thermomètre dans un état donné ; le mercure affleure à la n^e division au-dessus du repère marqué 0 sur la tige ; si v est le volume spécifique du verre dans l'état où il se trouve à cet instant, le volume occupé par le mercure est $(M + n\mu)v$; d'autre part, si T est la température absolue, ce volume a pour valeur $V_0[1 + K(T - 273)]$; on a donc

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (M + n\mu)v = V_0[1 + K(T - 273)].$$

Cette égalité relie les deux quantités n et v à la température T ; en observant comment varient n et T, on pourra connaître comment varie v. Supposons, en particulier, qu'en deux expériences différentes T ait la même valeur ; si v a deux valeurs différentes v_0, v_1, n aura aussi deux valeurs différentes, n_0, n_1, et l'on aura :

$$(M + n_0\mu)v_0 = (M + n_1\mu)v_1.$$

Si l'on a

$$n_0 > n_1,$$

on aura

$$v_0 < v_1,$$

et inversement.

Il nous suffit donc d'étudier les variations permanentes du volume spécifique v.

Négligeons pour le moment l'influence exercée sur l'état du verre par la pression extérieure ou intérieure. Pour déterminer les variations que v éprouve lorsque l'on fait varier la température T, nous aurons les deux relations que voici :

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial v^2} dv + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial v \partial x} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial v \partial T} dT + f_v(v, x, T)|dv| = 0,$$

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial v} dv + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial T} dT + f_x(v, x, T)|dx| = 0,$$

analogues aux équations (1) et (2) du Chapitre précédent.

Moyennant le théorème démontré au § 3 du Chapitre précédent, et sous la condition que les deux quantités f_v, f_x aient de petites valeurs, nous obtiendrons une évaluation approchée de la modification permanente subie par le volume spécifique v à la suite d'une variation cyclique de la température, en étudiant successivement deux systèmes analogues au précédent, l'un où la quantité f_x serait négligeable, l'autre où, au contraire, la quantité f_v serait négligeable.

Examinons brièvement les propriétés de ces deux systèmes.

Premier système. — *La fonction* $f_x(v, x, T)$ *a une valeur négligeable.*

En vertu de l'égalité (3), si l'on ne soumet pas le système à des modifications assez nombreuses et assez étendues pour que $\sum|dx|$ ait une grande valeur, on pourra écrire

$$\frac{\partial \mathcal{F}(v, x, T)}{\partial x} = C, \tag{4}$$

C étant une constante. Si le système subit des modifications très nombreuses et très étendues, il viendra un moment où l'on devra changer la valeur de cette constante.

L'équation (4), résolue par rapport à x, donnera

$$x = \xi(v, T, C). \tag{5}$$

Posons

$$F(v, T, C) = \mathcal{F}[v, \xi(v, T, C), T]. \tag{6}$$

$$g(v, T, C) = f_v[v, \xi(v, T, C), T]. \tag{7}$$

L'égalité (2) deviendra

$$\frac{\partial^2 F(v, T, C)}{\partial v^2} dv + \frac{\partial^2 F(v, T, C)}{\partial v \partial T} dT + g(v, T, C)|dv| = 0. \tag{8}$$

Pour une valeur constante de C, cette équation aura la forme de l'équa-

tion qui régit les modifications isobares d'un système doué d'hysteresis et défini par la seule variable normale v, hors la température.

L'allure de ces modifications dépend du signe de la quantité

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad l(v, T, T) = \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial v}\left[F(v, T, C) - T\frac{\partial F(v, T, C)}{\partial T}\right].$$

$l(v, T, C)\,dv$ représente, en négligeant le travail extérieur, la quantité de chaleur absorbée par le verre lorsque son volume croît de dv dans une modification virtuelle accomplie à température constante; toutes les propriétés du verre conduisent à admettre que l'on a

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l(v, T, C) > 0.$$

Dès lors, dans le plan $T0v$, les lignes ascendantes montent de gauche à droite; les lignes descendantes descendent de droite à gauche; tout cycle fermé est *sinistrorsùm*.

Second système. — *La fonction* $f_v(x, v, T)$ *a une valeur négligeable.*

En vertu de l'égalité (2), si les modifications du système ne sont ni assez nombreuses ni assez étendues pour que $\sum|dv|$ ait une grande valeur, on pourra écrire

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v} = \gamma,$$

γ étant une constante. Si le système subit des modifications très nombreuses et très étendues, il viendra un moment où l'on devra changer la valeur de cette constante.

L'équation (11), résolue par rapport à v, donnera

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v = \psi(x, T, \gamma).$$

Posons

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad G(x, T, \gamma) = \mathcal{F}[\psi(x, T, \gamma), x, T],$$

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad h(x, T, \gamma) = f_x[\psi(x, T, \gamma), x, T].$$

L'égalité (3) deviendra

$$(15) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 G(x, T, \gamma)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 G(x, T, \gamma)}{\partial x \partial T} dT + h(x, T, \gamma) |dx| = 0.$$

Pour une valeur constante de γ, cette équation aura la forme de l'équation qui régit les modifications isobares d'un système doué d'hysteresis et défini par la seule variable normale x, hors la température.

Une modification isothermique virtuelle où x croît de dx, absorbe une quantité de chaleur $\lambda(x, T, \gamma)dx$, $\lambda(x, T, \gamma)$ ayant la valeur suivante :

$$(16) \quad \ldots \quad \lambda(x, T, \gamma) = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} \left[G(x, T, \gamma) - T \frac{\partial G(x, T, \gamma)}{\partial T} \right],$$

et le travail extérieur étant supposé négligeable.

Nous supposerons que $\lambda(x, T, \gamma)$ ait, dans le champ où sont confinées les modifications du système, un signe invariable; en changeant au besoin x en $-x$, nous pouvons toujours imaginer que ce signe soit le signe $+$. Dès lors, dans le plan T0x, les lignes ascendantes définies par l'égalité (15) montent de gauche à droite; les lignes descendantes descendent de droite à gauche; tout cycle fermé est *sinistrorsùm*.

L'équation (12), pour une valeur donnée de γ, fait correspondre un point du plan T0v à chaque point du plan T0x; toutes les propriétés du verre semblent pouvoir s'expliquer en supposant que l'on a

$$(17) \quad \ldots \quad \frac{\partial \psi(x, T, \gamma)}{\partial T} > 0, \qquad \frac{\partial \psi(x, T, \gamma)}{\partial x} > 0.$$

La première inégalité est vraie également pour tous les métaux; la seconde, vraie pour la plupart des métaux, notamment pour le fer et l'acier, doit être renversée pour le nickel et les alliages de fer et de nickel, qui renferment une proportion suffisante de ce dernier métal (*).

(*) Ch.-E. Guillaume, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXV, pp. 152 et 1515, 1897.

En vertu de ces inégalités, on voit qu'à toute ligne ascendante dans le plan T0x, correspond, dans le plan T0v, une ligne qui monte de gauche à droite; qu'à toute ligne descendante dans le plan T0x correspond, dans le plan T0v, une ligne qui descend de gauche à droite; enfin qu'à tout cycle fermé dans le plan T0x correspond, dans le plan T0v, un cycle fermé de même sens, c'est-à-dire *sinistrorsùm*.

Ces principes posés, comment étudiera-t-on la variation permanente éprouvée par le volume spécifique d'un verre dont la température, après avoir subi certaines variations, revient à sa valeur primitive T_0?

Soient v_0, x_0, les valeurs primitives de v et de x.

On supposera les deux constantes C et γ déterminées par les équations

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C = \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, v_0, T_0)}{\partial x_0},$$

$$(19) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \gamma = \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, v_0, T_0)}{\partial v_0}.$$

Dans le plan T0v, on tracera le trajet déterminé à partir du point (T_0, v_0), par l'équation

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 F(v, T, C)}{\partial v^2} dv + \frac{\partial^2 F(x, T, C)}{\partial v \partial T} dT + g(v, T, C)|dv| = 0.$$

Ce trajet amènera finalement le point figuratif aux coordonnées T_0, v_1'.

Dans le plan T0v, on tracera également le trajet déterminé, à partir du point (T_0, v_0) et de la valeur x_0 de x, par les équations

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 G(x, T, \gamma)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 G(x, T, \gamma)}{\partial x \partial T} dT + h(x, T, \gamma)|dx| = 0,$$

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v = \psi(x, T, \gamma).$$

Il amènera le point figuratif aux coordonnées T_0, v_1''.

Si v_1 est le volume spécifique final du verre, on aura sensiblement

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots \quad v_1 - v_0 = (v_1' - v_0) + (v_1'' - v_0).$$

Ce procédé ne fournira une valeur approchée de $v_1 - v_0$ que si les variations subies par la température T ne sont ni assez nombreuses, ni assez étendues pour que

$$\Sigma|dv| \qquad \text{et} \qquad \Sigma|dx|$$

atteignent de grandes valeurs. Sous le bénéfice de cette restriction, la méthode précédente fournit le moyen de discuter avec quelque clarté les phénomènes si complexes que présente le déplacement du point 0° du thermomètre.

Il est curieux de rapprocher de ce procédé l'opinion, déjà émise par Despretz, qu'il est impossible de se rendre compte des modifications permanentes que peut subir le réservoir d'un thermomètre, si l'on ne regarde cette modification comme la résultante de deux autres modifications qui peuvent, selon les cas, être de même sens ou de sens contraire.

M. Ch. Ed. Guillaume (*) a adopté une opinion analogue; ce que nous venons de dire nous semble donner une forme précise aux vues de ces expérimentateurs.

§ 2. — *Propriétés d'un thermomètre modérément recuit.*

Pour désigner plus aisément les deux modifications permanentes fictives dont la somme fournit l'évaluation approchée de la modification permanente subie par le verre qui compose le thermomètre, nous nommerons la première *la déformation permanente d'origine élastique* et la seconde *la déformation permanente d'origine chimique.*

La déformation permanente d'origine élastique correspond, jusqu'à un certain point, à ce que Despretz nommait *déplacement du point* 0° *par le changement de température,* à ce que M. Ch.-Ed. Guillaume nomme *variations accidentelles;* par contre, la déformation permanente d'origine chimique correspond en partie à ce que Despretz nommait *déplacement du*

(*) Ch.-Ed. Guillaume, *Traité pratique de la thermométrie de précision.* Paris, 1889.

zéro avec temps, à ce que M. Ch.-Ed. Guillaume nomme *ascension lente* ou *marche progressive.*

Il s'en faut, toutefois, que ces dénominations soient exactes en toutes circonstances.

Pas plus pour la déformation permanente d'origine chimique que pour la déformation permanente d'origine élastique, le temps n'intervient directement comme variable indépendante; selon la théorie qui précède, l'action apparente du temps s'explique par l'action des petites variations que subit, dans le temps, une température sensiblement fixe.

D'ailleurs, la déformation permanente d'origine chimique ne consiste pas toujours dans une ascension du point 0°, c'est-à-dire dans une diminution du volume spécifique.

Considérons, dans le plan T0x, la ligne que définit l'équation

$$h(x, T, \gamma) = 0. \qquad (21)$$

C'est, pour la modification permanente d'origine chimique, la *ligne des états naturels fictifs* qui se rapportent à la valeur donnée de la constante γ. Cette ligne partage le plan en deux régions : l'une, où $h\ (x,\ T,\ \gamma)$ est positif; l'autre, où $h\ (x,\ T,\ \gamma)$ est négatif; si, comme nous le supposerons, nous avons affaire à des états naturels fictifs qui sont stables, la première région est située au-dessus de la ligne définie par l'équation (21) et la seconde est située au-dessous. Si la ligne qui représente, dans le plan T0x, la trajectoire du point figuratif du système est tracée dans la première région, que nous nommerons la *région des recuits,* la variation permanente éprouvée par la variable x est une diminution; il en résulte, en vertu de la seconde inégalité (17), une diminution du volume spécifique du verre et, par conséquent, une ascension du point 0° du thermomètre; si la trajectoire du point figuratif est tracée tout entière dans la seconde région, que nous nommerons la *région des trempes,* la variation permanente éprouvée par la variable x est une augmentation; il en résulte une augmentation du volume spécifique du verre et, par conséquent, une dépression du point 0° du thermomètre; enfin, si la trajectoire du point figuratif est tracée en partie dans l'une des deux régions, en partie dans l'autre, la déformation

permanente d'origine chimique peut consister soit en une ascension, soit en une dépression du point 0°.

Mais on comprendra que cette déformation mérite, dans la majorité des cas, le titre d'ascension progressive du point 0° que lui donne M. Ch.-Ed. Guillaume, si l'on admet l'exactitude des propositions suivantes que nous sommes conduit à formuler en partie par les observations déjà recueillies touchant les déformations permanentes du thermomètre à mercure, en partie par ce que nous ont appris, touchant le recuit des métaux, les recherches de divers observateurs et notamment de MM. Carl Barus et Vincent Strouhal (*).

Prenons un *thermomètre neuf;* le réservoir, porté à une haute température par le souffleur et rapidement refroidi, a été vivement trempé; l'état du verre correspond à une grande valeur de x. Déterminons, par l'équation (19), la valeur de γ qui correspond à cet état initial et, dans le plan T0x, traçons la ligne

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad h(x, T, \gamma) = 0$$

qui correspond à cette valeur de γ. Le point figuratif de l'état du verre se trouvera très élevé au-dessus de cette ligne.

Supposons que la valeur de T ne soit pas trop grande et imaginons que l'on soumette le thermomètre à des oscillations de température très petites et très nombreuses autour de la moyenne T; pour fixer les idées, supposons que l'amplitude moyenne de ces oscillations et leur nombre moyen par unité de temps demeurent invariables.

De temps à autre, déterminons de nouveau, par l'équation (19), la valeur de la constante γ qui a varié au bout d'un nombre suffisamment grand d'oscillations; traçons, pour cette nouvelle valeur de γ, dans le plan T0x, la ligne définie par l'équation (21) et marquons la position du point figuratif du système; nous constatons que ce point s'abaisse graduellement pour se rapprocher de la ligne des états naturels fictifs, et cela de la manière suivante :

Au début, la diminution de x est rapide, mais la valeur absolue de la

(*) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* (Quatrième mémoire, Chapitre III, § 2.)

vitesse avec laquelle x varie diminue rapidement; c'est la période de *recuit rapide.* Puis, la vitesse de diminution x étant devenue assez petite en valeur absolue, quoique encore appréciable, se met à décroître avec une grande lenteur : c'est la période de *recuit modéré;* enfin, alors que le point figuratif est encore notablement éloigné de la ligne des états naturels fictifs, la vitesse de diminution de x devient extrêmement petite, en sorte que des journées ou des semaines sont nécessaires pour que l'on puisse apprécier cette diminution de x, qui peut se prolonger pendant des années; c'est la période de *recuit séculaire.*

Les variations du volume spécifique du verre soumis à une température qui oscille de petites quantités autour de la valeur T suivent, naturellement, la même marche que les variations de x. Pendant la période de recuit rapide, le volume spécifique diminue rapidement; le zéro monte rapidement. Pendant la période de recuit modéré, le volume spécifique diminue lentement, quoique d'une manière appréciable; cette diminution se ralentit peu à peu; le zéro monte lentement, quoique d'une manière appréciable; cette ascension s'effectue avec une vitesse dont la diminution n'est perceptible qu'au bout d'un temps assez long; si la période de temps durant laquelle on observe cette ascension est peu étendue, cette ascension semble proportionnelle au temps. Pendant la période de recuit séculaire, le zéro monte avec une lenteur extrême; pour reconnaître cette ascension, il faut observer le thermomètre pendant des semaines ou des mois; en revanche, cette ascension dure très longtemps; c'est seulement au bout de plusieurs années qu'elle s'arrête, l'état naturel étant enfin atteint.

Avec les différents verres, les phénomènes gardent les mêmes caractères généraux, mais, selon la nature du verre, certains de ces caractères sont plus ou moins marqués; ainsi, avec le cristal blanc, la période de recuit rapide est beaucoup plus marquée qu'avec le verre vert. Des différences du même genre s'observent lorsqu'on étudie un même verre à des températures différentes; la période de recuit rapide est beaucoup plus marquée aux températures élevées qu'aux basses températures; elle disparaît tout à fait aux très basses températures où l'on n'a plus affaire qu'aux recuits séculaires; au moment où commence la période des recuits séculaires, le point figuratif

est d'autant plus éloigné de la ligne des états naturels fictifs que la température est moins élevée ; aux températures très élevées, la période des recuits séculaires est extrêmement réduite ; la vitesse d'ascension du point 0° ne devient très petite que lorsque le point figuratif est très près de la ligne des états naturels fictifs.

La variation permanente d'origine élastique qu'impose au thermomètre la température oscillante que nous étudions ne présente pas, en général, les mêmes caractères. Déterminons, pour l'état initial du thermomètre, au moyen de l'égalité (18), la valeur de la constante C. Dans le plan T0v, traçons, pour cette valeur de C, la ligne des états naturels fictifs

$$(22) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad g(v, T, C) = 0.$$

La position initiale du point figuratif sera au-dessus ou au-dessous de cette ligne ; mais il n'en sera pas extrêmement éloigné. Soumettons le thermomètre à une température oscillante ; de temps en temps, déterminons de nouveau la valeur de la constante C ; dans le plan T0v, traçons la ligne des états naturels fictifs (22) qui correspond à cette valeur de C et la position du point figuratif ; nous constatons que ce dernier se rapproche de la ligne des états naturels fictifs avec une grande vitesse ou avec une vitesse modérée, mais que cette vitesse ne devient très petite que lorsqu'il est devenu extrêmement voisin de cette ligne ; le point figuratif arrivera donc à être très voisin de la ligne des états naturels en un temps qui ne sera pas très long — quelques heures, par exemple, — et qui pourra même, aux températures assez élevées, devenir très court — quelques minutes, par exemple.

Ces principes posés, imaginons qu'un thermomètre, dont l'état initial se trouve représenté par un point de la région des recuits, soit abandonné à une température qui oscille de petites quantités autour d'une valeur sensiblement constante ; qu'allons-nous observer ?

Il se peut que la modification permanente d'origine élastique corresponde à une dépression du point 0° ; si cette pression est assez rapide pour masquer l'ascension du point 0° qui traduit la modification permanente d'origine chimique, nous pourrons observer, au début, une dépression du point 0°. Mais ce phénomène aura peu de durée. Au bout de peu de temps, en la

figure qui traduit sur le plan T0v la déformation permanente d'origine élastique, il y aura sensiblement coïncidence du point figuratif et de l'état naturel fictif; à partir de ce moment, la modification permanente d'origine élastique demeurera sensiblement nulle et l'on ne percevra plus que la modification permanente d'origine chimique, qui se traduira par un continuel relèvement du point 0° du thermomètre.

Des considérations analogues s'appliquent à un thermomètre neuf dont on fait osciller la température entre deux limites, une limite inférieure T_0 et une limite supérieure T_1, pourvu que celle-ci ne soit pas trop élevée.

Déterminons encore la valeur initiale de la constante γ; à cette valeur de γ et aux valeurs T_0, T_1, des deux limites de température correspond, dans le plan T0x, un cycle simple $\Gamma(T_0, T_1, \gamma)$, coupé par la ligne des états naturels fictifs

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad h(x, T, \gamma) = 0.$$

La position initiale du point figuratif est extrêmement éloignée de cette ligne.

Faisons osciller la température entre les deux limites T_0, T_1 et suivons le mouvement du point figuratif dans le plan T0x, en ayant soin de déterminer à nouveau, de temps en temps, la valeur de γ, qui a changé au bout d'un nombre suffisant d'oscillations; si nous retraçons chaque fois le cycle $\Gamma(T_0, T_1, \gamma)$, nous observerons que la trajectoire du point figuratif pendant que la température va de T_0 à T_1 et revient de T_1 à T_0 se rapproche peu à peu de ce cycle, mais que cette déformation de la trajectoire présente les particularités suivantes :

Tout d'abord, chaque oscillation produira une diminution notable de la variable x, entraînant une diminution notable du volume spécifique et une ascension notable du point 0°; mais la valeur absolue de ces diverses modifications décroît rapidement d'une oscillation à la suivante; c'est la période durant laquelle les oscillations entraînent un *recuit rapide*.

Au bout d'un certain nombre d'oscillations, la diminution de la variable x, produite par chaque oscillation de la température, devient faible, bien

qu'encore appréciable; il en résulte une faible diminution du volume spécifique et une ascension petite, mais appréciable, du point 0°; la valeur absolue de ces diverses modifications diminue encore d'une oscillation à la suivante, mais cette diminution est très lente; il en résulte que, dans cette période, le point 0° d'un thermomètre soumis à des oscillations de température, éprouve une ascension qui semble proportionnelle au nombre des oscillations, pourvu que ce dernier nombre ne soit pas trop grand. Durant cette période, les oscillations entraînent un *recuit modéré.*

Enfin, au bout d'un nombre considérable d'oscillations de la température, chaque oscillation ne produit plus qu'une diminution imperceptible de la variable x, *bien que la trajectoire du point figuratif soit encore notablement éloignée du cycle fermé* $\Gamma(T_0, T_1, \gamma)$, *et ne rencontre pas encore la ligne* $h(x, T, \gamma) = 0$; pour observer une diminution appréciable de x, et, partant, une ascension appréciable du point 0°, il faudra soumettre le thermomètre à un très grand nombre d'oscillations de la température; les oscillations ne produisent plus qu'un *recuit séculaire.*

Si l'on soumet le thermomètre à plusieurs centaines d'oscillations, la trajectoire du point figuratif dans le plan T0x, trajectoire qui est maintenant formée d'une ligne ascendante et d'une ligne descendante presque confondues entre elles, continuera à s'abaisser lentement; il arrivera un moment où elle coupera la ligne des états naturels fictifs $h(x, T, \gamma) = 0$; à partir de ce moment, elle sera tracée en partie dans la *région des trempes*, en partie dans la *région des recuits*; enfin, au bout de milliers d'oscillations, elle se confondra sensiblement avec le cycle fermé $\Gamma(T_0, T_1, \gamma)$, lequel doit nécessairement se composer d'une ligne ascendante et d'une ligne descendante sensiblement confondues.

Les déformations permanentes d'origine élastique ne présentent pas les mêmes caractères.

A chaque valeur de la constante C correspond, dans le plan T0v, un cycle fermé simple décrit entre les températures T_0, T_1; soit $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$ ce cycle. Déterminons la valeur initiale de la constante C; dans le plan T0v, traçons le cycle $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$ qui correspond à cette valeur de C; le point figuratif de l'état initial sera au-dessus ou au-dessous de ce cyle, mais

il en sera à une distance modérée ; la trajectoire que décrit le point figuratif lorsque la température, partant de la valeur T_0, s'élève jusqu'à T_1, pour revenir ensuite à la valeur T_0, entraîne, en général, une variation permanente appréciable du volume spécifique v ; cette variation ne devient très petite que lorsque la trajectoire en question diffère très peu du cycle fermé $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$ qui correspond à la même valeur de C. Il suffira, en général, de soumettre le thermomètre à un nombre modéré d'oscillations de la température, et, parfois, à un très petit nombre d'oscillations de la température, pour amener la trajectoire du point figuratif à différer fort peu de ce cycle fermé.

Ces principes permettent d'étudier les déformations permanentes qu'éprouve le réservoir d'un thermomètre lorsqu'on fait osciller la température entre les deux limites T_0, T_1.

Pour fixer les idées, supposons que l'on ait, au préalable, fait osciller le thermomètre un certain nombre de fois entre la température T_0 et une température T'_0, supérieure à T_0, mais notablement inférieure à T_1.

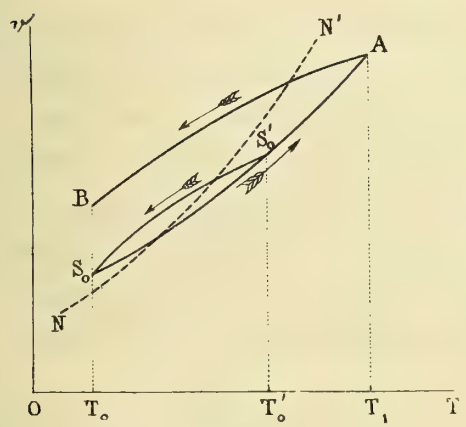


Fig. 15.

Traçons, dans le plan T0v, la ligne qui représente la modification d'origine élastique ; au moment où vont commencer les oscillations entre les températures T_0 et T_1, la trajectoire est devenue peu différente du cycle $\mathcal{C}(T_0, T'_0, C)$ ou $S_0\,S'_0$ (fig. 15) relatif à la valeur qu'a la constante C à cet instant. Comme cas particulier, on peut supposer T'_0 très peu supérieur à T_0 ; ce cas particulier sera celui d'un thermomètre laissé un certain temps à une température qui éprouve de petites variations au voisinage de la valeur T_0 ; le point figuratif aura alors, en la figure 15, au moment où vont commencer les oscillations de température entre T_0 et T_1, une position voisine de l'état naturel fictif relatif à la température T_0 et à la valeur qu'a la constante C à l'instant considéré.

Les choses étant en cet état, portons la température à la valeur T_1 ; dans le plan T0*v*, le point figuratif de la modification d'origine élastique décrira une ligne voisine de l'ascendante $S_0 S'_0 A$, en sorte que le point A, d'abscisse T_1, sera certainement au-dessous de la ligne NN′ des états naturels fictifs relatifs à la valeur qu'a la constante C à cet instant.

Lorsque ensuite la température baissera de T_1 à T_0, le point figuratif de la modification d'origine élastique décrira une descendante AB, située au-dessus de l'ascendante $S_0 A$; la déformation permanente d'origine élastique produite par la première oscillation sera donc un accroissement du volume spécifique *v* ou, en d'autres termes, une dépression du point 0°.

On verrait sans peine que chacune des oscillations suivantes produira, comme modification d'origine élastique, une dépression du point 0° ; mais la valeur absolue de chaque dépression sera moindre que la valeur absolue de la dépression précédente. Au bout d'un nombre modéré d'oscillations, cette dépression d'origine élastique aura atteint une valeur qui ne variera presque plus, quelque grand que soit le nombre des oscillations de température imposé au thermomètre.

Pour connaître approximativement la déformation permanente du thermomètre, il faudra combiner la déformation permanente d'origine élastique avec la déformation permanente d'origine chimique. Celle-ci est représentée dans le plan T0*x* par une ligne que nous supposerons tracée en entier dans la région des recuits ; dans ces conditions, la modification permanente d'origine chimique produit toujours une ascension du point 0° ; pour connaître l'effet que l'on obtient en combinant cette ascension avec la dépression d'origine élastique, trois cas sont à distinguer :

Premier cas. — *La modification se produit dans la période des recuits séculaires.*

Dans ce cas, les oscillations successives de la température font descendre le point 0° du thermomètre ; la dépression produite par chaque oscillation est moindre que la dépression produite par l'oscillation précédente ; au bout d'un nombre modéré d'oscillations, le point 0° semble être descendu jusqu'à une position limite invariable ; en réalité, cette position limite remonte par une ascension séculaire.

Deuxième cas. — *La modification se produit dans la période des recuits modérés.*

La déformation d'origine chimique se réduit à une ascension du point 0° appréciable, mais petite; cette ascension est inférieure en valeur absolue à la dépression d'origine élastique produite par la première oscillation de température; parfois même elle est inférieure en valeur absolue à chacune des dépressions produites par les premières oscillations; mais celles-ci décroissent avec rapidité; le sens de l'inégalité ne tarde pas à être renversé, en sorte que l'on observe les phénomènes suivants :

La première oscillation de température produit une dépression du point 0° du thermomètre; il en est parfois de même de quelques-unes des oscillations qui suivent la première; mais, au bout d'un petit nombre d'oscillations, la dépression se change en ascension, et, après un nombre modéré d'oscillations de la température, on n'observe plus que l'ascension progressive, d'origine chimique, du point 0° du thermomètre.

Troisième cas. — *La modification se produit dans la période des recuits rapides.*

Si le thermomètre est neuf, les premières oscillations de température produisent une grande ascension d'origine chimique; il se peut que cette ascension surpasse, en valeur absolue, la dépression d'origine élastique; on pourra donc, avec un thermomètre neuf, surtout s'il est en cristal blanc et si les températures employées sont élevées, obtenir, dès la première oscillation de température, une ascension du point 0° du thermomètre; au bout d'un petit nombre d'oscillations de la température, cette ascension prendra tous les caractères de l'ascension d'origine chimique.

Ces indications montrent de quelle manière il conviendra, en général, d'appliquer la méthode d'évaluation approchée de la déformation permanente que nous avons établie au § 3 du Chapitre précédent; nous laisserons au lecteur le soin de faire cette application aux cas plus ou moins compliqués que peut offrir l'expérience.

§ 3. — *Thermomètre dont la dureté n'éprouve plus que des variations permanentes séculaires.*

Si un thermomètre neuf est maintenu très longtemps à une température physiquement fixe et point trop élevée, ou bien encore s'il oscille un très grand nombre de fois entre une limite inférieure T_0 et une limite supérieure T_1, cette dernière n'ayant pas une trop grande valeur, il arrive que la valeur de la fonction $f_x(v, x, T)$ devient très petite et négligeable par rapport à $f_v(v, x, T)$, bien que le verre soit fort éloigné de l'état naturel relatif à la température considérée ; ou, en d'autres termes, que la fonction $h(x, T, \gamma)$, numériquement égale, en chaque état du système, à la fonction $f_x(x, v, T)$, soit négligeable par rapport à la fonction $g(v, T, C)$, numériquement égale à la fonction $f_v(v, x, T)$; dans ces conditions, si la température subit une oscillation, la ligne représentative de la modification d'origine chimique qui représente cette oscillation se compose, dans le plan TOx, d'un segment d'aller et d'un segment de retour presque confondus entre eux ; la modification permanente d'origine chimique est presque nulle. Nous dirons alors que *la dureté n'éprouve plus que des variations permanentes séculaires.*

L'on ne peut distinguer par un caractère rigoureux si les modifications permanentes de la dureté sont ou ne sont pas séculaires ; nous disons que ces modifications sont purement séculaires lorsque $f_x(v, x, T)$ ou, ce qui revient au même, $h(x, T, \gamma)$ est inférieur en valeur absolue à une certaine limite qui dépend de la précision des moyens d'observation employés.

Proposons-nous de déterminer, pour une valeur donnée de γ, la disposition qu'affecte la région du plan TOx à l'intérieur de laquelle la dureté n'éprouve plus que des variations séculaires.

A cette valeur de γ correspond une ligne des états naturels fictifs vv' (fig. 16). Si nous nous laissons guider par l'analogie que présentent les variations de la dureté des métaux, et si nous nous souvenons des résultats obtenus par MM. Carl Barus et Vincent Strouhal en étudiant le recuit de

l'acier (voyez Quatrième mémoire, Chapitre III, § 2), nous serons amenés à énoncer l'hypothèse suivante :

La région des variations séculaires de la dureté est limitée, supérieurement, par une ligne rr' qui la sépare de la région des recuits modérés ; aux basses températures, l'ordonnée de cette ligne est extrêmement élevée ; elle s'abaisse d'abord lorsque la température croît, passe par un minimum et croît ensuite avec la température, tandis que la ligne rr' tend asymptotiquement vers la ligne vv'.

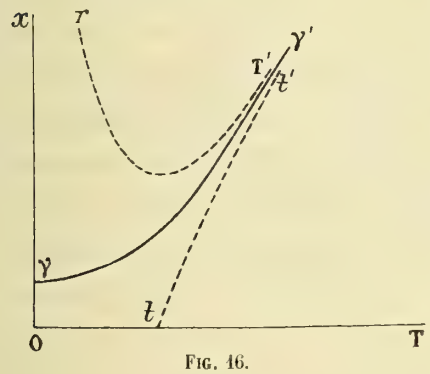


Fig. 16.

La région des variations séculaires de la dureté est limitée inférieurement par une ligne tt' qui la sépare de la région des trempes modérées ; cette ligne tt' monte sans cesse de gauche à droite et, lorsque la température croît, tend asymptotiquement vers la ligne vv'.

La région comprise entre vv' et rr' est la région des *recuits séculaires ;* la région comprise entre vv' et tt' est la région des *trempes séculaires.*

A chaque valeur de γ correspondent une ligne vv', une ligne rr', une ligne tt' ; pour toutes les valeurs de γ, ces lignes affectent une disposition analogue à celle que nous venons de décrire.

Imaginons qu'un thermomètre subisse une série de modifications pendant lesquelles la fonction $f_x(v, x, \mathrm{T})$, ou, ce qui revient au même, la fonction $h(x, \mathrm{T}, \gamma)$ demeure constamment très petite ; si cette modification ne correspond pas à des oscillations extrêmement nombreuses de la température, la modification permanente d'origine chimique sera extrêmement petite ; la modification permanente totale se réduira sensiblement à la modification permanente d'origine élastique ; d'où le théorème suivant :

Les modifications permanentes d'un thermomètre, dont la dureté n'éprouve plus que des variations permanentes séculaires, suivent sensiblement les lois simples qui régissent les modifications d'un système doué d'hysteresis et dépendant d'une seule variable hors la température.

Cette proposition, cependant, n'est pas rigoureusement exacte; la modification permanente d'origine chimique, bien que très petite, n'est pas rigoureusement nulle. Supposons, par exemple, que le thermomètre soit soumis à une température qui oscille entre deux limites T_0, T_1 ($T_1 > T_0$), en demeurant sans cesse dans la région des variations permanentes séculaires de la dureté; au bout d'un nombre suffisant d'oscillations, la ligne qui représente, dans le plan T0v, la modification permanente d'origine physique, diffèrera extrêmement peu d'un cycle fermé S_0S_1; à partir de ce moment, la modification permanente d'origine physique pourra être regardée comme nulle; mais la modification permanente d'origine chimique, qu'il faut composer avec la première pour obtenir la modification permanente totale, ne sera pas tout à fait nulle; les choses se passeront donc comme si un mouvement très lent entraînait le point S_0.

Supposons, pour fixer les idées, que la ligne qui représente, dans le plan T0x, la modification d'origine chimique soit tout entière tracée dans la région des recuits séculaires; c'est le cas réalisé tout d'abord et le plus aisément par un thermomètre très recuit; la modification permanente d'origine chimique se réduira alors, à chaque oscillation, à une très petite diminution de x, et, par conséquent, à une très petite diminution de v. *Si donc le thermomètre oscille entre deux températures données* T_0, T_1 ($T_1 > T_0$) *de façon à demeurer toujours dans la région des recuits séculaires, la trajectoire du point figuratif dans le plan* T0v *semblera tendre assez vite vers un cycle fermé limite* S_0S_1, *mais ce cycle sera animé d'un mouvement très lent, par l'effet duquel son sommet inférieur* S_0 *s'abaissera sans cesse.*

L'inverse aurait lieu si le thermomètre demeurait sans cesse dans la région des trempes séculaires.

Dans le cas traité en ce moment, où $f_x(v, x, T)$ est négligeable par rapport à $f_v(x, v, T)$, le tracé, dans le plan T0v, de la modification d'origine élastique n'est pas seulement apte à fournir l'évaluation approchée de la modification permanente subie par le thermomètre lorsque la température revient à sa valeur initiale; elle fournit l'image approchée de toutes les modifications qu'éprouve le verre pendant que la température varie, ainsi que nous l'avons vu au § 2 du Chapitre précédent. Si donc la température du thermomètre

oscille indéfiniment entre T_0 et T_1 ($T_1 > T_0$), la trajectoire du point figuratif, dans le plan T0v, de l'état du thermomètre, finira par différer très peu du cycle fermé $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$ relatif à la valeur de la constante C qui convient à l'état actuel du thermomètre; mais de temps en temps — toutes les cent oscillations, par exemple, — il faudra retoucher la valeur de C; le cycle limite $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$ semblera donc se déformer et se déplacer lentement.

Supposons que, pendant une période de temps, le thermomètre se soit déformé constamment dans la région des recuits séculaires; soit C la valeur de la constante C, déterminée au début t de ce laps de temps; soit C′ la valeur de la même constante, déterminée à la fin t' de ce laps de temps. Nous aurons, en vertu de l'égalité (18),

$$C = \left[\frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x}\right]_t,$$

$$C' = \left[\frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x}\right]_{t'}$$

et

$$C' - C = \left[\frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x}\right]_t^{t'}.$$

L'égalité (3) nous donne alors

$$(23) \quad \ldots\ldots\ldots \quad C' - C = -\int_t^{t'} f_x(v, x, T)\,|dx|.$$

Dans la région des recuits, $h(x, T, \gamma)$ est constamment positif, il en est de même de $f_x(v, x, T)$, qui lui est numériquement égal pour chaque état du thermomètre, on a donc

$$C' - C < 0.$$

Lorsque les oscillations du thermomètre ont lieu dans la région des recuits séculaires, la valeur de C *diminue lentement.*

Or, nous avons vu tout à l'heure que, dans ces conditions, l'ordonnée du sommet inférieur S_0 du cycle $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$ diminuait lentement; le

rapprochement de ces deux propositions nous donne le Théorème suivant, qui va nous être utile :

Le cycle $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$ *se déplace et se déforme, lorsque la valeur de* C *varie, de telle façon que l'ordonnée de son sommet inférieur* S_0 *soit une fonction croissante de* C.

Imaginons qu'on ait fait osciller un grand nombre de fois un thermomètre entre les températures T_0, T_1 ($T_1 > T_0$) et que, dans ces conditions, la dureté n'éprouve que des variations séculaires ; le point figuratif, dans le plan $T0v$, décrit un trajet qui tend sensiblement vers un cycle fermé S_0S_1 ou $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$; le volume spécifique du verre à la température T_0 tend vers une *valeur limite* sensiblement fixe u_0, qui n'éprouve que des variations séculaires.

Les choses étant en cet état, portons le thermomètre à la température T_2, supérieure à T_1, ramenons-le à la température T_0 et demandons-nous quel serait l'effet de cette *perturbation.*

La modification permanente d'origine élastique consiste, comme nous l'avons vu au § précédent, en un accroissement du volume spécifique, qui passerait de la valeur u_0 à la valeur $v_0 > u_0$.

Quant à la déformation permanente d'origine chimique, trois cas sont à distinguer :

1° En portant le thermomètre à la température T_2 et le ramenant ensuite à la température T_0, on n'a point fait sortir le point figuratif, dans le plan $T0x$, de la région des variations séculaires de la dureté ; dans ce cas, la modification permanente d'origine chimique est négligeable ; la modification permanente totale se réduit à l'accroissement de volume spécifique d'origine élastique ;

2° La trajectoire du point figuratif, dans le plan $T0x$, durant la perturbation, sort de la région des variations séculaires de la dureté et pénètre dans la région des recuits modérés ; la modification permanente d'origine chimique consiste en une petite diminution du volume spécifique ; la modification permanente totale consistera donc, en général, en un accrois-

sement du volume spécifique, inférieur à celui qu'aurait produit la seule modification d'origine élastique ;

3° La trajectoire du point figuratif, dans le plan T0x, durant la perturbation, sort de la région des variations séculaires de la dureté et pénètre dans la région des trempes modérées ; la modification permanente d'origine chimique consiste en une petite augmentation du volume spécifique ; la modification permanente totale consiste donc certainement en un accroissement du volume spécifique, supérieur à celui qu'aurait produit la seule modification d'origine élastique.

Le premier effet de la perturbation sera donc, assurément, une dépression plus ou moins grande du niveau que le mercure occupe à la température T_0.

Supposons qu'après la perturbation que nous venons d'étudier, on recommence à faire osciller la température du thermomètre, entre les deux valeurs T_0 et T_1, dans la région des variations séculaires de la dureté ; suivons la modification permanente éprouvée par le verre de ce thermomètre à chaque retour de la température à la valeur T_0.

Dans ce but, conformément à la méthode générale que nous avons indiquée au § 3 du Chapitre précédent, et que nous avons appliquée dans ce qui précède, nous traçons, dans le plan T0v, la marche que suivrait le point figuratif si la fonction $f_x(v, x, T)$ était négligeable, puis, dans le plan T0x, la marche que suivrait le point figuratif si la fonction $f_v(v, x, T)$ était négligeable, et nous composons entre elles les deux modifications permanentes qui en résultent pour v.

Suivons d'abord le premier tracé : La trajectoire, partant du point v_0, doit ramener le point figuratif sur la ligne $T = T_0$ à des points dont les ordonnées v_0', v_0'', v_0''', ..., de plus en plus petites, doivent tendre vers l'ordonnée limite u_0, valeur du volume spécifique du verre, à la température T_0, avant la modification.

Quant à la modification permanente d'origine chimique, elle se réduit à celle qui s'est produite pendant la perturbation ; les oscillations ultérieures, entre les températures T_0, T_1, ne produisent aucune modification permanente notable, d'origine chimique, puisqu'elles laissent le thermomètre dans la

région des variations séculaires de la dureté. Si donc on désigne par ψ l'accroissement permanent de volume spécifique par l'effet de la perturbation, les valeurs du volume spécifique immédiatement après la perturbation et après la première, la seconde, la troisième ..... oscillation seront non pas

$$v_0, \quad v_0', \quad v_0'', \quad v_0''', \quad \ldots\ldots$$

mais

$$v_0 + \psi, \quad v_0' + \psi, \quad v_0'' + \psi, \quad v_0''' + \psi, \quad \ldots\ldots$$

Les quantités inscrites dans la première ligne ayant pour limites u_0, les quantités inscrites dans la seconde ligne ont pour limite $(u_0 + \psi)$.

Dès lors, trois cas sont à distinguer :

1° La perturbation n'a point fait sortir le point figuratif, dans le plan T0x, de la région des variations séculaires de la dureté; ψ est négligeable.

Dans ce cas, la perturbation avait fait croître le volume spécifique du verre de la valeur limite u_0 à la valeur v_0; une suite d'oscillations entre les températures T_0, T_1, fait décroître sans cesse le volume spécifique à la température T_0 et *le fait tendre de nouveau vers la même limite* u_0;

2° La perturbation entraîne le point figuratif dans la région des recuits modérés; dans ce cas, ψ est négatif; $(u_0 + \psi)$ est inférieur à u_0; par les oscillations entre les températures T_0, T_1 qui suivent la perturbation, le volume spécifique du verre à la température T_0 tend, en diminuant sans cesse, vers une *limite* $(u_0 + \psi)$, *inférieure à la valeur limite* u_0 *que ce volume avait atteinte avant la perturbation;*

3° La perturbation entraîne le point figuratif dans la région des trempes modérées; dans ce cas, ψ est positif; $(u_0 + \psi)$ est supérieur à u_0; par les oscillations entre les températures T_0, T_1, qui suivent la perturbation, le volume spécifique du verre à la température T_0 tend, en diminuant sans cesse, vers une *limite* $(u_0 + \psi)$, *supérieure à la valeur limite* u_0 *que ce volume avait atteinte avant la perturbation.*

(Il ne faut pas oublier que les limites dont il est question dans tout ceci ne sont pas des limites rigoureusement fixes, mais des pseudo-limites, douées de variations séculaires).

Ainsi, si l'on observe la valeur limite à laquelle parvient le volume spécifique du verre à la température T_0, à la suite d'oscillations très nombreuses effectuées entre deux limites de température T_0, T_1, telles que la dureté du verre ne subisse que des variations permanentes séculaires, et si l'on fait cette observation avant et après une perturbation, la comparaison des deux valeurs limites nous apprendra si la perturbation a laissé le verre dans les conditions où la dureté n'éprouve que des variations séculaires, si elle lui a imposé un recuit modéré ou si elle l'a modérément trempé.

Il va de soi que ce criterium est appelé à jouer un grand rôle dans la discussion des effets qu'une modification déterminée produit sur un thermomètre; aussi allons-nous l'établir à nouveau en suivant la méthode indiquée au § 2 du Chapitre précédent.

Avant la perturbation, la dureté ne subit que des variations séculaires; nous pouvons donc réduire approximativement les modifications du verre à ce que nous avons appelé les modifications purement élastiques, à condition d'attribuer à la constante C une valeur convenable C; la température oscillant entre T_0 et T_1, la trajectoire du point figuratif tendra vers le cycle $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$.

Après la perturbation, la dureté n'éprouvant de nouveau que des variations séculaires, nous pourrons redonner des modifications du verre une représentation analogue, à la condition de donner à la constante C la nouvelle valeur C'; la température oscillant entre T_0 et T_1, la trajectoire du point figuratif tendra vers le cycle $\mathcal{C}(T_0, T_1, C')$.

La variation $(C' - C)$ qu'éprouve, par l'effet de la perturbation, la valeur de C est donnée par la formule

$$(23^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad C' - C = -\Sigma f_x(v, x, T)\,|dx|,$$

la somme s'étendant à tous les éléments de la perturbation.

La fonction $f_x(v, x, T)$, négligeable dans la région des variations séculaires de la dureté, est positive dans la région des recuits modérés et négative dans la région des trempes modérées; l'égalité (23^{bis}) conduit donc aux propositions suivantes :

1° Une perturbation qui laisse le point figuratif (T, x) dans la région des

variations séculaires de la dureté ne fait pas varier d'une manière appréciable la valeur de C;

2° Une perturbation qui entraîne le point figuratif (T, x) dans la région des recuits modérés, fait décroître C;

3° Une perturbation qui entraîne le point figuratif (T, x) dans la région des trempes modérés, fait croître C.

Il suffit alors de se rappeler que l'ordonnée, dans le plan T0v, du sommet inférieur S_0 du cycle simple $\mathcal{C}(T_0, T_1, C)$ est une fonction croissante de C pour retrouver les propositions précédemment énoncées.

Imaginons que l'on impose plusieurs fois de suite, à un même thermomètre, la même perturbation qui consiste à le porter à la température T_2 et que, dans l'intervalle de deux perturbations consécutives, on le fasse osciller un très grand nombre de fois entre les températures limites T_0, T_1; chacune de ces suites d'oscillations fournira une valeur limite u_0, u_0', u_0'', ..., du volume spécifique du verre à la température T_0; deux valeurs limites consécutives, u_0' et u_0'', par exemple, ne seront pas égales entre elles si la perturbation interposée fait sortir le verre des conditions où la dureté n'éprouve que des variations séculaires; mais, au bout d'un certain nombre de perturbations, il pourra arriver qu'en élevant la température jusqu'à T_2 on ne fasse plus sortir le point figuratif (T, x) de la région des variations séculaires de la dureté; dès lors, les valeurs limites successives seront égales entre elles, aux variations séculaires près; on a alors atteint, selon l'expression employée par M. L. Marchis (*), la *limite des limites* du volume spécifique du verre à la température T_0.

(*) L. Marchis, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXIII, p. 799, 1896. — Au sujet des applications que l'on peut faire des méthodes précédentes à la discussion des faits présentés par le thermomètre, voyez le beau mémoire, déjà cité, de M. L. Marchis, *Sur les déformations permanentes du verre et le déplacement du zéro des thermomètres.*

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

CHAPITRE PREMIER. — Des systèmes a deux variables privilégiées 117

§ 1. — Quelques théorèmes relatifs à un système défini par deux variables privilégiées 117
§ 2. — Premier problème étudié 120
§ 3. — Deuxième problème étudié. — Corrélation avec le problème précédent. 135
§ 4. — Ligne des états naturels 137
§ 5. — Stabilité des états naturels et des cycles limites 140

CHAPITRE II. — Élasticité et magnétisme. 141

§ 1. — Préliminaires 141
§ 2. — Fil soumis à une action magnétisante invariable et à une traction variable 144
§ 3. — Fil soumis à une traction invariable et à une force magnétisante variable 152

CHAPITRE III. — Influence de la trempe sur les propriétés physiques des métaux. 156

§ 1. — Intersections apparentes dans les tracés relatifs à certaines modifications permanentes des métaux 156
§ 2. — D'un système où la dureté ne subit que des variations séculaires . 158
§ 3. — Calcul approché d'une modification permanente 168

CHAPITRE IV. — Les modifications permanentes du verre 172

§ 1. — Le déplacement du point 0° du thermomètre à mercure. . . . 172
§ 2. — Propriétés d'un thermomètre modérément recuit. 180
§ 3. — Thermomètre dont la dureté n'éprouve plus que des variations permanentes séculaires 190

Table des Matières 199

PRESENTED
8 JAN. 1900
BRITISH MUSEUM
NATURAL